ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 8—1950

МАТЕМАТИКА

Д. Е. МЕНЬШОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИЗ ТЕОРИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ[1]

Когда было дано определение интеграла Лебега, то естественно возникла задача изучения свойств рядов Фурье — Лебега, т. е. таких рядов Фурье, коэффициенты которых являются интегралами в смысле Лебега.

При этом в первую очередь стали изучать такие свойства рядов Фурье-Лебега, которые выполняются почти всюду, т. е. всюду за исключением, быть может, множества меры нуль.

Таким образом, возникла задача о сходимости почти всюду рядов Фурье—Лебега и об их суммируемости различными методами. Эта же задача была поставлена для тригонометрических рядов наиболее общего вида.

Рассмотрим сначала ряды Фурье-Лебега. Для таких рядов была доказана следующая теорема.

Любой ряд Фурье от суммируемой функции $f(x)$ суммируется к этой функции методом средних арифметических почти всюду.

Тогда возник вопрос о сходимости почти всюду рядов Фурье — Лебега. На этот вопрос А. Н. Колмогоров дал отрицательный ответ. Он определил суммируемую функцию, ряд Фурье которой расходится почти всюду [1].

Этот результат был в дальнейшем усилен в двух направлениях.

Во-первых, А. Н. Колмогоров дал пример такой суммируемой функции, ряд Фурье которой расходится всюду [2].

Во-вторых, Марцинкевич дал пример ряда Фурье — Лебега, который расходится почти всюду и пределы неопределенности которого конечны почти всюду [3].

При этом пределами неопределенности данного ряда мы называем

$$\limsup_{n\to\infty} S_n(x) \quad \text{и} \quad \liminf_{n\to\infty} S_n(x),$$

где $S_n(x)$ — частные суммы рассматриваемого ряда.

Этот результат дает отрицательный ответ на гипотезу, которая вначале казалась вероятной. Эта гипотеза состоит в следующем:

Если пределы неопределенности тригонометрического ряда конечны в каждой точке некоторого множества E положительной меры, то ряд

[1] Доклад на «Ломоносовских чтениях» 1950 г.

сходится почти всюду на этом множестве. Ясно, что результат Марцинкевича опровергает эту гипотезу.

После того, как был построен расходящийся ряд Фурье от суммируемой функции, возник вопрос о сходимости рядов Фурье от измеримых функций с суммируемым квадратом. Этот вопрос был поставлен Н. Н. Лузиным в его диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд» еще до того, как А. Н. Колмогоров построил расходящийся почти всюду ряд Фурье — Лебега. Однако до настоящего времени вопрос, поставленный Н. Н. Лузиным, остается открытым.

Таким образом, неизвестно, существует ли тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{1}$$

который расходится на множестве положительной меры и для которого сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2). \tag{2}$$

Однако А. Н. Колмогоровым, Г. А. Селиверстовым и А. И. Плеснером была доказана следующая теорема:

Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lg n\cdot(a_n^2+b_n^2),$$

то тригонометрический ряд (1) сходится почти всюду [4], [5].

Вопрос о сходимости почти всюду рядов Фурье не решен не только для функций с суммируемым квадратом, но даже для непрерывных функций.

В связи с этим можно поставить задачу об улучшении сходимости ряда Фурье от непрерывной функции путем изменения этой функции на множестве сколь угодно малой меры. В этом направлении можно доказать следующую теорему:

Любую непрерывную функцию $f(x)$ можно изменить на множестве e сколь угодно малой меры таким образом, чтобы для полученной новой функции ряд Фурье сходился равномерно на всей оси x [6].

В этой теореме множество e, на котором происходит изменение функции $f(x)$, зависит, вообще говоря, от этой функции. Однако предыдущую теорему можно несколько усилить, а именно, множество e, которое входит в формулировку предыдущей теоремы, можно считать зависящим только от величины его меры и от модуля непрерывности функции $f(x)$, но не зависящим от других свойств этой функции.

Это утверждение является непосредственным следствием теоремы:

Для любой положительной невозрастающей функции $\rho(\delta)$ положительного аргумента δ, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{\delta\to+0}\rho(\delta)=0$, и для любого положительного числа ε существует измеримое множество e, обладающее свойствами:

а) $\operatorname{mes} e<\varepsilon$, $e\subset[-\pi, \pi]$;

б) любую функцию $f(x)$, непрерывную на сегменте $[-\pi, \pi]$, модуль непрерывности которой не превосходит $\rho(\delta)$ при любом $\delta>0$, можно изменить на множестве e таким образом, чтобы для полученной новой функции ряд Фурье сходился равномерно на $[-\pi, \pi]$ [7].

Однако в предыдущей теореме множество e, на котором происходит изменение функции $f(x)$, зависит, вообще говоря, от модуля непрерывности этой функции.

Тогда возникает вопрос о дальнейшем усилении предыдущей теоремы, а именно: можно ли множество e считать зависящим только от положительного числа ε, но не зависящим от модуля непрерывности функции $f(x)$?

Иначе говоря, если задано произвольное положительное число ε, то нельзя ли подобрать множество e, зависящее только от ε и удовлетворяющее неравенству $\operatorname{mes} e < \varepsilon$, которое обладает тем свойством, что любую непрерывную функцию $f(x)$ можно изменить на множестве e таким образом, чтобы для полученной новой функции ряд Фурье сходился равномерно?

На поставленный вопрос получается отрицательный ответ. В самом деле, можно доказать следующее утверждение.

Для любого множества e, лежащего на сегменте $[-\pi, \pi]$, и такого, что $\operatorname{mes} e < 2\pi$, можно определить функцию $f(x)$, непрерывную на $[-\pi, \pi]$ и обладающую свойством: какова бы ни была функция $\psi(x)$, непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$ и совпадающая с $f(x)$ вне множества e, ряд Фурье от функции $\psi(x)$ расходится по крайней мере в одной точке [7].

Ясно, что это утверждение опровергает предыдущую гипотезу. Тогда можно попытаться несколько ослабить эту предыдущую гипотезу, а именно, можно высказать следующее предположение.

Для любого положительного числа ε можно определить множество e, удовлетворяющее неравенству $\operatorname{mes} e < \varepsilon$ и обладающее свойством:

любую непрерывную функцию $f(x)$ можно изменить на множестве e таким образом, что полученная новая функция $\psi(x)$ будет попрежнему непрерывной, причем ряд Фурье от функции $\psi(x)$ сходится почти всюду.

Этот вопрос остается открытым. Однако на него получается положительный ответ, если от измененной функции $\psi(x)$ потребовать только, чтобы она была суммируемой. При этом первоначальную функцию $f(x)$ можно также считать произвольной суммируемой функцией.

Высказанное утверждение получается, как следствие из теоремы:

Какова бы ни была функция $f(x)$, суммируемая на сегменте $[-\pi, \pi]$, и каково бы ни было совершенное, нигде не плотное множество P, расположенное на том же сегменте, всегда можно изменить функцию $f(x)$ вне множества P таким образом, чтобы для полученной новой суммируемой функции $\psi(x)$ ряд Фурье сходился почти всюду на $[-\pi, \pi]$ [7].

Так как дополнение к совершенному, нигде не плотному множеству может иметь сколь угодно малую меру, то ясно, что предыдущее утверждение есть следствие данной теоремы.

Перейдем теперь к рассмотрению тригонометрических рядов общего вида, т. е. таких, которые не являются обязательно рядами Фурье от суммируемых функций. Прежде всего, естественно изучать такие тригонометрические ряды, у которых коэффициенты стремятся к нулю при $n \to \infty$. Тогда возникает вопрос: не будет ли всякий тригонометрический ряд, удовлетворяющий этим условиям, сходиться почти всюду?

На этот вопрос Н. Н. Лузин дал отрицательный ответ. Н. Н. Лузин построил пример тригонометрического ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю при $n \to \infty$, который расходится почти всюду [8].

Впоследствии Штейхауз усилил этот результат, доказав, что существует тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю при $n \to \infty$, который расходится в каждой точке [9].

Изучая тригонометрические ряды общего вида, Н. Н. Лузин высказал целый ряд гипотез. Одна из них состоит в следующем.

Предположим, что данный тригонометрический ряд (1) сходится в каждой точке некоторого множества E положительной меры. Спрашивается: будет ли тогда тригонометрический ряд, сопряженный с данным, сходиться почти всюду на множестве E?

Положительный ответ на этот вопрос был дан А. И. Плеснером, который доказал следующую теорему:

Если тригонометрический ряд (1) суммируется методом Чезаро какого-нибудь порядка $k \geqslant 0$ всюду на множестве E положительной меры, то тригонометрический ряд, сопряженный с данным, будет суммироваться методом Чезаро того же порядка k почти всюду на множестве E [10].

При $k=0$ эта теорема дает положительный ответ на предыдущий вопрос.

Вторая гипотеза, высказанная Н. Н. Лузиным, состоит в следующем;

Пусть дана произвольная измеримая функция $f(x)$, конечная почти всюду. Спрашивается: существует ли тригонометрический ряд, сходящийся к ней почти всюду?

Н. Н. Лузин дал частичное решение этой задачи, доказав следующую теорему:

Для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[-\pi, \pi]$, существует тригонометрический ряд, который почти всюду суммируется к ней методами Римана и Пуассона [11].

В дальнейшем было дано окончательное решение этого вопроса, была выведена следующая теорема:

Для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду на $[-\pi, \pi]$, существует тригонометрический ряд, сходящийся к ней почти всюду [12].

Третья гипотеза, высказанная Н. Н. Лузиным, состоит в следующем:

Можно ли утверждать, что всякий тригонометрический ряд сходится к $+\infty$ самое большее на множестве меры нуль? Этот вопрос остается до сих пор не решенным и, повидимому, представляет большие трудности.

Ю. Б. Гермейер доказал, что любой тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, не может суммироваться методом Римана $k+\infty$ на множестве положительной меры [13]. Таким образом, для метода Римана гипотеза Н. Н. Лузина подтверждается.

С другой стороны, если вместо обычной сходимости взять сходимость по мере, то получается отрицательный ответ на тот же вопрос.

Это утверждение есть непосредственное следствие теоремы.

Для любой измеримой функции $f(x)$, конечной почти всюду или равной $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры, можно определить тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю при $n \to \infty$, который сходится по мере на сегменте $[-\pi, \pi]$ к данной функции $f(x)$ [14].

В частности, если положить в этой теореме $f(x)$ тождественно равной $+\infty$, то получается следующее утверждение:

Существует тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю, при $n \to \infty$, который сходится по мере $k+\infty$ на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Поставим теперь вопрос об определении тригонометрического ряда по заданным пределам неопределенности. Будем обозначать через $S_n(x)$

частные суммы тригонометрического ряда (1). Предположим теперь, что заданы две измеримые функции $F(x)$ и $G(x)$, удовлетворяющие условию $G(x) \leqslant F(x)$ почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Спрашивается: можно ли определить тригонометрический ряд, для которого $F(x) = \limsup\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ и $G(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$? При этом мы не будем предполагать, что $F(x)$ и $G(x)$ конечны почти всюду. В дальнейшем будем называть для краткости $\limsup\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ верхним пределом тригонометрического ряда (1), а $\liminf\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ — нижним.

На поставленный выше вопрос получается положительный ответ, если предположить, что почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ обе функции $F(x)$ и $G(x)$ конечны или же $F(x) = +\infty$, а $G(x) = -\infty$.

В таком случае можно определить тригонометрический ряд (1) с коэффициентами, стремящимися к нулю при $n \to \infty$, для которого $F(x)$ есть верхний предел, а $G(x)$ есть нижний предел, почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$.

Эта теорема является непосредственным следствием одной теоремы о пределах неопределенности рядов Фурье—Лебега, которая формулируется следующим образом:

Пусть задана измеримая функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая условию $\varphi(x) \geqslant 0$ почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ (при этом $\varphi(x)$, может равняться $+\infty$ на множестве положительной меры).

В таком случае можно определить суммируемую функцию $f(x)$, обладающую следующим свойством:

Верхний и нижний пределы ряда Фурье от функции $f(x)$ равны соответственно $f(x) + \varphi(x)$ и $f(x) - \varphi(x)$ почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$.

При этом, если $\varphi(x) = +\infty$, то мы полагаем $f(x) + \varphi(x) = +\infty$ и $f(x) - \varphi(x) = -\infty$.

Предыдущая теорема есть непосредственное следствие этой последней теоремы. В самом деле, пусть заданы две измеримые функции $F(x)$ и $G(x)$ удовлетворяющие условию $G(x) \leqslant F(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$, причем почти всюду на этом сегменте обе функции $F(x)$ и $G(x)$ или одновременно конечны или же $F(x) = +\infty$, $G(x) = -\infty$. Определим две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ следующим образом:

$$\varphi(x) = \frac{F(x) - G(x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{F(x) + G(x)}{2}, \tag{3}$$

если $F(x)$ и $G(x)$ конечны;

$$\varphi(x) = +\infty, \quad \psi(x) = 0, \tag{4}$$

если $F(x) = +\infty$, $G(x) = -\infty$. Тогда $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ измеримы на $[-\pi, \pi]$, причем почти всюду на этом сегменте $\psi(x)$ конечна и $\varphi(x) \geqslant 0$.

В силу предыдущей теоремы для функции $\varphi(x)$ мы можем определить суммируемую функцию $f(x)$, которая обладает следующим свойством:

Если $\sigma_n(x)$ есть n-ая частная сумма ряда Фурье от функции $f(x)$, то

$$\limsup_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x) + \varphi(x), \quad \liminf_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x) - \varphi(x) \tag{5}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Обозначим для краткости через T' ряд Фурье от функции $f(x)$.

Так как $\psi(x) - f(x)$ есть измеримая функция, конечная почти всюду на $[-\pi, \pi]$, то на основании одной из теорем, упомянутых выше, существует тригонометрический ряд T'', сходящийся к $\psi(x) - f(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$. Обозначим через $\tau_n(x)$ n-ую частную сумму ряда T''. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n(x) = \psi(x) - f(x) \tag{6}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Предположим теперь, что тригонометрический ряд (1) есть результат почленного сложения тригонометрических рядов T' и T''. Тогда, обозначая через $S_n(x)$ n-ую частную сумму ряда (1), будем иметь

$$S_n(x) = \sigma_n(x) + \tau_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

откуда, на основании (5) и (6),

$$\limsup_{n\to\infty} S_n(x) = \limsup_{n\to\infty} \sigma_n(x) + \lim_{n\to\infty} \tau_n(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$
$$\liminf_{n\to\infty} S_n(x) = \liminf_{n\to\infty} \sigma_n(x) + \lim_{n\to\infty} \tau_n(x) = -\varphi(x) + \psi(x)$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

В таком случае, принимая во внимание (3) и (4), получаем

$$\limsup_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{F(x) - G(x)}{2} + \frac{F(x) + G(x)}{2} = F(x),$$
$$\liminf_{n\to\infty} S_n(x) = -\frac{F(x) - G(x)}{2} + \frac{F(x) + G(x)}{2} = G(x)$$

почти всюду на том множестве, на котором $F(x)$ и $G(x)$ конечны, и

$$\limsup_{n\to\infty} S_n(x) = +\infty,$$
$$\liminf_{n\to\infty} S_n(x) = -\infty$$

почти всюду на том множестве, на котором $F(x) = +\infty$ и $G(x) = -\infty$. Отсюда следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} S_n(x) = F(x), \quad \liminf_{n\to\infty} S_n(x) + G(x)$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$, т. е. почти всюду на этом сегменте $F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами тригонометрического ряда (1).

Чтобы закончить доказательство теоремы, нам остается показать, что коэффициенты тригонометрического ряда (1) стремятся к нулю при $n \to \infty$. В самом деле, так как тригонометрический ряд T' есть ряд Фурье от суммируемой функции $f(x)$, а тригонометрический ряд T'' сходится почти всюду к конечной функции $\psi(x) - f(x)$, то коэффициенты каждого из рядов T' и T'' стремятся к нулю при $n \to \infty$. А так как тригонометрический ряд (1) есть результат почленного сложения рядов T' и T'', то коэффициенты ряда (1) также стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Тем самым доказательство теоремы закончено.

В заключение рассмотрим свойства пределов подпоследовательностей частных сумм тригонометрического ряда.

Возьмем тригонометрический ряд (1) и будем рассматривать пределы различных подпоследовательностей частных сумм этого ряда, если такие пределы существуют.

Возьмем конечное число функций

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_i(x), \ldots, \psi_p(x),$$

измеримых и определенных почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$. (Функции $\psi_i(x)$ могут принимать, вообще говоря, бесконечные значения на множествах положительной меры). Оказывается, что можно определить тригонометрический ряд с коэффициентами, стремящимися к нулю при $n \to \infty$, у которого с точностью до множеств меры нуль пределы подпоследовательностей частных сумм равны функциям $\psi_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, p$, и только этим функциям.

Иначе говоря, справедлива следующая теорема:

Для любых функций $\psi_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, p$, измеримых и определенных почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$, можно определить тригонометрический ряд (1) с коэффициентами, стремящимися к нулю при $n \to \infty$, который обладает свойствами:

1) для любой из функций $\psi_i(x)$ существует подпоследовательность частных сумм ряда (1), которая сходится к этой функции почти всюду на $[-\pi, \pi]$;

2) если какая-нибудь подпоследовательность частных сумм ряда (1) сходится к функции $\psi(x)$ во всех точках некоторого множества E положительной меры, то $\psi(x)$ равна одной из функций $\psi_i(x)$ почти всюду на E [14].

Можно также доказать следующую теорему:

Пусть заданы две измеримые функции $F(x)$ и $G(x)$, удовлетворяющие неравенству $G(x) \leqslant F(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

В таком случае можно определить тригонометрический ряд (1) с коэффициентами, стремящимися к нулю при $n \to \infty$, который обладает свойствами:

1) для любой измеримой функции $\psi(x)$, удовлетворяющей условию

$$G(x) \leqslant \psi(x) \leqslant F(x) \tag{7}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$, можно определить подпоследовательность частных сумм ряда (1), которая сходится к $\psi(x)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$;

2) если какая-нибудь подпоследовательность частных сумм ряда (1) сходится к функции $\psi(x)$ на некотором множестве E положительной меры, то почти всюду на этом множестве выполняется неравенство (7) [14].

Поступила в редакцию
13.5. 1950 г.

Кафедра
теории функций

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Ряд Фурье, расходящийся почти всюду. Fundamenta Mathematicae, т. 4, стр. 324—328, 1923.

2. Колмогоров А. Ряд Фурье, расходящийся всюду. Comptes Rendus, т. 183, стр. 1327—1328, 1926.

3. Марцинкевич. О рядах Фурье. Fundamenta Mathematicae, т. 27, стр. 38—69, 1936.

4. Колмогоров А. и Селиверстов Г. О сходимости рядов Фурье. Atti Accad. naz. Lincei, т. 3, стр. 307—310, 1926.

5. Плеснер А. О сходимости тригонометрических рядов. Iournal fur die reine und Angewandte Mathematik, т. 155, стр. 15—25, 1925.

6. Меньшов Д. О равномерной сходимости рядов Фурье. Математический сборник, т. 11 (53) стр. 67—96, 1942.
7. Меньшов Д. О рядах Фурье непрерывных и суммируемых функций. ДАН СССР, т. 67, № 5, стр. 787—789, 1949.
8. Лузин Н. Об одном степенном ряде. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, т. 32, стр. 386—390, 1911.
9. Штейнхауз Г. (H. Steinhaus). Тригонометрический ряд, расходящийся всюду. Comptes Rendus de la Soc. Scientifique de Varsovie, стр. 219—229,1912.
10. Плеснер А. О сопряженных тригонометрических рядах. ДАН СССР, т. 4, стр. 235—238, 1935.
11. Лузин Н. Интеграл и тригонометрический ряд. Москва, 1915.
12. Меньшов Д. Об изображении измеримых функций тригонометрическими рядами. Математический сборник, т. 9 (51), стр. 667—692, 1941.
13. Гермейер Ю. О симметрических производных числах. Математический сборник, т. 12 (54), стр. 121—145, 1943.
14. Меньшов Д. О сходимости по мере тригонометрических рядов. ДАН СССР, т. 59, № 5, стр. 849—852, 1948.