Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 9—1950

МАТЕМАТИКА

П. К. РАШЕВСКИЙ

О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ НЕКОММУТАТИВНОЙ АЛГЕБРЫ

Предлагаемый метод относится к сравнительно узкому классу обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с определенными краевыми условиями, но зато он позволяет, в результате алгебраических выкладок по определенной схеме, фактически найти соответствующие собственные значения и собственные функции. Как можно показать, все классические задачи, приводящие к элементарно выражаемым собственным значениям и собственным функциям (например, к полиномам Эрмита, Лягерра, Якоби и т. д.), решаются этим методом. Так как суть дела состоит именно в определенном алгорифме, то лучше всего показать действие этого алгорифма на конкретном примере. Этим мы в настоящем сообщении и ограничимся.

§ 1. КВАЗИКОММУТАТИВНОЕ КОЛЬЦО

Рассмотрим кольцо всевозможных полиномов от двух элементов p, y с комплексными коэффициентами, причем элементы p, y обладают всеми свойствами двух буквенных величин в обычной алгебре, за исключением коммутативности умножения. Это последнее заменяется перестановочным соотношением

$$py - yp = i(1-y^2). \tag{1}$$

Общий вид полинома $P(p, y)$ представляет собой сумму конечного числа одночленов, образованных каждый перемножением многократно взятых элементов p, y (в определенном порядке) и снабженных численным комплексным коэффициентом:

$$P(p, y) = \ldots + \alpha p^2 y\, py^3 + \ldots \tag{2}$$

Для примера выписан один из возможных одночленов; α обозначает комплексный коэффициент.

В кольце полиномов $P(p, y)$ сложение и умножение совершаются по обычным формальным правилам.

Мы будем называть полином $P^*(p, y)$ сопряженным с $P(p, y)$, если P^* получается из P заменой порядка множителей в каждом одночлене на обратный и каждого комплексного коэффициента — на комплексно сопряженный.

Например:

$$P^*(p, y) = \ldots + \alpha^* y^3 p\, y p^2 + \ldots \tag{3}$$

Очевидно, базисные элементы p, y являются самосопряженными. Переход к сопряженному полиному всегда будем обозначать звездочкой. В применении к комплексным числам это будет означать переход к комплексно сопряженному числу.

Рассмотренное кольцо допускает естественное аналитическое истолкование. Рассмотрим линейное пространство аналитических функций $\varphi(y)$, регулярных в интервале $(-1, +1)$. Истолкуем базисные элементы нашего кольца как линейные операторы в пространстве функций $\varphi(y)$:

$$\begin{aligned} &y \text{ — как оператор: } \varphi(y) \to y\,\varphi(y) \\ &p \text{ — как оператор: } \varphi(y) \to i(1-y^2)\cdot\varphi'(y). \end{aligned} \tag{4}$$

Элементарная проверка показывает, что эти операторы удовлетворяют соотношению (1). Кольцо полиномов $P(p, y)$ истолкуется таким образом как кольцо операторов.

§ 2. СОСТОЯНИЯ

Мы будем говорить, что в кольце полиномов $P(p, y)$ определено с о с т о я н и е, если каждому полиному $P(p, y)$ соотнесено определенное (вообще говоря, комплексное число (которое мы б у д е м н а з ы в а т ь его с р е д н и м з н а ч е н и е м и будем обозначать $\overline{P(p, y)}$.

При этом требуется соблюдение следующих условий:

$$\begin{aligned} &\text{I. } \overline{P_1 + P_2} = \overline{P_1} + \overline{P_2}, \\ &\text{II. } \overline{\alpha P} = \alpha \overline{P}, \\ &\text{III. } \overline{1} = 1, \\ &\text{IV. } \overline{P^*} = \overline{P}^*. \end{aligned} \tag{5}$$

Условия I и II означают аддитивный и вообще линейный характер среднего значения; условие III означает, что среднее значение константы равно ей самой, а условие IV — что сопряженным полиномам отвечают комплексно-сопряженные численные значения. Кроме этих тривиальных условий, на выбор средних значений накладывается еще нетривиальное условие:

V. Для любого полинома $Q(p, y)$

$$\overline{QQ^*} \geqslant 0. \tag{6}$$

П р и э т о м в с л у ч а е $\overline{QQ^*} = 0$ п о л и н о м Q н е т о л ь к о с а м и м е е т с р е д н е е з н а ч е н и е 0, н о и, б у д у ч и у м н о ж е н н а л ю б о й п о л и н о м A с п р а в а, с о х р а н я е т э т о с в о й с т в о:

$$\overline{QQ^*} = 0 \to \overline{QA} = 0, \quad (\text{а следовательно, } \quad \overline{A^*Q^*} = 0). \tag{7}$$

Свойство V в некоторых случаях нам нужно будет и в усиленной форме. Пусть $F(y)$ любой полином вещественного переменного y, причем при $-1 < y < +1$ $F(y) \geqslant 0$ (но $F(y) \not\equiv 0$). Тогда мы требуем

$$\text{V}' \quad \overline{Q(p, y)\, F(y)\, Q^*(p, y)} \geqslant 0, \tag{8}$$

причем

$$\overline{Q(p, y)\, F(y)\, Q^*(p, y)} = 0 \to (\overline{QA} = 0, \quad \overline{A^*Q^*} = 0). \tag{9}$$

Термины «состояние» и «среднее значение» заимствованы из квантовой механики, связь с которой в данном пункте очевидна.

Дадим естественное аналитическое истолкование понятию состояния.

Пусть $\varphi(y)$ — аналитическая функция, регулярная в интервале $(-1, +1)$ и обращающаяся в нуль на левом конце за счет множителя $(y+1)^{\rho_1}$, и на правом конце за счет множителя $(1-y)^{\rho_2}$. Здесь ρ_1 и ρ_2 имеют положительные вещественные части, причем после вынесения множителя за скобки в скобках остается в каждом случае функция, регулярная в данном конце.

Указанные свойства функция $\varphi(y)$ сохраняет и при воздействии операторов (4). Истолкуем кольцо полиномов $P(p, y)$ как кольцо операторов и определим в этом кольце состояние, отвечающее функции $\varphi(y)$, следующим образом:

$$\overline{P(p, y)} = \int_{-1}^{+1} \varphi(y)^* \{P(p, y)\, \varphi(y)\} \frac{dy}{1-y^2}. \tag{10}$$

Нетрудно проверить соблюдение всех условий I — V′ для полученного таким образом состояния. При этом, для соблюдения условия III, функцию $\varphi(y)$ следует предварительно пронормировать:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(y)^*\, \varphi(y)}{1-y^2}\, dy = 1. \tag{11}$$

Сходимость выписанных интегралов вытекает из условий обращения $\varphi(y)$ в нуль на концах интервала; *эти условия мы всегда будем предполагать выполненными* в указанной выше форме. Итак, задание $\varphi(y)$ означает задание состояния в кольце полиномов $P(p, y)$.

§ 3. ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

Мы будем рассматривать теперь не любую функцию $\varphi(y)$, а удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$(p^2 - \alpha y^2 - \beta y - \gamma)\, \varphi(y) = 0, \tag{12}$$

которое, пользуясь (4), можно переписать в виде:

$$(1-y^2)\,[(1-y^2)\,\varphi'(y)]' + (\alpha y^2 + \beta y + \gamma)\, \varphi(y) = 0. \tag{13}$$

Коэффициенты α, β, γ предполагаются вещественными. Так как условие обращения $\varphi(y)$ в нуль на концах интеграла $(-1, +1)$ поставлено уже раньше, то теперь мы имеем по существу краевую задачу о собственных значениях: искомая функция $\varphi(y)$ существует не при любом выборе коэффициентов α, β, γ, а лишь при определенных соотношениях между ними.

Наша задача и заключается в отыскании этих соотношений.

Заметим между прочим, что теперь достаточно простого предположения об обращении $\varphi(y)$ в нуль на концах интервала, так как $\varphi(y)$, удовлетворяющая уравнению (13), и не может обращаться в нуль на концах иначе, как вследствие наличия указанных степенных множителей.

Мы будем предполагать, что вещественные коэффициенты α, β, γ подчинены условию

$$\alpha \pm \beta + \gamma < 0, \quad \text{т. е.} \quad \alpha + \gamma < -|\beta|. \tag{14}$$

Действительно, в противном случае нетрудно обнаружить, что $\varphi(y)$ по крайней мере на одном конце интервала $(-1, +1)$ ведет себя (в главной части) как степенная функция с чисто мнимым (или нулевым) показателем, а следовательно, никоим образом не удовлетворяет нашему требованию обращения в нуль; задача заведомо не имеет решения.

Возвращаемся к алгебраической формулировке задачи, а именно, к отысканию состояния (§ 2), отвечающего искомой функции $\varphi(y)$. Мы видим, что теперь к условиям I — V′ добавляется новое условие:

$$\text{VI.} \qquad \overline{P_0 A} = \overline{BP_0} = 0, \tag{15}$$

где

$$P_0 = p^2 - \alpha y^2 - \beta y - \gamma, \tag{16}$$

а A и B — произвольные полиномы от p, y.

В самом деле, для обращения $\overline{BP_0}$ в нуль достаточно, согласно (10), обращения в нуль функции $BP_0\varphi(y)$, а это действительно имеет место, так как, согласно (12) и (16),

$$P_0\varphi(y) = 0,$$

Далее, в силу условия IV (§ 2) вместе с $\overline{BP_0}$ обращается в нуль в $\overline{(BP_0)}$,* т. е. $\overline{P_0 B^*}$, чем полностью проверяется условие (15).

Итак, всякий раз, когда мы имеем решение $\varphi(y)$ краевой задачи (13), мы имеем соответствующее состояние в кольце полиномов, удовлетворяющее условиям (5), (8), (9), 15). Дальнейшее исследование должно алгебраическими средствами выяснить, при каких значениях α, β, γ такое состояние возможно.

§ 4. ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЙ ПРОЦЕСС

Заметим предварительно, что из сделанных предложений следует, что

$$\alpha < 0 \tag{17}$$

Действительно, в силу (15)

$$\overline{P_0} = 0$$

т. е.

$$\overline{p^2 - \alpha y^2 - \beta y - \gamma} = \overline{p^2} + \alpha\,\overline{(1 - y^2)} - \alpha - \beta\overline{y} - \gamma = 0 \tag{18}$$

При этом

$$\overline{p^2} \geqslant 0, \quad \overline{1 - y^2} > 0 \quad \overline{1 - y} > 0, \quad \overline{1 + y} > 0 \tag{19}$$

в силу условий (8) и (9). Из последних двух неравенств следует, что $|\overline{y}| < 1$ так что, принимая во внимание (14), получим

$$-\alpha - \beta\overline{y} - \gamma > 0.$$

Теперь, если предположить $\alpha \geqslant 0$, мы получаем в (18) сумму неотрицательных чисел (из которых последнее положительно), равную нулю. Противоречие показывает, что имеет место (17).

Переходим к перестановочному процессу. Начинаем с разложения квадратичного полинома $P_0(p, y)$ на линейные взаимно сопряженные множители плюс численное (вещественное) слагаемое. Это разложение может быть осуществлено двумя способами, а именно:

$$P_0 = R_{-\frac{1}{2}} S_{-\frac{1}{2}} + \omega_{-\frac{1}{2}} = S_{\frac{1}{2}} R_{\frac{1}{2}} + \omega_{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

Здесь:

$$\left.\begin{aligned} R_{-\frac{1}{2}} &= p - i\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)y - i\,\frac{\beta}{1-2\lambda}, \\ S_{-\frac{1}{2}} &= p + i\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)y + i\,\frac{\beta}{1-2\lambda}, \\ R_{+\frac{1}{2}} &= p - i\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)y + i\,\frac{\beta}{1+2\lambda}, \\ S_{+\frac{1}{2}} &= p + i\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)y - i\,\frac{\beta}{1+2\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

При этом мы обозначили:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{4} - \alpha}, \tag{22}$$

$$\omega_{-\frac{1}{2}} = C - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2}, \tag{23}$$

$$\omega_{\frac{1}{2}} = C - \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2}, \tag{24}$$

где

$$C = -\alpha - \gamma. \tag{25}$$

В дальнейшем мы примем за основные константы λ, β, C взамен α, β, γ.

Условие (14) принимает вид:

$$C > |\beta|. \tag{26}$$

Полином P_0 принимает вид:

$$P_0 = p^2 + \left(\frac{1}{4} - \lambda^2\right)(1 - y^2) - \beta y + C. \tag{27}$$

В последнем из разложений (20) поменяем местами множители $S_{\frac{1}{2}}$, $R_{\frac{1}{2}}$, вследствие чего получим **другой** квадратичный полином, который обозначим P_1:

$$P_1 = R_{\frac{1}{2}} S_{\frac{1}{2}} + \omega_{\frac{1}{2}}.$$

Но этот полином допускает — аналогично P_0 — и второе аналогичное разложение, так что можно дописать:

$$P_1 = R_{\frac{1}{2}} S_{\frac{1}{2}} + \omega_{\frac{1}{2}} = S_{\frac{3}{2}} R_{\frac{3}{2}} + \omega_{\frac{3}{2}}. \tag{28}$$

Через $S_{\frac{3}{2}}$, $R_{\frac{3}{2}}$ мы обозначаем линейные взаимно сопряженные множители второго разложения. Эти множители можно в свою очередь поменять местами, в результате чего мы приходим к новому квадратичному полиному P_2:

$$P_2 = R_{\frac{3}{2}} S_{\frac{3}{2}} + \omega_{\frac{3}{2}}.$$

Этот полином также допускает и второе разложение, в котором снова переставляем множители, получая P_3 и т. д. до бесконечности. Общий член бесконечной последовательности получаемых таким образом полиномов P_k имеет вид:

$$P_k = R_{k-\frac{1}{2}} S_{k-\frac{1}{2}} + \omega_{k-\frac{1}{2}} = S_{k+\frac{1}{2}} R_{k+\frac{1}{2}} + \omega_{k+\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

При этом оказывается, что

$$S_{k+\frac{1}{2}} = p + i\left(\lambda + k + \frac{1}{2}\right) y - i\,\frac{\beta}{1+2\lambda+2k}, \tag{30}$$

$$R_{k+\frac{1}{2}} = p - i\left(\lambda + k + \frac{1}{2}\right) y + i\,\frac{\beta}{1+2\lambda+2k}, \tag{31}$$

$$\omega_{k+\frac{1}{2}} = C - \left(\lambda + k + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\left(\lambda+k+\frac{1}{2}\right)^2}, \tag{32}$$

$$P_k = p^2 + \left(\frac{1}{4} - (\lambda+k)^2\right)(1-y^2) - \beta y + C. \tag{33}$$

Последовательность можно неограниченно строить и в сторону отрицательных номеров, начиная перестановочный процесс с первого разложения (20). Только что выписанные формулы остаются справедливыми для любых целых k от $-\infty$ до $+\infty$ (случай полуцелого λ мы для простоты исключим).

§ 5. ТЕОРЕМА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СОСТОЯНИЙ

Мы хотим показать, что исследуемое нами состояние P_0 (т. е. удовлетворяющее условию (15)) в известном смысле эквивалентно состоянию P_k (т. е. удовлетворяющему условию (15) с заменой P_0 на P_k, если только числа

$$\omega_{\frac{1}{2}},\ \omega_{\frac{3}{2}},\ \ldots\ \omega_{k-\frac{1}{2}} \tag{34}$$

все отрицательны.

Эквивалентность состояний P_0 и P_k нужно понимать в том смысле, что они существуют (или не существуют) всегда одновременно, причем средние значения всех полиномов $P(p, y)$ в одном состоянии всегда можно выразить через средние значения полиномов в другом состоянии и обратно. А именно, средние значения в состоянии P_k (что мы отмечаем значком (k)) выражаются через средние значения в состоянии P_0 (что мы отмечаем значком (0)) по следующим формулам:

$$\overline{P(p, y)}^{(k)} = \overline{S_{\frac{1}{2}} S_{\frac{3}{2}} \ldots S_{k-\frac{1}{2}} P(p, y) R_{k-\frac{1}{2}} \ldots R_{\frac{3}{2}} R_{\frac{1}{2}}}^{(0)} \cdot \frac{1}{\left|\omega_{\frac{1}{2}} \omega_{\frac{3}{2}} \ldots \omega_{k-\frac{1}{2}}\right|}. \tag{35}$$

И обратно:

$$\overline{P(p, y)}^{(0)} = \overline{R_{k-\frac{1}{2}} \ldots R_{\frac{3}{2}} R_{\frac{1}{2}} P(p, y) S_{\frac{1}{2}} S_{\frac{3}{2}} \ldots S_{k-\frac{1}{2}}}^{(k)} \cdot \frac{1}{\left|\omega_{\frac{1}{2}} \omega_{\frac{3}{2}} \ldots \omega_{k-\frac{1}{2}}\right|}. \tag{36}$$

Основой доказательства этой теоремы служат тождества:

$$S_{\frac{1}{2}} S_{\frac{3}{2}} \dots S_{k-\frac{1}{2}} R_{k-\frac{1}{2}} \dots R_{\frac{3}{2}} R_{\frac{1}{2}} \equiv (P_0 - \omega_{\frac{1}{2}})(P_0 - \omega_{\frac{3}{2}}) \dots (P_0 - \omega_{k-\frac{1}{2}}), \tag{37}$$

$$R_{k-\frac{1}{2}} \dots R_{\frac{3}{2}} R_{\frac{1}{2}} S_{\frac{1}{2}} S_{\frac{3}{2}} \dots S_{k-\frac{1}{2}} \equiv (P_k - \omega_{k-\frac{1}{2}})(P_k - \omega_{k-\frac{3}{2}}) \dots (P_k - \omega_{\frac{1}{2}}), \tag{38}$$

$$P_0 \cdot S_{\frac{1}{2}} S_{\frac{3}{2}} \dots S_{k-\frac{1}{2}} = S_{\frac{1}{2}} S_{\frac{3}{2}} \dots S_{k-\frac{1}{2}} P_k;$$

$$R_{k-\frac{1}{2}} \dots R_{\frac{3}{2}} R_{\frac{1}{2}} P_0 = P_k R_{k-\frac{1}{2}} \dots R_{\frac{3}{2}} R_{\frac{1}{2}}. \tag{39}$$

Аналитический смысл теоремы заключается в том, что функция $\varphi_k(y)$, отвечающая состоянию P_k, получается (с точностью до нормировки) из функции $\varphi_0(y)$, отвечающей состоянию P_0 действием следующих операторов:

$$\varphi_k(y) = R_{k-\frac{1}{2}} \dots R_{\frac{3}{2}} R_{\frac{1}{2}} \cdot \varphi_0(y) \tag{40}$$

И обратно:

$$\varphi_0(y) = S_{\frac{1}{2}} S_{\frac{3}{2}} \dots S_{k-\frac{1}{2}} \cdot \varphi_k(y). \tag{41}$$

§ 6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

Рассмотрим функцию

$$\omega(\mu) = C - (\lambda + \mu)^2 - \frac{\beta^2}{4(\lambda + \mu)^2}. \tag{42}$$

При полуцелых значениях аргумента $\lambda = k + \frac{1}{2}$ мы получаем:

$$\omega\left(k + \frac{1}{2}\right) = \omega_{k+\frac{1}{2}}, \tag{43}$$

как нетрудно убедиться согласно формуле (32).

Функция $\omega(\mu)$ обращается в нуль в четырех точках

$$\mu = -\lambda \pm \sqrt{\frac{C \pm \sqrt{C^2 - \beta^2}}{2}}, \tag{44}$$

причем все эти точки вещественные в силу условия (26).

Нас будут интересовать лишь крайние из этих корней функции $\omega(\mu)$

$$\mu = -\lambda \pm \rho, \quad \text{где} \quad \rho = +\sqrt{\frac{C + \sqrt{C^2 - \beta^2}}{2}}. \tag{45}$$

За пределами этих точек функция $\omega(\mu)$, очевидно, отрицательная. Интервал

$$-\lambda - \rho - \frac{1}{2} < \mu < -\lambda + \rho + \frac{1}{2}, \tag{46}$$

т. е. отрезок между крайними корнями функции $\omega(\mu)$, расширенный с каждого конца на интервал длиной $\frac{1}{2}$, мы будем называть «запретной зоной».

Оказывается, что состояние P_k невозможно, если значение k попадает в запретную зону.

В самом деле, *допустим, что существует состояние P_k, причем*

$$-\lambda - \rho - \frac{1}{2} < k < -\lambda + \rho + \frac{1}{2}. \tag{47}$$

Составим квадратичный полином в виде произведения двух взаимно сопряженных линейных множителей, именно следующим образом:

$$\left(p-i\rho y+i\frac{\beta}{2\rho}\right)\left(p+i\rho y-i\frac{\beta}{2\rho}\right)\equiv p^2-\rho\left(1-y^2\right)+\rho^2y^2-\beta y+\frac{\beta^2}{4\rho^2}\equiv$$

$$\equiv\left\{p^2+\left[(\lambda+k)^2-\frac{1}{4}\right](y^2-1)-\beta y+C\right\}+$$

$$+(1-y^2)\left\{(\lambda+k)^2-\left(\rho+\frac{1}{2}\right)^2\right\}. \qquad (48)$$

Левая часть равенства имеет неотрицательное среднее значение в силу условия (6). Первая фигурная скобка в правой части имеет среднее значение 0, так как совпадает с самим полиномом P_k (согласно (33)).

Вторая фигурная скобка — отрицательное число в силу условия (47). Наконец, среднее значение $1-y^2$ в силу (19) будет положительным. Получаем противоречие: отрицательное число в правой части равно неотрицательному числу в левой части. Противоречие доказывает наше утверждение.

Возвращаемся к исходному состоянию P_0. Чтобы оно было возможно, необходимо, как мы видим, чтобы точка $\mu=0$ лежала за пределами запретной зоны. Более того, необходимо, чтобы точка $\mu=0$ лежала от ближайшего края запретной зоны на целочисленном расстоянии.

Действительно, в противном случае мы берем наименьшее натуральное число k, попадающее в запретную зону (в силу (22) $\lambda<0$, а следовательно, запретная зона лежит на положительной полуоси μ). При этом k не может попасть на край запретной зоны, так как расстояние последнего от точки $\mu=0$ предположено нецелочисленным.

Из определения запретной зоны (46) видно, что точка $\mu=k$ может заходить правее соответствующего крайнего левого корня $-\lambda-\rho$ функции $\omega(\mu)$ лишь менее, чем на длину $\frac{1}{2}$, а следовательно, $k-\frac{1}{2}$ находится еще в области отрицательных значений функции $\omega(\mu)$. Следовательно,

$$\omega_{k-\frac{1}{2}}<0.$$

Тем более это относится к предшествующим значениям $\omega_{k-\frac{3}{2}},\ldots\omega_{\frac{1}{2}}$, поэтому, согласно § 5, состояния P_0 и P_k эквивалентны. Но состояние P_k невозможно, так как k попало в запретную зону. Следовательно, невозможно и состояние P_0.

Итак, мы должны ограничиться состояниями P_0, для которых расстояние от точки $\mu=0$ до ближайшего края запретной зоны есть некоторое натуральное число N.

Ближайший край запретной зоны будет, согласно (46), лежать в точке $\mu=-\lambda-\rho-\frac{1}{2}$, тогда

$$-\lambda-\rho-\frac{1}{2}=N. \qquad (49)$$

Или, пользуясь (45), запишем окончательно:

$$\lambda+N+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{C+\sqrt{C^2-\rho^2}}{2}}=0. \qquad (49')$$

Мы получили в окончательной форме условие, наложенное на коэффициенты полинома

$$P_0 = p^2 + \left(\frac{1}{4} - \lambda^2\right)(1 - y^2) - \beta y + C, \tag{50}$$

необходимое и достаточное для того, чтобы соответствующее состояние было возможно и соответствующая краевая задача имела решение.

При этом N — произвольное натуральное число. Константы C и β должны удовлетворять условию (26): $C > |\beta|$.

Однако у нас показана лишь необходимость условий (49).

§ 7. ДОСТАТОЧНОСТЬ ПОЛУЧЕННЫХ УСЛОВИЙ

Чтобы показать достаточность полученных условий (49), рассмотрим состояние P_N (существование которого еще требуется доказать). Точка N попадает на край запретной зоны (но не в самую запретную зону!), при этом

$$\omega_{N+\frac{1}{2}} = 0, \tag{51}$$

а предшествующие $\omega_{\frac{1}{2}}, \omega_{\frac{3}{2}}, \ldots \omega_{N-\frac{1}{2}}$ — отрицательны, так что состояния P_0 и P_N — эквивалентны. Второе разложение полинома P_N (по образцу (29)) имеет следующий вид, если принять во внимание (51) и (49):

$$P_N = \left(p - i\rho y + \frac{i\beta}{2\rho}\right)\left(p + i\rho y - \frac{i\beta}{2\rho}\right). \tag{52}$$

Рассмотрим состояние P_N. В этом состоянии

$$\overline{P_N} = 0,$$

а следовательно, по условию (7)

$$\overline{A^*\left(p + i\rho y - \frac{i\beta}{2\rho}\right)} = 0, \quad \overline{\left(p - i\rho y + \frac{i\beta}{2\rho}\right)A} = 0, \tag{53}$$

где A — любой полином. В переводе на язык анализа это означает, что функция $\varphi_N(y)$, которой будет соответствовать состояние P_N, должна удовлетворять дифференциальному уравнению первого порядка

$$\left(p + i\rho y - \frac{i\beta}{2\rho}\right)\varphi(y) = 0,$$

т. е.

$$(1 - y^2)\varphi'(y) + \left(\rho y - \frac{\beta}{2\rho}\right)\varphi(y) = 0.$$

Но решение этого уравнения без труда находится элементарным путем, а именно (опуская нормирующий множитель):

$$\varphi_N(y) = (1 - y)^a (1 + y)^b, \tag{54}$$

где

$$a = \frac{\rho}{2} - \frac{\beta}{4\rho}, \quad b = \frac{\rho}{2} + \frac{\beta}{4\rho}. \tag{55}$$

Так как в силу (45) и (26)

$$\rho = \sqrt{\frac{C + \sqrt{C^2 - \rho^2}}{2}} > \sqrt{\frac{C}{2}} > \sqrt{\frac{|\beta|}{2}},$$

то

$$|\beta| < 2\rho^2; \quad \left|\frac{\beta}{2\rho}\right| < \rho,$$

а следовательно, оба показателя (55) положительны и $\varphi_N(y)$ обращается в нуль на концах интервала $(-1, +1)$. Итак, отвечающая состоянию P_N функция $\varphi_N(y)$ существует (и выражается элементарным образом); а следовательно, существует и состояние P_N. Но в силу эквивалентности состояний P_N и P_0 существует и состояние P_0. При этом, согласно (41) и (54),

$$\varphi_0(y) = S_{\frac{1}{2}} S_{\frac{3}{2}} \dots S_{N-\frac{1}{2}} (1-y)^a (1+y)^b, \tag{56}$$

что позволяет фактически найти собственную функцию нашей задачи $\varphi_0(y)$, расшифровав смысл операторов $S_{k+\frac{1}{2}}$, согласно (30).

Этим исследование задачи, разобранной нами в качестве примера, закончено. Заметим, что те же методы в точном соответствии с изложенной схемой можно применять во всех случаях, когда задача о собственных значениях ставится для оператора, *квадратичного* относительно двух базисных операторов, причем эти базисные операторы удовлетворяют *квадратичному* же перестановочному соотношению. В аналитическом истолковании задачи краевые условия появляются при этом не произвольно, а вытекают естественным образом (как и в разобранном случае) из характера перестановочного соотношения или, что то же, из аналитического истолкования базисных операторов. Перестановочный процесс в общем виде (но с чисто алгебраической точки зрения) подробно рассмотрен в нашей работе [1].

Поступила в редакцию
27.5.1950 г.

Кафедра
дифференциальной геометрии

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рашевский П. К.* Простейшие задачи «квазикоммутативной алгебры» в связи с теорией собственных значений дифференциальных операторов, Мат. сб., т. 9 (51): 3 (1941), 511—544; т. 10 (52): 3 (1942), 95—142.