

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 6—1950

МЕХАНИКА

П. В. МЯСНИКОВ

О ДАВЛЕНИИ СВОБОДНОЙ ПЛОСКОЙ СТРУИ НА ПРЕПЯТВИЕ

п. 742 пр. 11

Автору приходилось неоднократно заниматься вопросом о давлении струи на плоское препятствие и об использовании в некоторых технических задачах водяных и воздушных струй, получаемых при помощи прямоугольных насадок. Среди задач имелись такие, для разрешения которых требовалось знать наперед в явной аналитической форме распределение давлений струи непосредственно вдоль плоского препятствия в зависимости от ее параметров: ширины, расхода, скоростного напора и т. п. Вполне понятно, что гидравлическая теория не могла дать ответа на этот вопрос, гидродинамической же теории, дававшей выход в область указанных технических приложений, по сути дела не имелось. С точки зрения гидродинамической трактовки рассматриваемого вопроса представляют интерес известная монография Чизотти [1] и экспериментально-теоретическая работа Шаха [2]. Однако в первой из этих работ не дано никаких формул, которые могли бы быть непосредственно использованы в инженерной практике и расчетах. Что же касается работы Шаха, то примененный им для решения задачи годографический метод привел его к таким соотношениям, с помощью которых невозможно выразить явную зависимость скорости и давления струи вдоль препятствия от параметров струи.

В предлагаемой статье мы стремимся восполнить этот существенный, на наш взгляд, пробел в решении задачи о давлении плоской струи на препятствие. Опираясь на гидродинамическую теорию плоских струй, мы выводим формулы, в явной аналитической форме выражающие распределение скоростей и давлений струи, в зависимости от ее параметров, непосредственно вдоль самого плоского препятствия, и указываем для кривых скоростей и давлений некоторые аппроксимирующие зависимости, которые содержат уже только параметры, вытекающие из сущности задачи, и удобны для технических приложений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обычным средством для получения плоских струй служат прямоугольные насадки. Однако не при всяком соотношении сторон насадки практически возможно получить плоскую струю. Визуальные наблюдения над опытами по получению струй при помощи прямоугольных насадок с различным соотношением сторон, произведенными летом 1942 г. в одной

из лабораторий Московского университета, показывают, что для получения плоских струй соотношение между длинами сторон насадки не должно быть меньше 1 : 3. При меньшем соотношении резко нарушаются условия существования плоского течения: течение струи по пластинке приобретает характер более осесимметричного течения, наблюдаемого обычно в случае струи с круглым поперечным сечением.

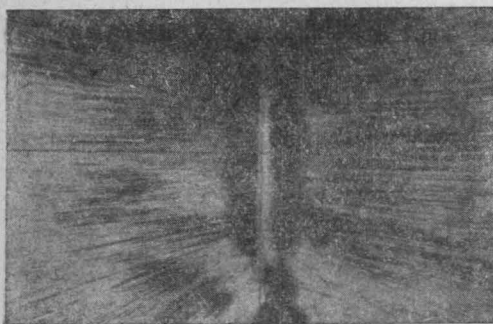


Рис. 1

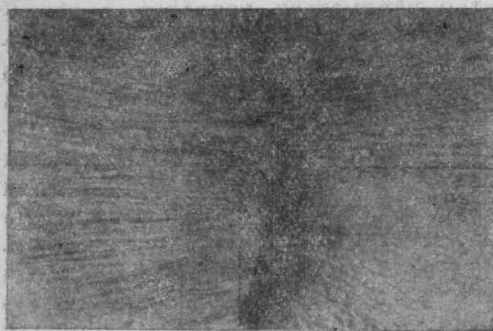


Рис. 2

На фотографических снимках (рис. 1 и 2) показано растекание водяных струй, полученных из насадки с соотношением сторон 1 : 5, по стеклянной пластинке для случаев прямого (угол набегающего течения $\alpha_0 = 90^\circ$) и косо (угол набегающего течения $\alpha_0 = 30^\circ$) давления. Легко видеть, что и эти струи почти на всем протяжении насадки могут рассматриваться как плоские, т. е. как струи, которые, независимо от угла наклона плоскости препятствия к направлению набегающей на него струи, будут обладать одинаковыми геометрическими и гидродинамическими характеристиками почти во всех плоскостях, нормальных к длине насадки.

Следовательно, выбирая соответствующим образом размеры прямоугольной насадки, мы всегда можем достичь выполнения условий, необходимых для существования плоской струи, и задачу о давлении такой струи на препятствие трактовать как плоскую задачу гидродинамики. При наличии этих условий задача о давлении струи на неподвижную плоскую преграду, поставленную под каким-либо углом α_0 к направлению струи на достаточно большом расстоянии от преграды, где не сказывается ее влияние на струю, будет состоять, прежде всего, в аналитическом построении плоского невихре-

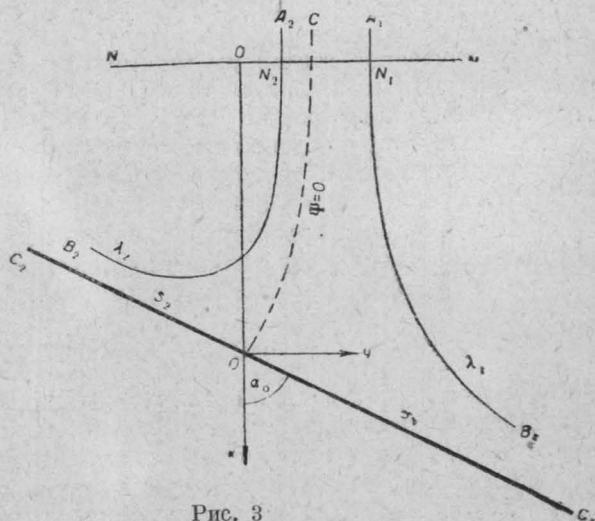


Рис. 3

вого установившегося потока несжимаемой идеальной жидкости, схематически представленного на рис. 3, где C_1C_2 —плоская твердая преграда, λ_1, λ_2 —свободные границы струи, O —нулевая критическая точка потока, в которой линия тока CO разветвляется на две: S_1 и S_2 .

2. ПОСТРОЕНИЕ ПОТОКА

Будем предполагать, что нулевая критическая точка O потока всегда находится в конечной части плоскости. Поместим начало системы координат в этой точке и направим ось Ox параллельно скорости набегающей струи в ее невозмущенной части, а ось Oy —вправо. Обозначим через φ и ψ потенциал скоростей и функцию тока рассматриваемого течения жидкости, через v —скорость в любой точке струи, v_0 —скорость струи при истечении из насадки. Примем на линии тока, упирающейся в критическую точку O и здесь разветвляющейся, $\psi=0$. Пусть также в этой точке $\varphi=0$. Тогда, как известно,

$$v_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = +\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

где v_x и v_y —компоненты скорости v по осям Ox и Oy . Эти соотношения показывают, что вправо от линии $\psi=0$, при $y > 0$ пойдут струи $\psi < 0$, влево, при $y < 0$ пойдут струи $\psi > 0$. Если Q —расход, несомый всей струей, Q_1 и Q_2 —расходы струи по ту и другую сторону от линии тока $\psi=0$, то на линии тока λ_1 будем иметь $\psi=Q_1$, а на линии тока λ_2 $\psi=Q_2$. Потенциал скоростей φ будет изменяться в направлении течения от $\varphi = +\infty$ до $\varphi = -\infty$.

Примем физическую плоскость потока за плоскость комплексной переменной $z = x + iy$ и обозначим через $W = \varphi + i\psi$ характеристическую функцию течения. Области потока в плоскости (z) будет соответствовать в плоскости (W) полоса шириной $Q = Q_1 + Q_2$ с разрезом вдоль отрицательной полуоси φ . Тогда функция

$$W = \frac{Q_1}{\pi} \ln \frac{1 + \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)}{1 + \cos \alpha_0} + \frac{Q_2}{\pi} \ln \frac{1 - \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)}{1 - \cos \alpha_0}, \quad (1)$$

где $\zeta = \xi + i\eta$ —новая комплексная переменная, будет давать конформное изображение потока в плоскости (W) на внутренней части верхнего полукруга единичного радиуса плоскости (ζ), причем свободные границы струи будут изображаться радиусами $(-1, 0)$ и $(+1, 0)$, твердые стенки S_1 и S_2 —дугами $(-1, \zeta_0)$ и $(+1, \zeta_0)$, полуокружности (здесь $\zeta_0 = e^{i\alpha_0}$), и бесконечно удаленной точке плоскости (W) будет соответствовать в плоскости (ζ) точка $\zeta=0$.

Введем затем функцию $\omega(\zeta) = \vartheta(\xi, \eta) + i\tau(\xi, \eta)$ по соотношению:

$$-\frac{1}{v_0} \frac{dW}{dz} = e^{-i\omega(\zeta)}. \quad (2)$$

Эта функция должна быть, как известно, голоморфной внутри полукруга $|\zeta| < 1, \eta > 0$ и действительной на действительном диаметре $(-1, +1)$; в силу принципа симметрии она должна быть голоморфной во всем круге $|\zeta| < 1$. Действительная часть ее ϑ , определяющая наклон линий тока на физической плоскости течения, должна быть конечной и непрерывной во всех точках верхней полуокружности, кроме точки $\zeta = \zeta_0$, где она должна иметь разрыв, равный π . Коэффициент τ при мнимой

части той же функции, определяя величину скорости

$$v = v_0 e^{\zeta}, \quad (3)$$

должен обращаться в отрицательную бесконечность в точке $\zeta = \zeta_0$, соответствующей критической точке потока $z = 0$.

Всеми этими особенностями обладает функция

$$\omega(\zeta) = \alpha_0 - \pi + i \ln \frac{\zeta - \zeta_0}{1 - \zeta_0 \zeta}; \quad (4)$$

таким образом, согласно (2), имеем:

$$-\frac{1}{v_0} \frac{dW}{dz} = \frac{\zeta_0 - \zeta}{\zeta_0 (1 - \zeta_0 \zeta)}.$$

Отсюда находим:

$$dz = -\frac{1}{v_0} \cdot \frac{\zeta_0 (1 - \zeta_0 \zeta)}{\zeta_0 - \zeta} dW.$$

Дифференцируя (1), получим:

$$dW = -\frac{2(Q_2 - Q_1) + Q\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)}{\pi \left[4 - \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2\right]} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

и, следовательно,

$$dz = \frac{\zeta_0}{\pi v_0} \cdot \frac{(1 - \zeta_0 \zeta) \left[2(Q_2 - Q_1) + Q\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right] \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta (\zeta_0 - \zeta) \left[4 - \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2\right]} d\zeta.$$

Интегрируя вдоль любого пути в плоскости (ζ) от точки $\zeta = \zeta_0$ ($z = 0$) до какой-либо точки внутри полукруга $|\zeta| < 1$, $\eta > 0$, будем иметь:

$$z = \frac{\zeta_0}{\pi v_0} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{(1 - \zeta_0 \zeta) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) \left[2(Q_2 - Q_1) + Q\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right]}{\zeta (\zeta_0 - \zeta) \left[4 - \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2\right]} d\zeta. \quad (5)$$

Это соотношение устанавливает соответствие между точками потока на физической плоскости (z) и точками полукруга $|\zeta| \leq 1$, $\eta \geq 0$ и позволяет по задаваемым в плоскости (ζ) точкам построить все линии тока.

Вычисляя интеграл (5), получим выражение:

$$z = \frac{\zeta_0 (Q_2 - Q_1)}{\pi v_0} \ln \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta_0^2 - 1} + \frac{Q}{\pi v_0} \ln \frac{\zeta}{\zeta_0} - \frac{\zeta_0 Q}{\pi v_0} \ln \frac{(1 + \zeta)(1 - \zeta_0)}{(1 - \zeta)(1 + \zeta_0)} - \frac{1}{\pi v_0} [Q_1 (1 - \zeta_0)^2 + Q_2 (1 + \zeta_0)^2] \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0}.$$

Для того, чтобы нулевая критическая точка O потока находилась в конечной части плоскости, необходимо, чтобы

$$Q_1 (1 - \zeta_0)^2 + Q_2 (1 + \zeta_0)^2 = 0, \quad (6)$$

Тогда общее уравнение линии тока будет иметь вид:

$$z = \frac{\zeta_0 (Q_2 - Q_1)}{\pi v_0} \ln \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta_0^2 - 1} + \frac{Q}{\pi v_0} \ln \frac{\zeta}{\zeta_0} - \frac{\zeta_0 Q}{\pi v_0} \ln \frac{(1 + \zeta)(1 - \zeta_0)}{(1 - \zeta)(1 + \zeta_0)}. \quad (7)$$

В случае прямого давления струи на преграду ($\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, $\zeta_0 = i$) соотношение (6) приводит к равенству расходов по ту и другую сторону от средней линии тока: $Q_1 = Q_2$. В этом случае уравнение (7) линий тока принимает форму:

$$z = \frac{Q}{\pi v_0} \left[\ln \frac{\zeta}{\zeta_0} - i \ln \frac{(1+\zeta)(1-i)}{(1-\zeta)(1+i)} \right]. \quad (8)$$

В общем случае (6) дает соотношение между расходами Q_1 и Q_2 и углом наклона струи и вместе с уравнением неразрывности $Q = Q_1 + Q_2$ позволяет найти эти расходы. Действительно, подставляя в (6) значение $\zeta_0 = e^{i\alpha_0}$, найдем:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha_0}{2},$$

и, принимая в расчет уравнение неразрывности, получаем известные формулы гидравлики:

$$Q_1 = \frac{1}{2} Q (1 + \cos \alpha_0), \quad Q_2 = \frac{1}{2} Q (1 - \cos \alpha_0). \quad (9)$$

Для точек внутри полукруга:

$$\zeta = r e^{i\alpha} \quad (0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi).$$

Задавая α_0 , v_0 , Q и изменяя r и α в указанных пределах, мы можем определить соответственные значения расходов Q_1 и Q_2 и по уравнению (7) построить все линии тока.

Нетрудно найти уравнения граничных линий тока λ_1 и λ_2 . Для линии тока λ_1 имеем:

$$\zeta = r e^{i\pi} = -r, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Подставляя это значение в (7) и разделяя действительную и мнимую части, найдем параметрические уравнения линии тока λ_1 :

$$\frac{x}{\delta} = a_1 + \frac{1}{\pi} \ln r - \frac{\cos \alpha_0}{\pi} \left[\cos \alpha_0 \ln (1-r^2) - \ln \frac{1+r}{1-r} \right],$$

$$\frac{y}{\delta} = b_1 - \frac{\sin \alpha_0}{\pi} \left[\cos \alpha_0 \ln (1-r^2) - \ln \frac{1+r}{1-r} \right],$$

где a_1 и b_1 — постоянные, определяемые равенствами:

$$a_1 = -\frac{1}{2} \sin \alpha_0 (1 - \cos \alpha_0) - \frac{\cos \alpha_0}{\pi} \left(\alpha_0 \sin \alpha_0 + \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} - \cos \alpha_0 \ln 2 \sin \alpha_0 \right),$$

$$b_1 = 1 + \frac{1}{2} \cos \alpha_0 (1 - \cos \alpha_0) - \frac{\sin \alpha_0}{\pi} \left(\alpha_0 \sin \alpha_0 + \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2} - \cos \alpha_0 \ln 2 \sin \alpha_0 \right),$$

а δ — ширина струи на выходе из насадки, определяемая соотношением:

$$Q = v_0 \delta.$$

Для линии тока λ_2 имеем:

$$\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \zeta = r, \quad 0 \leq r \leq 1;$$

ее уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\delta} &= a_2 + \frac{1}{\pi} \ln r - \frac{\cos \alpha_0}{\pi} \left[\cos \alpha_0 \ln (1-r^2) + \ln \frac{1+r}{1-r} \right], \\ \frac{y}{\delta} &= b_2 - \frac{\sin \alpha_0}{\pi} \left[\cos \alpha_0 \ln (1-r^2) + \ln \frac{1+r}{1-r} \right], \end{aligned} \quad (10^*)$$

где

$$a_2 = a_1 \quad \text{и} \quad b_2 = b_1 - 1.$$

В случае прямого давления струи уравнения линий тока будут:

$$\frac{x}{\delta} = -0,5 + \frac{1}{\pi} \ln r, \quad \frac{y}{\delta} = 0,5 + \frac{1}{\pi} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

для λ_1 , и

$$\frac{x}{\delta} = -0,5 + \frac{1}{\pi} \ln r, \quad \frac{y}{\delta} = - \left(0,5 + \frac{1}{\pi} \ln \frac{1+r}{1-r} \right)$$

для λ_2 .

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И ДАВЛЕНИЙ

В точках полукруга $|\zeta| \leq 1$, $\eta \geq 0$ имеем:

$$\zeta = re^{i\alpha}.$$

Подставляя это значение ζ в функцию $\omega(\zeta) = \vartheta + i\tau$, определяемую соотношением (4), и в уравнение (7) и отделяя в них действительную и мнимую части, мы можем найти направление и величину скорости в любой точке струи. Направление скорости дается значением действительной части ϑ функции $\omega(\zeta)$, величина же скорости будет определяться через τ при помощи соотношения (3).

Наибольший интерес представляет закон распределения скоростей непосредственно вдоль самого препятствия.

Для точек, расположенных на препятствии,

$$\zeta = e^{i\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

Подставляя это значение в (4), найдем для коэффициента при мнимой части выражение:

$$\tau = \ln \frac{\left| \sin \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \right|}{\sin \frac{\alpha + \alpha_0}{2}}. \quad (11)$$

Следовательно, по (3) получаем:

$$v = v_0 \frac{\left| \sin \frac{\alpha - \alpha_0}{2} \right|}{\sin \frac{\alpha + \alpha_0}{2}}. \quad (12)$$

В случае прямого давления струи будем иметь:

$$v = v_0 \frac{|\cos \alpha|}{1 + \sin \alpha}. \quad (13)$$

Пусть l — расстояние от критической точки до той точки препятствия, в которой определяется скорость. Очевидно, что

$$x = l \cos \alpha_0, \quad y = l \sin \alpha_0.$$

С другой стороны, подставляя в формулу (7) значение $\zeta = e^{i\alpha}$ и отделяя действительную и мнимую части, найдем:

$$x = l_1 \cos \alpha_0, \quad y = l_1 \sin \alpha_0,$$

где

$$l_1 = \frac{\delta}{\pi} \left[(\alpha - \alpha_0) \sin \alpha_0 - \cos \alpha_0 \ln \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} + \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}} \right].$$

Сравнивая, получаем:

$$\frac{l}{\delta} = \frac{1}{\pi} \left[(\alpha - \alpha_0) \sin \alpha_0 - \cos \alpha_0 \ln \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} + \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}} \right]. \quad (14)$$

По формулам (12) и (14) можно построить кривые распределения скоростей вдоль препятствия для различных углов наклона α_0 препятствия к направлению струи.

Найдем распределение давлений струи по препятствию. В какой-либо точке препятствия динамическое давление будет равно:

$$p = \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2 \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right),$$

где ρ_0 — плотность жидкости. Подставляя сюда значение скорости v_0 из (12), найдем:

$$p = \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2 \cdot \frac{2 \sin \alpha \sin \alpha_0}{1 - \cos(\alpha + \alpha_0)}. \quad (15)$$

В случае прямого давления струи на препятствие:

$$p' = \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2 \cdot \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}, \quad (16)$$

$$\frac{y}{\delta} = \frac{1}{\pi} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} + \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right). \quad (14')$$

Полагая в формуле (15) $\alpha = \alpha_0$, найдем давление струи в нулевой критической точке. В этой точке давление будет максимальным, равным величине скоростного напора струи в выходном сечении насадки. Обозначая его через p_0 , будем иметь:

$$p_0 = \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2.$$

Относя в формулах (15) и (16) давление к скоростному напору p_0 , мы можем представить эти формулы в виде:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{2 \sin \alpha \sin \alpha_0}{1 - \cos(\alpha + \alpha_0)}, \quad (15')$$

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}. \quad (16')$$

Эти формулы, вместе с (14) и (14'), позволяют построить кривые давлений для различных углов α_0 .

Для определения суммарного динамического давления струи на препятствие имеем:

$$P_y - iP_x = - \int_{(S)} p dz = \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2 \int_{(S)} \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2}\right) dz,$$

где $S = S_1 + S_2$. Подставляя сюда значение v из (12) и

$$dz = \frac{\zeta_0 Q (1 - \zeta_0 \zeta) \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \alpha_0\right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta}{\pi v_0 \zeta (\zeta_0 - \zeta) \left[4 - \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2\right]}$$

и переходя к интегрированию в плоскости (ζ) вдоль полуокружности, для точек которой $\zeta = e^{i\alpha}$ ($0 \leq \alpha \leq \pi$), получим:

$$P_y - iP_x = - \frac{\rho_0 Q v_0 \sin \alpha_0}{\pi} e^{i\alpha_0} \int_0^\pi d\alpha = - \rho_0 Q v_0 e^{i\alpha_0} \sin \alpha_0.$$

Отсюда получаем известные формулы гидравлики для определения нормального давления:

$$P = |P_y - iP_x| = \rho_0 Q v_0 \sin \alpha_0,$$

и параллельного давления:

$$P_x = \rho_0 Q v_0 \sin^2 \alpha_0.$$

Из предыдущей формулы видно, что нормальное давление струи на препятствие убывает с уменьшением угла наклона препятствия к струе пропорционально синусу этого угла.

Формулы (12) и (13) для распределения скоростей и (15) и (16), или эквивалентные им (15') и (16'), для распределения давлений струи вдоль препятствия имеют тот недостаток, что они содержат параметр α вспомогательной плоскости комплексной переменной ζ , который отнюдь не вытекает из физической сущности задачи, а является следствием метода, переменного для ее решения. Исключение этого параметра из указанных формул и формул (14) и (14') приводит к соотношениям, из которых невозможно выразить $\frac{v}{v_0}$ и $\frac{p}{p_0}$ как явные функции $\frac{l}{\delta}$. Даже в простейшем случае прямого давления струи зависимость между $\sigma = \frac{p}{p'}$ и $\frac{y}{\delta}$ будет иметь вид:

$$\frac{y}{\delta} = \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \frac{\sigma}{2 - \sigma} + \ln \frac{2 - \sigma - 2\sqrt{1 - \sigma}}{\sigma} - \frac{\pi}{2} \right),$$

из которой нельзя выразить $\sigma = \frac{p'}{p_0}$ как функцию $\frac{y}{\delta}$. Это обстоятельство делает невозможным непосредственное использование этих формул в тех технических задачах, в которых должно быть наперед задано распределение скоростей или давлений вдоль препятствия в зависимости от параметров потока в физической плоскости течения. Поэтому

важно дать для распределения скоростей и давлений струи на препятствие формулы, свободные от этого недостатка.

Весьма простые аппроксимирующие зависимости для теоретических кривых распределения скоростей и давлений можно указать для случая прямого давления струи на препятствие. Естественно ввести для этого случая параметр $\frac{y}{\delta}$, где y — расстояние, отсчитываемое вдоль препятствия в ту и другую сторону от критической точки 0, а δ — ширина струи в выходном сечении насадки. Тогда для всего интервала

$$-\infty \leq \frac{y}{\delta} \leq +\infty$$

можно принять за аппроксимирующую функцию распределения давлений зависимость

$$p = \frac{p_0}{\operatorname{ch}^2 \frac{y}{\delta}}, \quad (17)$$

причем, как нетрудно показать, суммарное давление струи на препятствие сохраняет то же значение, что и при теоретическом распределении давлений вдоль препятствия. Действительно, имеем:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} p dy = p_0 \delta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(\frac{y}{\delta}\right)}{\operatorname{ch}^2 \frac{y}{\delta}} = 2p_0 \delta,$$

или, подставляя значение p_0 и вводя расход Q ,

$$P = \rho_0 Q v_0.$$

Для кривой распределения скоростей будем, очевидно, иметь:

$$v = v_0 \operatorname{th} \frac{|y|}{\delta}. \quad (18)$$

Ниже (рис. 4) показаны теоретические кривые распределения скоростей и давлений, построенные по формулам (13) и (16'), и пунктиром — аппроксимирующие кривые, соответствующие формулам (17) и (18).

Отклонение последних от теоретических кривых составляет сравнительно небольшую величину. Существенно, однако, заметить, что опытная кривая распределения давлений, приведенная в цитированной выше работе Шаха, располагается несколько ниже теоретической кривой, отклоняясь от последней в ту же сторону и приблизительно на ту же величину, что и наша аппроксимирующая кривая. Другими словами, наша аппроксимирующая кривая распределения давлений подходит к опытной кривой более близко, чем теоретическая кривая, давая такие отклонения от опытной, которые почти всюду не выходят за пределы точности опыта. Наоборот, аппроксимирующая функция распределения скоростей дает несколько завышенные, сравнительно с опытом, значения скоростей.

Нетрудно, впрочем, заметить, что давление струи на препятствие имеет главное значение в интервале:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{y}{\delta} \leq +\frac{\pi}{2}.$$

Для этого интервала можно указать еще более простые аппроксимирующие функции для кривых распределения скоростей и давлений. Для закона распределения давлений струи в указанном интервале можно принять:

$$p = p_0 \cos \frac{y}{\delta}, \quad (17')$$

причем суммарное давление струи на препятствие опять-таки будет иметь значение, соответствующее теоретическому распределению давле-

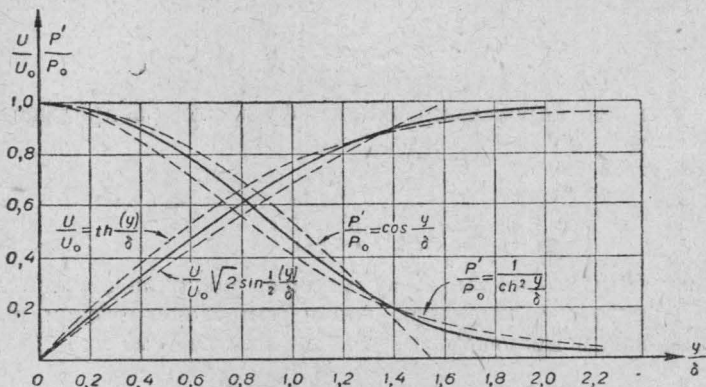


Рис. 4

ний (16'), что следует из вычисления интеграла:

$$P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} p dy = p_0 \delta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \frac{y}{\delta} d\left(\frac{y}{\delta}\right) = p_0 Q v_0,$$

если ввести значения p_0 и Q .

В этом случае распределение скоростей будет определяться формулой:

$$v = \sqrt{2} v_0 \sin \frac{|y|}{2\delta}. \quad (18')$$

На том же чертеже (рис. 4) нанесены и эти кривые. Они отклоняются от теоретических кривых (13) и (16') приблизительно на ту же величину в сторону, противоположную кривым, даваемым формулами (17) и (18). По отношению к опытной кривой распределения давлений аппроксимирующая кривая (17') дает отклонение, приблизительно в два раза большее сравнительно с теоретической кривой; что же касается аппроксимирующей кривой распределения скоростей (18'), то она дает очень хорошее совпадение с опытной.

Из сказанного следует, что теоретические кривые распределения скоростей и давлений плоской струи вдоль препятствия могут быть представлены с точностью, лежащей в пределах точности наблюдений, функциями в виде полусумм соответствующих формул (17) — (17') и (18) — (18'). Но нужно выбрать должным образом, как указано выше, пределы изменения $\frac{y}{\delta}$ для каждой из функций, входящих в эти полу-

в этом случае будет иметь то значение, которое соответствует теоретическому распределению давлений.

Нельзя, к сожалению, указать столь же простые аппроксимирующие функции для случая косо го давления струи на препятствие, если угол наклона α_0 препятствия к направлению струи произволен.

Мы рассмотрим случай, когда этот угол незначительно отличается от 90° . Положив в этом случае:

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \lambda,$$

где λ — угол, на который отклоняется препятствие от своего положения, соответствующего прямому давлению струи, мы можем формулу (15') представить в виде:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{2 \sin \alpha \cos \lambda}{1 - \sin(\lambda - \alpha)}.$$

Обозначая через

$$f(\lambda) = \frac{2 \sin \alpha \cos \lambda}{1 - \sin(\lambda - \alpha)},$$

разложим эту функцию в ряд по степеням λ :

$$f(\lambda) = f(0) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} + \frac{1}{2} \lambda^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \right)_{\lambda=0} + \dots$$

Ограничиваясь линейной частью разложения, будем иметь:

$$f(\lambda) = \frac{p}{p_0} = \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} + \lambda \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2}.$$

С другой стороны, для небольших значений λ мы можем считать, что параметр α ($0 \leq \alpha \leq \pi$) связан с расстоянием $\frac{y}{\delta}$ ($-\infty \leq \frac{y}{\delta} \leq +\infty$), отсчитываемым от точки O препятствия, соотношением:

$$\frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{y}{\delta}},$$

как и для случая прямого давления струи на препятствие. Подставляя в предыдущую формулу, получим:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1 + \lambda \operatorname{th} \frac{y}{\delta}}{\operatorname{ch}^2 \frac{y}{\delta}}. \quad (19)$$

Ниже (рис. 5) даны кривые $\frac{p}{p_0} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$, рассчитанные по формуле (19) для углов $\alpha_0 = 75^\circ, 80^\circ$ и 85° (соответствующие значения $\lambda = 0,262; 0,174$ и $0,087$ радиана), и нанесены для тех же значений α_0 теоретические кривые (сплошные), построенные по формулам (14) и (15'). Из сравнения легко видеть, что для рассматриваемых значений α_0 соответственные кривые дают хорошее совпадение для всех значений $\frac{y}{\delta} > 0$ ($\alpha_0 \leq \alpha \leq \pi$); для значений $\frac{y}{\delta} < 0$ можно говорить о хорошем совпадении лишь в том смысле, что суммарное давление струи, приходящееся на часть S_2 пре-

пятства, вычисленное по приближенной формуле (19), незначительно отличается от суммарного давления, приходящегося на ту же часть препятствия и отвечающего теоретическому распределению давлений.

Действительно, вычисляя суммарное давление P_2 струи на S_2 соответствующее формуле (19), получим:

$$P_2 = p_0 \int_{-\infty}^0 \frac{1 + \lambda \operatorname{th} \frac{y}{\delta}}{\operatorname{ch}^2 \frac{y}{\delta}} dy = p_0 \delta \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \right),$$

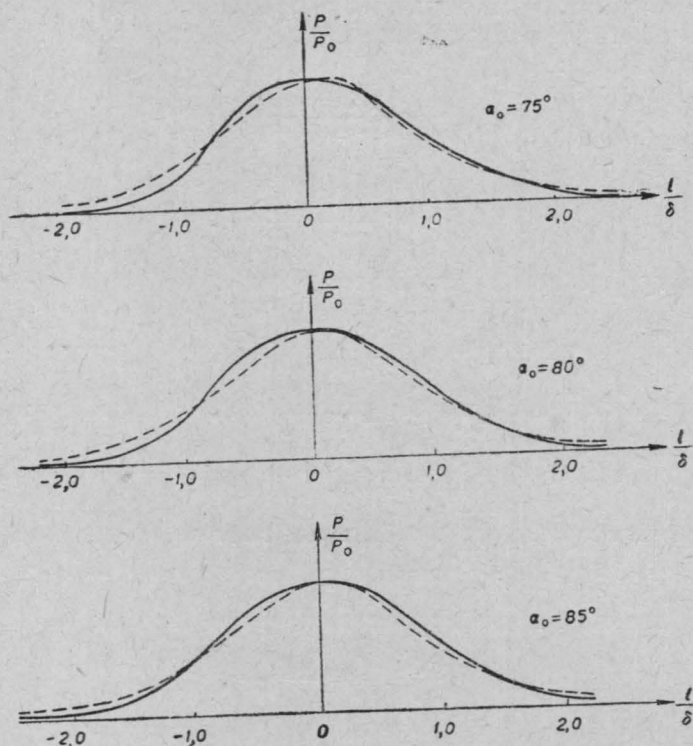


Рис. 5

или, вводя значение p_0 и Q ,

$$P_2 = \frac{1}{2} \rho_0 Q v_0 \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \right).$$

Следуя же теоретическому распределению давлений, найдем:

$$P_y - iP_x = - \int_{(S_2)} p dz = - \frac{\rho_0 Q v_0 \sin \alpha_0}{\pi} e^{i\alpha_0} \int_0^{\alpha_0} d\alpha = - \frac{\alpha_0}{\pi} e^{i\alpha_0} \rho_0 Q v_0 \sin \alpha_0.$$

откуда

$$P'_2 = |P_y - iP_x| = \frac{\alpha_0}{\pi} \rho_0 Q v_0 \sin \alpha_0,$$

или, вводя λ ,

$$P'_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{\pi} \right) \rho_0 Q v_0 \cos \lambda.$$

Тогда, очевидно, будем иметь

$$\frac{P_2 - P'_2}{\rho_0 Q v_0} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \lambda \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{\pi} \right) \cos \lambda.$$

Для $\alpha_0 = 75^\circ$, 80° и 85° это отношение будет соответственно равно 0,032; 0,012 и 0,008, т. е. отклонение P_2 от P'_2 будет составлять 3,2%, 1,2% и 0,8% от максимального возможного давления струи.

Следует заметить, что приближенная формула (19) дает для всего суммарного давления струи на препятствие несколько преувеличенное значение сравнительно с теоретическим, а именно:

$$P_{(s)} = \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \lambda \operatorname{th} \frac{y}{\delta}}{\operatorname{ch}^2 \frac{y}{\delta}} dy = \rho_0 Q v_0,$$

тогда как теоретическое значение суммарного давления

$$P = \rho_0 Q v_0 \cos \lambda,$$

и, следовательно,

$$\frac{P_{(s)} - P}{\rho_0 Q v_0} = 1 - \cos \lambda.$$

Для углов $\alpha_0 = 75^\circ$, 80° и 85° разность указанных давлений будет составлять соответственно 3,4%, 1,5% и 0,4% от максимального возможного давления струи. Это указывает, между прочим, насколько кривая, даваемая формулой (19), хорошо приближается к теоретической кривой в той ее части, которой соответствует $\frac{y}{\delta} > 0$.

Очевидно, для кривой распределения скоростей будем иметь приближенную формулу:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{y}{\delta} - \lambda \operatorname{th} \frac{y}{\delta}}}{\operatorname{ch} \frac{y}{\delta}}.$$

Рассматривая кривые распределения давлений вдоль препятствия, нельзя не обратить внимания на то обстоятельство, что области относительно больших давлений струи на препятствие незначительны. Ниже мы указываем расстояния l от нулевой критической точки, выраженные в долях ширины насадки, для которых давление струи на препятствие составляет менее 3% от скоростного напора в выходном сечении насадки.

	$\alpha_0 = 30^\circ$		$\alpha_0 = 45^\circ$		$\alpha_0 = 60^\circ$		$\alpha_0 = 75^\circ$		[$\alpha_0 = 90^\circ$]	
$\frac{l}{\delta}$	-0,34	2,84	-0,82	2,77	-1,30	2,88	-1,64	2,48	-2,24	2,24
$\frac{P}{P_0}$	0,02	0,02	0,00	0,03	0,02	0,02	0,02	0,03	0,02	0,02
$\frac{v}{v_0}$	0,99	0,99	1,00	0,99	1,00	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99

Это обстоятельство существенно, прежде всего, в вопросе выбора контрольной поверхности в растекающихся частях струи при постановке опытов по определению давления струи на препятствие. Сопоставляя экспериментальные данные различных авторов по определению давления струи, нетрудно обнаружить в их опытах факт зависимости величины давления от отношения площади поперечной струи к площади препятствия.

Для многих авторов, обсуждавших данный вопрос, этот факт дал повод считать неправильной формулу для определения струи на плоскую преграду, предложенную академиком Петербургской Академии наук Даниилом Бернулли [3]. Отсюда—неоднократные в истории данного вопроса попытки опровергнуть формулу Д. Бернулли и дать взамен ее другие, с одной стороны, и с другой стороны, большое количество экспериментальных работ, имеющих целью, наряду с решением практических вопросов, проверить справедливость этой формулы.

В действительности дело не в формуле Д. Бернулли, а в том, что авторы, проводившие экспериментальные работы, не имели возможности, за отсутствием теоретических данных о распределении давлений вдоль препятствия, выбрать в своих опытах контрольную поверхность в растекающейся части струи соответственно углу наклона струи к препятствию (практически—точки, в которых должно быть измерено давление) и вследствие этого установить правильное соотношение между площадью поперечного сечения струи и площадью препятствия. Это, наряду с другими ошибками, приводило к неправильной оценке результатов опытов и кажущемуся противоречию с формулой Д. Бернулли. Из приведенной выше таблицы видно, что в случае прямого давления струи контрольную поверхность следует брать на расстоянии $l \geq 2,24 \delta$ от нулевой критической точки.

Третья строка той же таблицы дает возможность судить о том, насколько быстро выравниваются скорости струи при растекании ее по препятствию. Мы видим, например, что в случае прямого давления скорость струи вдоль препятствия выравнивается на расстоянии немногим более двойной ширины струи в выходном сечении насадки. Этот вывод хорошо подтверждается имеющимися опытными данными как для водяных, так и для воздушных струй [4]. Однако было бы неправильно на основании этого считать незначительными фактические потери, имеющие место в струе при набегании ее на препятствие и растекании по нему, как это принимается многими исследователями [5]. Еще Вейсбах показал, что для случая водяной струи с круглым поперечным сечением скорость оттекающих частиц на расстоянии $R=10 r$ от нулевой критической точки, где r —радиус струи, меньше скорости притекающих приблизительно на 15% [6]. Это противоречие объясняется тем, что многие авторы, кладя в основу своих выводов уравнение Бернулли, определяли живую силу притекающей струи по средней скорости в подводящем трубопроводе и не вводили в рассмотрение корректив, учитывающий неравномерность скоростного поля. Между тем, избыток живой силы вытекающей струи, обязанный своим происхождением неравномерности поля скоростей и не учитываемый этими авторами, составляет, по многочисленным опытам для установившегося турбулентного режима, величину приблизительно такого же порядка—10—15%. Следовательно, потери на поворот струи встречным препятствием компенсировались в опытах и расчетах неучитываемой частью кинетической энергии вытекающей струи, и это давало повод считать потери настолько малыми, что ими можно было пренебречь.

Эти соображения в равной мере применимы и к случаю плоской струи.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИВЫГОДНЕЙШЕГО РАССТОЯНИЯ НАСАДКИ ОТ ПРЕПЯТСТВИЯ

Рассмотрим, наконец, вопрос об определении расстояния, на которое должна быть удалена насадка от препятствия, чтобы давление струи на препятствие имело при данном угле α_0 максимальное значение. Это расстояние мы будем называть наивыгоднейшим.

Практическая важность решения вопроса о наивыгоднейшем расстоянии вытекает из того общеизвестного факта, что давление струи на препятствие зависит, как показывают многочисленные опыты, не только от угла наклона препятствия к направлению струи, но в значительной мере и от расстояния препятствия от устья насадки. При расстояниях, меньших или больших наивыгоднейшего, происходит заметное падение давления: в первом случае—за счет подпора в струе, создаваемого встречным препятствием, во втором—за счет потерь на турбулизацию струи. Несмотря на это, вопрос об определении наивыгоднейшего расстояния до сих пор не был решен ни для плоской, ни для цилиндрической струи. В настоящей статье мы даем решение этого вопроса для случая плоской струи при наличии тех предположений, которые были нами сформулированы при общей постановке задачи о давлении струи на препятствие.

Будем определять наивыгоднейшее расстояние насадки до препятствия длиной отрезка OO' перпендикуляра, опущенного из нулевой критической точки потока O , параллельно скорости набегающей струи на бесконечности, на прямую NN , пересекающую струю в том месте, где расстояние между точками N_1 и N_2 , лежащими на границах λ_1 и λ_2 струи, будет не больше ширины насадки δ в ее выходном сечении (рис. 3).

Для определения этого расстояния мы воспользуемся уравнениями (10) и (10') линий тока λ_1 и λ_2 . С этой целью припишем координатам x и y точек, лежащих на этих линиях тока, соответственно индексы 1 и 2, и составим по уравнениям (10) и (10') разность $\frac{y_1}{\delta} - \frac{y_2}{\delta}$. Будем иметь:

$$\frac{y_1}{\delta} - \frac{y_2}{\delta} = 1 + \frac{2 \sin \alpha_0}{\pi} \ln \frac{1+r}{1-r}, \quad (20)$$

$$(0 \leq r \leq 1).$$

Эта разность для струи в выходном сечении насадки должна равняться единице; затем, по мере удаления от устья насадки в направлении течения, она должна возрастать вследствие расширения струи от встречи ее с препятствием.

Нетрудно видеть, что, если

$$\frac{y_1}{\delta} - \frac{y_2}{\delta} = 1,$$

то это возможно, при $\alpha_0 \neq 0$, только для $r=0$, т. е. при $z=0$, чему в физической плоскости течения соответствует бесконечно удаленная точка потока. Другими словами, влияние встречного препятствия на набегающую на него струю, выражающееся в ее расширении, теоретически будет сказываться вдоль всей струи—от точек встречи ее с препятствием до ее бесконечно удаленных частей.

Однако практически это влияние уже на небольшом удалении от препятствия становится настолько малым, что мы можем им пренебречь.

Действительно, пусть

$$\frac{y_1}{\delta} - \frac{y_2}{\delta} = 1 + \nu,$$

где ν — малая положительная величина, характеризующая отклонение ширины струи на некотором расстоянии от препятствия от ширины δ струи в выходном сечении насадки. Подставляя это значение разности в формулу (20), получим:

$$\nu = \frac{2 \sin \alpha_0}{\pi} \ln \frac{1+r}{1-r},$$

откуда

$$r = \frac{\frac{\nu\pi}{e^{1/2 \sin \alpha_0}} - 1}{\frac{\nu\pi}{e^{1/2 \sin \alpha_0}} + 1} = \operatorname{th} \left(\frac{\nu\pi}{4 \sin \alpha_0} \right).$$

Для этого значения r находим из уравнений (10) и (10') соответственные значения $\frac{x_1}{\delta}$ и $\frac{x_2}{\delta}$:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{\delta} &= a_1 + \frac{1}{\pi} \ln \operatorname{th} \left(\frac{\nu\pi}{4 \sin \alpha_0} \right) - \frac{\cos^2 \alpha_0}{\pi} \ln \left[1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{\nu\pi}{4 \sin \alpha_0} \right) \right] + \frac{1}{2} \nu \operatorname{ctg} \alpha_0, \\ \frac{x_2}{\delta} &= a_2 + \frac{1}{\pi} \ln \operatorname{th} \left(\frac{\nu\pi}{4 \sin \alpha_0} \right) - \frac{\cos^2 \alpha_0}{\pi} \ln \left[1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{\nu\pi}{4 \sin \alpha_0} \right) \right] - \frac{1}{2} \nu \operatorname{ctg} \alpha_0, \end{aligned} \quad (21)$$

причем, как указывалось прежде, $a_1 = a_2$.

Эти соотношения определяют на линиях тока λ_1 и λ_2 такие точки, что если через них провести пересекающие струю прямые, перпендикулярные скорости набегающей струи на бесконечности, то ширина струи в полученных таким образом сечениях будет отличаться от ширины струи в выходном сечении насадки на наперед заданную величину ν . Так как начало осей координат O находится в нулевой критической точке и ось Ox направлена по потоку параллельно скорости набегающей струи в ее невозмущенной части, то расстояние каждого из указанных сечений струи от нулевой критической точки будет определять положение выходного сечения насадки по отношению к препятствию и его расстояние от последнего. Из этих двух расстояний $\frac{|x_1|}{\delta}$ и $\frac{|x_2|}{\delta}$, определяемых соответственно тому, следуем ли мы при их вычислении вдоль линии тока λ_1 или вдоль линии тока λ_2 , за наиболее выгодное должно быть взято наименьшее из них, а именно, $\frac{|x_1|}{\delta}$.

Легко, однако, показать, что при малых значениях ν различие в этих расстояниях совершенно несущественно для углов наклона α_0 , лежащих в довольно широких пределах.

Действительно, из формул (21) следует, что

$$\frac{x_1}{\delta} - \frac{x_2}{\delta} = \nu \operatorname{ctg} \alpha_0. \quad (22)$$

Если наиболее выгодное расстояние мы будем определять из условия, что $\nu = 0,01$, т. е. считать за наиболее выгодное то расстояние, на котором ширина струи отличается от ширины насадки δ всего лишь на 1%, то, как это следует из (22), $\frac{x_1}{\delta}$ будет отличаться от $\frac{x_2}{\delta}$ на 1% для всех углов α_0 , лежащих в пределах:

$$35^\circ \leq \alpha_0 \leq 90^\circ.$$

Для этих углов α_0 — наивыгоднейшее расстояние насадки до препятствия — мы можем определять с точностью до 1% по упрощенной формуле

$$|x| = \delta \left| a_1 + \frac{1}{\pi} \ln \operatorname{th} \left(\frac{\nu\pi}{4 \sin \alpha_0} \right) \right|.$$

При $\alpha_0 < 35^\circ$ наивыгоднейшее расстояние следует находить по первой формуле (21). Вычисления по этой формуле при $\nu = 0,01$ дают для наивыгоднейшего расстояния, в зависимости от α_0 , следующие значения:

$$\begin{aligned} \alpha_0 = & 30^\circ; \quad 45^\circ; \quad 60^\circ; \quad 75^\circ; \quad 90^\circ; \\ \frac{|x_1|}{\delta} = & 1,06; \quad 1,43; \quad 1,73; \quad 1,99; \quad 2,05. \end{aligned}$$

При $\alpha_0 = 0$ все предыдущие формулы теряют смысл, что объясняется невыполнением одного из основных условий построения потока: требования, чтобы его нулевая критическая точка находилась в конечной части плоскости течения. Но в этом случае картина течения совершенно очевидна: линии тока будут прямыми, параллельные плоскости препятствия, а ширина струи всюду равна ширине насадки в ее выходном сечении.

Для того чтобы внести в задачу о наивыгоднейшем расстоянии полную определенность, необходимо еще указать способ нахождения нулевой критической точки потока, с положением которой на препятствии связано определение наивыгоднейшего расстояния.

Следует иметь в виду, что при фиксированном, неизменном положении насадки в плоскости течения нулевая критическая точка будет перемещаться вдоль препятствия с изменением угла наклона последнего к направлению скорости набегающей струи. С уменьшением угла α_0 нулевая критическая точка будет смещаться относительно неподвижной насадки в сторону меньших расходов струи, т. е. влево от линии тока $\psi = 0$.

Так как нулевая критическая точка потока есть точка на препятствии, в которую упирается нулевая линия тока, то для ее нахождения следует воспользоваться общим уравнением линий тока (7).

Подставляя в это уравнение

$$\zeta = r e^{i\alpha_0}, \quad 0 \leq r \leq 1$$

и разделяя в нем действительную и мнимую части, найдем координаты x и y нулевой линии тока. Формулы для определения x и y нетрудно вычислить. Не приводя этих вычислений, мы ограничимся указанием, что они будут иметь вид:

$$\frac{x}{\delta} = f_1(r, \alpha_0), \quad \frac{y}{\delta} = f_2(r, \alpha_0),$$

если принять во внимание уравнение (9) и формулу расхода $Q = v_0 \delta$. Задавая α_0 и строя по этим формулам нулевую линию тока, мы найдем на препятствии положение нулевой критической точки, а следовательно, и наивыгоднейшее расстояние насадки от препятствия.

ЛИТЕРАТУРА

1. C i s o t t i. Idromeccanica piana, parte seconda, p. 147, pag. 302, Milano, 1922.
2. S c h a c h. Ing.-Archiv, B. V, H. 4, S. 245—265, 1934.
3. D. B e r n o u l l i Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, Bd. 8, S. 109, 112, 124, Petersburg, 1736.
4. В. И. Поликовский и М. Я. Гембаржевский. К вопросу о выходе воздуха из воздухопровода при наличии плоской стенки у выходного сечения. Труды ЦАГИ, вып. 211, 1935.
5. R e i c h. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens (VDI), H. 290, 1926.
6. Ф. Форгеймер. Гидравлика, ОНТИ, Москва, стр. 506, 1935.