Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6—1950

А. С. ПРЕДВОДИТЕЛЕВ

ТЕОРЕМА КЛАУЗИУСА О СРЕДНЕМ ЭРГАЛЕ И УСТОЙЧИВЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

ВВЕДЕНИЕ

1. Состояние статистической системы, составленной из n материальных точек, определяется в каждый данный момент значениями координат и импульсов. Будем обозначать координаты символом q_i, а импульсы — символом p_i. Кинетическая энергия системы, как известно, есть однородная функция второй степени от скоростей элементов, составляющих статистическую систему. Таким образом, можно написать следующее тождество:

$$2T = \sum \frac{dT}{d\dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i = \sum p_i \dot{q}_i = \sum A_i \dot{q}_i^2. \tag{1}$$

Никто не мешает нам рассматривать правую часть этого равенства как квадрат производной от траектории в неэвклидовом пространстве n измерений, т. е. написать равенство:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum A_i \dot{q}_i^2. \tag{1а}$$

Отсюда для элемента длины в n-мерном пространстве будем иметь выражение:

$$ds^2 = \sum A_i dq_i^2. \tag{1в}$$

С этих позиций состояние статистической системы определяется видом траектории движения системы в n-мерном пространстве.

Движение статистической системы будет устойчивым, если уклонения координат и импульсов, вызванные возмущениями, будут ограничены в своих значениях.

2. Будем обозначать уклонения от невозмущенных координат через x_i, а скорости этих возмущений через $\dot{x}_i$. В этом случае кинетическая энергия возмущенного состояния выразится так:

$$2T = \dot{s}^2 = \sum B_i \dot{x}_i^2. \tag{2}$$

Если силы, действующие на материальные точки системы, имеют силовую функцию, то в возмущенном состоянии системы эту функцию можно представить так:

$$U = f(s, x_i). \tag{3}$$

Действие по Гамильтону — Якоби, применительно к данному случаю, мы можем записать так:

$$V = \int_{s_0}^{s} ds \sqrt{2(f + E + \varepsilon)\left[1 + \sum B_i \left(\frac{dx}{ds}\right)^2\right]}. \tag{4}$$

Здесь через $E + \varepsilon$ обозначена полная энергия системы в возмущенном состоянии. Из указанного обозначения явствует, что E есть полная энергия невозмущенного движения, а ε есть прибавка к ней, появившаяся вследствие возмущения.

3. Будем считать, что величины x_i, $\frac{dx_i}{ds}$ и ε настолько малы, что можно ограничиться их степенями не выше второй. В этом случае действие, выраженное формулой (4), можно преобразовать к следующему виду путем разложения подинтегрального количества в строку Тейлора:

$$\delta V = \delta \int_0^{\tau} d\tau \left[\sum \frac{1}{2}\left(\frac{du_i}{d\tau}\right)^2 - \sum \alpha_{ii}\frac{u_i^2}{2} - \sum \alpha_{ij}u_i u_j + \sum \varepsilon\beta_i u_i\right] =$$

$$= \delta \int_0^{\tau} d\tau \left[T - F + \sum \varepsilon\beta_i u_i\right]. \tag{4a}$$

Здесь введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \int_{s_1}^{s} \sqrt{2(f+E)} \cdot ds \\ u_i &= x_i \sqrt{2B_i(f+E)}. \end{aligned}\right\} \tag{4b}$$

Количества α_{ii}, α_{ij} и β_i определяются следующими выражениями:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{ii} &= -\frac{\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2B_i(f+E)}}\dfrac{\partial\sqrt{2(f+E)}}{\partial x_i}\right]}{\sqrt{2B_i(f+E)}\cdot\sqrt{2(f+E)}} \\ \alpha_{ij} &= -\frac{1}{\sqrt{2B_i(f+E)}\sqrt{2B_j(f+E)}} \cdot \frac{\partial^2\sqrt{2(f+E)}}{\partial x_i\,\partial x_j} \\ \beta_i &= \frac{1}{\sqrt{2(f+E)}\sqrt{2B_i(f+E)}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{\sqrt{2(f+E)}}. \end{aligned}\right\} \tag{4c}$$

Вариация в выражении (4a) взята для того, чтобы не писать членов, исчезающих при варьировании.

Подробности изложенных преобразований можно найти в монографии Н. Е. Жуковского «О прочности движения», а также в нашей статье «Об одном видоизменении диференциальных уравнений Н. Е. Жуковского для возмущенных движений статистических систем».

1. О СТАЦИОНАРНЫХ (УСТОЙЧИВЫХ) СТАТИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

1. Во всех теоремах динамики системы материальных точек, в которых постулируется существование потенциала сил, как-то в уравнении живых сил, начале наименьшего действия, начале Гамильтона, этот потенциал

считается неизменной функцией одних только координат точек во все время движения системы.

Но если потенциал сил, определенный таким образом, довольно совершенно выражает закон зависимости взаимных сил от окончательных положений движущихся точек, то это совершенно не будет иметь места в случае, когда мы захотим знать, как взаимодействуют точки нашей системы с точками, ей не принадлежащими. Другими словами, данное определение потенциала сил не может решить задачи о нахождении действия внешних сил. Внешние силы изменяются не только от изменения положения материальных точек рассматриваемой системы, но и от движения внешних тел. Для того чтобы учесть действие внутренних и внешних сил, Клаузиус предложил считать потенциал статистической системы U зависящим от координат материальных точек и от ряда параметров c_i, которые остаются неизменными, пока не варьируется состояние статистической системы. Такое обобщенное понимание потенциала сил позволяет расширить класс статистических систем и включить в них тепловые системы.

2. Как мы видели выше, всякое движение статистической системы можно характеризовать следующими количествами:

$$F = \sum \alpha_{ij} u_i u_j + \frac{1}{2} \sum \alpha_{ii} u_i^2$$

$$T = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{du_i}{d\tau} \right)^2,$$

причем, если квадратичная форма F положительна, то движение статистической системы устойчиво (теорема Н. Е. Жуковского).

В силу того обстоятельства, что потенциал сил U зависит от ряда параметров c_i, количества F и T также будут зависеть от этих параметров. При неизменном их значении устойчивая статистическая система, ставшая на какой-либо путь, будет длительно совершать свое движение согласно законам механики.

Перевести систему из одного устойчивого состояния в другое—это значит изменить значения параметров c_i.

3. Обозначим через L выражение $T - F + \Sigma\, \varepsilon\, \beta_i\, u_i$.

Тогда уравнения возмущенного движения можно записать в следующем виде:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{du_i}{d\tau} \right)} \right] = \frac{\partial L}{\partial u_i}. \qquad (5)$$

При положительном значении квадратичной формы F интегралы уравнений возмущенных движений, как показал Н. Е. Жуковский, будут иметь ограниченное значение. Другими словами, количества u_i с течением переменной τ будут повторяться в своих значениях. Однако эти повторения, вообще говоря, могут не иметь строго периодического характера.

4. Может показаться, что все последние наши рассуждения справедливы лишь для консервативных возмущений, т. е. тогда, когда количество ε равно нулю. Однако это не так; они останутся в силе и для случая неконсервативных возмущений. Это явствует из того, что для любого из уравнений возмущенного движения (5) всегда можно подыскать такое частное решение, с помощью которого легко исключить из уравнения члены, создающие количество $\varepsilon\beta_i$. В правильности этого утверждения можно убедиться, если написать уравнения возмущенного движения в развернутом виде.

5. Повторимость значений количеств u_i для устойчивых статистических систем дает нам возможность ввести в обращение понятие о среднем периоде изменения их с течением переменной τ. Выберем значение промежутка от 0 до τ_0 достаточно большим. Пусть количество u_i за этот промежуток имеет φ_i повторений; тогда, очевидно, средний период для этого количества будет равен:

$$i_i = \frac{\tau_0}{\varphi_i} \quad \text{или} \quad \tau_0 = i_i \varphi_i.$$

Мы с полным правом можем считать средний период i_i для количества u_i, характеризующего возмущенное состояние статистической системы, величиной постоянной. Поэтому при изменении промежутка τ_0 будет соответственно меняться и число φ_i. Это обстоятельство позволяет вообще установить такое равенство:

$$\tau = i_i \varphi_i = i_j \varphi_j = i_k \varphi_k = \text{и т. д.} \tag{6}$$

Переменное значение величины φ, согласно Клаузиусу, можно назвать фазой изменения количеств u_i, u_j, u_k и т. д.

Понятие фазы в дальнейшем будет играть очень существенную роль.

2. О ВАРЬИРОВАНИИ ПО КЛАУЗИУСУ

1. Во всех механических задачах, где употребляется варьирование, сравниваются при заданных условиях два возможных бесконечно разнящихся движения системы. При этом вариацией какой-либо величины, определяющей состояние системы, называют разность между соответственными значениями ее в двух движениях. Само определение понятия соответственности всегда должно быть исследовано предварительно, если оно не очевидно из поставленной задачи.

В принципе Гамильтона, при неизменности потенциальной функции и возможности варьирования энергии, за соответственные значения принимают такие величины, которые отвечают моменту t в начальном движении и моменту $t+\delta t$ в варьированном движении. Если через τ_0 обозначить действие по начальной траектории, а через τ — соответственное действие по траектории варьированной, то, согласно принципу Гамильтона, разность между соответственными значениями действия будет выражаться равенством:

$$\tau - \tau_0 = P\delta s \cos(P, \delta s). \tag{7}$$

Здесь через P обозначен равнодействующий импульс на варьированной траектории. Он получается как частное производное от кинетической энергии по полной скорости движения системы.

Величина δs обозначает линейный отрезок, соединяющий две соответственные точки на начальной и варьированной траекториях.

Для того чтобы уравнения движения системы следовали непосредственно из интеграла Гамильтона, мы обязаны формулировать его принцип так, чтобы соотношение (1) обращалось в нуль, т. е. соответственные значения действия были равны.

Принцип Остроградского отличается от принципа Гамильтона тем, что при варьировании интеграла Остроградского соответственными значениями считаются значения, отвечающие одному и тому же моменту времени t. Формула (1) остается в силе и в этом случае.

2. Определения соответственности, которые приняты в началах Гамильтона и Остроградского, не могут быть использованы в ряде случаев.

Клаузиус показал, что движение стационарных статистических систем несовместимо со способом варьирования, принятым в началах Гамильтона и Остроградского.

Клаузиус рассуждает так: «Если стационарное движение должно быть определено, как таковое, то дело не в том, чтобы указать для отдельных мгновений положения и скорости всех отдельных точек, а по существу в том, чтобы изобразить общий, не зависящий от времени, характер этого движения. Уравнение, которое должно служить этой цели, может, конечно, содержать переменные члены, но эта переменность их должна ограничиться такими колебаниями, которые повторяются, не изменяя своего характера так, чтобы уравнение в позднейшее время выражало то же самое, что и предшествующее. Если же в таком уравнении встречаются члены, которые со временем испытывают все большие и большие изменения, то уравнение может в разные времена выражать различие и это обстоятельство делает тогда уравнение непригодным к нашим целям».

Но и в более простых случаях, когда в стационарном движении все точки системы описывают замкнутые траектории с различными периодами обращения, способы варьирования по Гамильтону и Остроградскому не могут быть использованы, а следовательно, невозможно изучить движение таких систем с точки зрения вариационных принципов механики.

Если считать соответственными одновременные положения точки на начальной и варьированных траекториях, то легко убедиться в том, что одновременные положения, в силу различия периодов, будут с течением времени удаляться друг от друга, а те величины в уравнениях вариации, которые зависят от положения точек, будут неограниченно возрастать.

Положение дела не изменится, если даже и не полагать $\delta t=0$. В этом случае Клаузиус рассуждает так: «Безусловно, можно выбрать количество δt при вариации периода обращения какой-нибудь из точек системы так, чтобы те величины, которые зависят только от положения этой точки, претерпевали бы лишь периодические изменения. Но для остальных переменных, зависящих от положения других точек, периоды обращения которых изменились в другой пропорции, этого сделать нельзя, так как появятся вариации, все увеличивающиеся со временем. Это неудобство делает невозможными наши исследования».

3. С целью избежания указанного неудобства Клаузиус предлагает выбирать соответственные точки по другому признаку. Во всякой механической системе для двух сравниваемых ее движений можно выбрать такие положения точки и такие моменты времени, для которых некоторая варьирующаяся и особая для каждой точки функция времени принимает одинаковые значения. Эту функцию времени $\varphi=F(t)$ Клаузиус назвал фазой в самом общем смысле. Определяя из этой функции время, будем иметь в первоначальном движении:

$$t=f(\varphi),$$

в варьированном движении:

$$t^*=f(\varphi)+\varepsilon f_1(\varphi).$$

Здесь ε есть бесконечно-малая величина, а новая функция $f_1(\varphi)$ есть первая производная от функции $f(\varphi)$ по параметру, приращением которого служит ε.

Если в обоих выражениях поременное φ имеет одно и то же значение, то времена t и t^* считаются по Клаузиусу соответственными.

Соответственным временам t и t^* будут отвечать соответственные значения Z и Z^* какой-нибудь из величин Z, определяющих положение точки, фаза которой есть φ.

Вариации, при которых φ не варьируется, Клаузиус предложил обозначать через δ_φ.

Так, например, будем иметь:

$$t^* - t = \delta_\varphi t$$

$$Z^* - Z = \delta_\varphi Z.$$

4. Пусть в первоначальном движении имеем:

$$Z = F(t).$$

Тогда в измененном движении соответственно получим:

$$Z^* = F(t^*) + \varepsilon F_1(t^*).$$

Здесь t и t^* обозначают соответственные времена.

Если мы хотим получить вариацию $\delta_t Z$, то мы должны положить $t^* = t$ и вычесть из второго равенства первое, что приведет к выражению:

$$\delta_t Z = \varepsilon F_1(t).$$

Но если мы хотим получить вариацию $\delta_\varphi Z$, то должны положить:

$$t^* = t + \delta_\varphi t.$$

Следовательно, будем иметь:

$$\delta_\varphi Z = Z^*_\varphi - Z = F(t + \delta_\varphi t) + \varepsilon F_1(t + \delta_\varphi t) - F(t) \ldots$$

Разложим функции $F(t + \delta_\varphi t)$ и $F_1(t + \delta_\varphi t)$ в строку Тейлора, в результате получим:

$$F(t + \delta_\varphi t) = F(t) + \delta_\varphi t \frac{dF(t)}{dt}$$

$$F_1(t + \delta_\varphi t) = F_1(t) + \delta_\varphi t \frac{dF_1(t)}{dt}.$$

Теперь для вариации $\delta_\varphi Z$ можно написать выражение:

$$\delta_\varphi Z = \frac{dF(t)}{dt} \cdot \delta_\varphi t + \varepsilon F_1(t) + \frac{dF_1(t)}{dt} \cdot \varepsilon \delta_\varphi t.$$

Или, ограничиваясь бесконечно-малыми первого порядка, получим:

$$\delta_\varphi Z = \varepsilon F_1(t) + \frac{dF(t)}{dt} \delta_\varphi t,$$

или

$$\delta_\varphi Z = \delta_t Z + \dot{Z} \delta_\varphi t. \tag{8}$$

Таким образом, мы получили общую зависимость между символами δ_φ и δ_t.

3. ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ЭРГАЛЕ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ

1. В уравнениях возмущенного движения роль времени выполняет действие, взятое по невозмущенной траектории. Таким образом, если бы мы захотели перейти от одного возмущенного состояния статистической системы к другому, то должны были бы произвести вариацию по Клаузиусу и действие τ рассматривать как некоторую функцию фазы, по которой устанавливается соответствие между двумя бесконечно-близкими движениями статистической системы, находящимися в состоянии возмущения.

В первом параграфе было указано, какую зависимость τ от фазы φ следует принять во внимание при таком варьировании.

2. Будем обозначать через p_i производные $\frac{du_i}{d\tau}$. Возьмем произведение $p_i\delta_\tau u_i$ и продиференцируем его по τ; получим:

$$\frac{d}{d\tau}(p_i\delta_\tau u_i) = p_i\frac{d\delta_\tau u_i}{d\tau} + \frac{dp_i}{d\tau}\delta_\tau u_i = p_i\delta_\tau\left(\frac{du_i}{d\tau}\right) + \frac{dp_i}{d\tau}\delta_t u_i = p_i\delta_\tau p_i + \frac{dp_i}{dt}\delta_\tau u_i.$$

Но справедливы равенства:

$$p_i = \frac{dT}{dp_i}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial u_i} + \varepsilon\beta_i = -\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}.$$

Они следуют из уравнения (5).

Теперь мы можем написать следующее соотношение:

$$\frac{d}{d\tau}(p_i\delta_\tau u_i) = \frac{\partial T}{\partial p_i}\delta_\tau p_i - \frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\delta_\tau u_i.$$

Суммируя все подобные уравнения для n переменных, получим:

$$\frac{d}{d\tau}\sum(p_i\delta_\tau u_i) = \sum\frac{\partial T}{\partial p_i}\delta_\tau p_i - \sum\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\delta_\tau u_i. \tag{9}$$

Так как T зависит от p_i и c_i, то будем иметь:

$$\delta_\tau T = \sum\frac{\partial T}{\partial p_i}\delta_t p_i + \sum\frac{\partial T}{\partial c_i}\delta c_i. \tag{9a}$$

Параметры c_i не зависят от τ, т. е. они не изменяются в течение одного и того же движения, а варьируются лишь при переходах от одного движения к другому. Поэтому не имеет смысла делать различия между вариациями $\delta_\tau c$ и $\delta_\varphi c$, что и принято во внимание в соотношении (9a).

Функция Φ зависит от переменных u_l и параметров c_i, поэтому можно положить:

$$\delta_\tau\Phi = \sum\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\delta_\tau u_i + \sum\frac{\partial\Phi}{\partial c_i}\delta c_i. \tag{9b}$$

С помощью соотношений (9a) и (9b) равенство (9) мы можем переписать так:

$$\frac{d}{d\tau}\sum(p_i\delta_\tau u_i) = \delta_\tau T - \sum\frac{\partial T}{\partial c_i}\delta c_i - \delta_\tau\Phi + \sum\frac{\partial\Phi}{\partial c_i}\delta c_i.$$

или

$$\frac{d}{d\tau}\sum(p_i\delta_\tau u_i) = \delta_\tau L - \sum\frac{\partial L}{\partial c_i}\delta c_i. \tag{10}$$

Умножим это уравнение на $d\tau$; отинтегрируем его в пределах от 0 до τ и разделим на τ, тогда получим:

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \frac{d}{d\tau}(p_i\delta_\tau u_i)\,d\tau = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau d\tau\delta_\tau L - \sum\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \frac{dL}{\partial c_i}\,\delta c_i\,d\tau$$

или

$$\frac{\sum[p_i\delta_\tau u_i]_\tau - \sum[p_i\delta_\tau u_i]_0}{\tau} = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau d\tau\delta_\tau L - \sum\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \frac{\partial L}{\partial c_i}\,\delta c_i\,d\tau. \qquad (10a)$$

3. Согласно формуле (8) для вариации $\delta_\tau u_i$ можно написать следующее соотношение:

$$\delta_\tau u_i = \delta_\varphi u_i - p_i\delta_\varphi\tau.$$

Но в нашем случае действует соотношение (6), поэтому имеем для вариации $\gamma_\varphi\tau$ равенство следующего вида:

$$\delta_\varphi\tau = \varphi\delta i_i = \tau\frac{\delta i_i}{i} = \tau\delta\lg i_i.$$

Теперь вариацию $\delta_\tau u_i$ можно представить так:

$$\delta_\tau u_i = \delta_\varphi u_i - p_i\tau\delta\lg i_i.$$

Вставим это соотношение в равенство (10a), получим:

$$\frac{\sum[p_i\delta_\varphi u_i]_\tau}{\tau} - \frac{\sum[p_i^2\tau\delta\lg i_i]_\tau}{\tau} - \frac{\sum[p_i\delta_\varphi u_i]_0}{\tau} +$$

$$+\frac{\sum[p_i^2\tau\delta\lg i_i]}{\tau} = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \delta_\tau L\,d\tau - \sum\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \frac{\partial L}{\partial c_i}\,\delta c_i\,d\tau. \qquad (10b)$$

Полученное соотношение справедливо для любого значения τ, а последнее слагаемое левой части всегда будет равно нулю. Итак имеем:

$$\frac{\sum[p_i\delta_\varphi u_i]_\tau - \sum[p_i\delta_\varphi u_i]_0}{\tau} - \sum[p_i^2\delta\lg i_i] =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \delta_\tau L\,d\tau - \sum\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \frac{\partial L}{\partial c_i}\,\delta c_i\,d\tau. \qquad (10c)$$

Так как переменные p_i и u_i по условиям задачи имеют всегда конечное значение и с течением действия τ повторяются, то числитель первого слагаемого левой части уравнения (10c) есть малая величина, принимающая и положительные и отрицательные значения в зависимости от выбора τ. В силу этого обстоятельства среднее значение этой величины без ущерба для точности мы можем принять равным нулю. Поэтому имеем:

$$\overline{-\sum[p_i^2\delta\lg i_i]} = \overline{\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \delta_\tau L\,d\tau} - \overline{\sum\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \frac{dL}{\partial c_i}\,\delta c_i\,d\tau}. \qquad (11)$$

Или, так как варьирование совершается при τ постоянном, то предыдущее равенство можно переписать так:

$$-\overline{\sum [p_i^2\delta \lg i_i]} = \delta_\tau \overline{\frac{1}{\tau}\int_0^\tau L\,d\tau} - \overline{\sum \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\partial L}{\partial c_i}\delta c_i\,d\tau}. \tag{11a}$$

4. Равенство (11a) мы имеем полное право переписать в следующем виде:

$$-\overline{\sum [p_i^2\delta \lg i_i]} = \delta_\tau \overline{L} - \sum \overline{\frac{\partial L}{\partial c_i}\,\delta c_i}. \tag{11b}$$

Законность этого написания вытекает из следующих соображений: количество

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau L\,d\tau$$

есть функция τ, которая по мере возрастания τ все меньше и меньше уклоняется от среднего значения, т. е. от $\overline{L}$. Однако этого совершенно нельзя сказать относительно вариации от этого количества. Как мы видели выше, вариации от величин, совершающих даже правильные колебания, могут неограниченно возрастать. Следовательно, вариации даже от таких величин, колебания которых уменьшаются с течением действия τ, могут вовсе не уменьшаться. Нельзя поэтому без всяких оговорок заменить количество

$$\delta_\tau \frac{1}{\tau}\int_0^\tau L\,d\tau \tag{11c}$$

количеством следующего вида:

$$\delta_\tau \overline{L}.$$

Но в нашем случае мы имеем дело не с величиной, изображенной формулой (11c), а с величиной, которая изображается формулой:

$$\overline{\delta_\tau \frac{1}{\tau}\int_0^\tau L\,d\tau},$$

и это обстоятельство позволяет произвести указанную замену.

Такие же рассуждения можно повторить относительно второго слагаемого уравнения (11a).

Полученное уравнение (11b) по существу и есть аналог теоремы Клаузиуса о среднем эргале в области устойчивых движений статистических систем.

5. Найденной теореме можно придать несколько иную форму. В самом деле, имеем:

$$2\overline{T} = \sum \overline{p_i^2} \quad \text{и} \quad 2\delta\overline{T} = \delta \sum \overline{p_i^2}.$$

Вычитая последнее равенство из равенства (11b), получим:

$$\delta_\tau(\overline{L} - 2\overline{T}) - \sum \overline{\frac{\partial L}{\partial c_i}\delta c_i} = -\sum [\overline{\delta p_i^2} + \overline{p_i^2\delta \lg i_i}].$$

Но, так как справедливо тождество

$$\sum [\overline{\delta p_i^2} + \overline{p_i^2 \delta \lg i_i}] = \sum \overline{p_i^2 \delta \lg (i_i p_i^2)},$$

то будем иметь:

$$\delta_\tau (\overline{L} - 2\overline{T}) - \sum \overline{\frac{\partial L}{\partial c_i}\,\delta c_i} = - \sum \overline{p_i^2} \delta_\tau \lg \overline{(i_i p_i^2)}. \qquad (12)$$

6. По смыслу вариаций в уравнениях (11b) и (12), каждое их этих уравнений мы можем написать в разложенном по частным производным виде. Так, например, уравнение (11b) можно представить так:

$$\sum \frac{\partial \overline{L}}{\partial i} \delta i + \sum \frac{\partial \overline{L}}{\partial c_i} \delta c_i - \sum \frac{\partial \overline{L}}{\partial c_i} \delta c_i = - \sum p_i^2 \frac{\delta_i}{i}.$$

Если мы предположим, что вариации существуют независимо одна от другой, то из полученного равенства должны следовать соотношения вида:

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial i} \delta i = - \overline{p_i^2} \frac{\delta i}{i}$$

или

$$\frac{\partial \overline{L}}{\partial i} i = - \overline{p_i^2}. \qquad (13)$$

Этих уравнений должно быть столько, сколько переменных определяет конфигурационное состояние статистической системы. Суммируя их, получим:

$$\sum \frac{\partial \overline{L}}{\partial i} i = - \sum \overline{p_i^2} = - 2\overline{T}. \qquad (13a)$$

Последнее равенство является аналогом теоремы Клаузиуса о вириале в теории возмущенных движений.

Поступила в редакцию
7.9.1949 г.

Лаборатория
молекулярных и тепловых явлений