Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 9—1950

С. В. ЯБЛОНСКИЙ

О СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В случае равномерной сходимости последовательности непрерывных функций график предельной функции является в то же время топологическим пределом для последовательности исходных кривых. При неравномерной сходимости это не имеет места. Цель настоящей работы состоит в выяснении взаимоотношений между графиком предела последовательности непрерывных функций и топологическим пределом последовательности соответствующих кривых. Мы рассматриваем действительные функции от одного действительного переменного, определенные на конечном или бесконечном интервале.

Верхним топологическим пределом последовательности непрерывных кривых называется множество точек плоскости, в любой окрестности каждой из которых лежат точки бесконечного числа кривых последовательности.

Нижним топологическим пределом последовательности непрерывных кривых называется множество точек плоскости, в любой окрестности каждой из которых лежат точки всех, кроме конечного числа кривых последовательности.

Пусть последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$. Будем обозначать графики этих функций соответственно через $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ и F, а верхний и нижний топологические пределы через $\overline{F} = \overline{\mathrm{lt}}_{n\to\infty} F_n$ и $\underline{F} = \underline{\mathrm{lt}}_{n\to\infty} F_n$. Заметим, что:

1) топологические пределы замкнуты;

2) $F \subset \underline{F} \subset \overline{F}$.

Из (1) и (2) следует, что предельные точки графика предельной функции F принадлежат топологическим пределам.

3) Если точки плоскости A и B лежат на прямой, параллельной оси OY, и принадлежат верхнему (нижнему) топологическому пределу, то этим свойством обладает и весь отрезок AB.

Свойства 1 и 2 очевидны. Докажем свойство 3.

Пусть точки A и B принадлежат верхнему топологическому пределу и удовлетворяют условию свойства 3 (в случае нижнего топологического предела доказательство аналогично). Обозначим через P – точку пересечения прямой AB с графиком предельной функции F. Одно из двух:

либо $P \in (A, B)$, либо $P \bar{\in} (A, B)$. Для определенности предположим первое, т. е. $P \in (A, B)$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как $A \in \overline{F}$, то существует подпоследовательность кривых $\{F_{n_k}\}$, проходящих через ε—окрестность точки A. Пусть x_0 — абсцисса точки P. Так как $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, то при $n > n_0$ непременно $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$.

В силу непрерывности кривые с номерами $n_k > n_0$ проходят через ε—окрестность любой точки отрезка AP, т. е. $AP \subset \overline{F}$. Аналогично $PB \subset \overline{F}$. Значит $AB \subset \overline{F}$.

Случай, когда $P \bar{\in} (A, B)$, доказывается аналогично.

Пусть $M(f, x_0)$ и $m(f, x_0)$ означают соответственно максимум и минимум функции $f(x)$ в точке x_0.

Будем называть **минимальным топологическим пределом** множество, которое получается замыканием графика предельной функции и присоединением точек, заполняющих отрезки, соединяющие точки $(x_0, M(f, x_0))$ и $(x_0, m(f, x_0))$. Из свойств 1—3 следует, что минимальный топологический предел содержится в нижнем топологическом пределе. Заметим, что минимальный топологический предел $F_{\min}$ целиком определяется графиком предельной функции. Таким образом, топологический предел состоит из минимального топологического предела и точек, заполняющих вертикальные отрезки. Это позволяет характеризовать верхний (нижний) топологический предел парой функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, называемых **верхней** и **нижней функциями**; в самом деле, для любого x_0 прямая $x = x_0$ с топологическим пределом имеет либо общую точку, ордината которой y_0, либо общий отрезок, ординаты которого y_1 и y_2 $(y_1 > y_2)$. Полагаем в первом случае $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0$ и во втором — $\varphi(x_0) = y_1$, $\psi(x_0) = y_2$ (где y_0, y_1 и y_2 могут обращаться в $\pm\infty$). Легко видеть, что $\varphi(x)$ — полунепрерывна сверху, $\psi(x)$ — полунепрерывна снизу. Таким образом, задание топологического предела эквивалентно заданию пары функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Будем писать

$$\overline{F} \sim [\overline{\varphi(x)}, \overline{\psi(x)}] \text{ и } \underline{F} \sim [\underline{\varphi(x)}, \underline{\varphi(x)}].$$

Наша задача состоит в том, чтобы дать необходимые и достаточные условия, чтобы два множества M и N были соответственно верхним (нижним) топологическим пределом и графиком предельной функции последовательности непрерывных функций.

Положим, что множества M и N ограничены, именно лежат внутри полосы $[-l \leqslant y \leqslant +l]$. Случай, когда множества M и N неограничены, будет разобран ниже. Сформулируем задачу на языке функций.

Будем говорить, что последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$, сходящаяся к ограниченной функции $f(x)$, имеет **слабую боковую сходимость к числу** g **в точке** x_0, если:

1. Каково бы ни было положительное число ε, существует бесчисленное множес во натуральных чисел U_ε и для каждого $n \in U_\varepsilon$ хотя бы одно такое x_n, что $\sqrt{(x_0 - x_n)^2 + [g - f_n(x_n)]^2} < \varepsilon$.

2. А. Если $g > f(x_0)$, то каково бы ни было $\eta > 0$, найдутся N и $\delta > 0$ такие, что при $|x - x_0| < \delta$ и $n > N$ $f_n(x) < g + \eta$. В. Если $g < f(x_0)$, то каково бы ни было $\eta > 0$, найдутся N и $\delta > 0$ такие, что при $|x - x_0| < \delta$ и $n > N$ $f_n(x) > g - \eta$. С. Если $g = f(x_0)$, то имеет место либо А либо В.

Последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$, сходящаяся к ограниченной функции $f(x)$, имеет слабую боковую сходимость к ограниченной функции $g(x)$, если в каждой точке $x=x_0$ имеет место слабая боковая сходимость к числу $g(x_0)$.

Далее, будем говорить, что последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$, сходящаяся к ограниченной функции $f(x)$, имеет сильную боковую сходимость к числу g в точке x_0, если:

1. Каково бы ни было положительное число ε, существует такое n_0, что для каждого $n > n_0$ найдется хотя бы одно x_n, для которого $\sqrt{(x_0-x_n)^2+[g-f_n(x_n)]^2} < \varepsilon$.

2. A. Если $g > f(x_0)$, то каково бы ни было $\eta > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что при условии $|x-x_0| < \delta$ для бесконечного числа номеров n имеет место соотношение $f_n(x) < g+\eta$. B. Если $g < f(x_0)$, то каково бы ни было $\eta > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что при $|x-x_0| < \delta$ для бесконечного числа номеров n имеет место $f_n(x) > g-\eta$. C. Если $g=f(x_0)$, то имеет место либо A либо B.

Последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$, сходящаяся к ограниченной функции $f(x)$, имеет сильную боковую сходимость к ограниченной функции $g(x)$, если в каждой точке $x=x_0$ имеет место сильная боковая сходимость к числу $g(x_0)$.

Далее, если последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$, сходящаяся к ограниченной функции $f(x)$, имеет сильную и слабую боковую сходимость к ограниченной функции $g(x)$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет боковую сходимость к ограниченной функции $g(x)$. В этом случае, очевидно, в каждой точке x x_0 должны выполняться 1-е условие сильной и 2-е условие слабой боковой сходимости.

Следующие две теоремы позволяют заменить топологическую сходимость боковой.

Теорема. *Пусть M — множество точек плоскости, заполняющих вертикальные отрезки с концами (x_0, y_1) и (x_0, y_2), где $y_1 \geqslant y_2$, и такое, что функции $y_1=\varphi(x_0)$ и $y_2=\psi(x_0)$ полунепрерывны соответственно сверху и снизу. Далее пусть множества F и M лежат внутри полосы $[-l \leqslant y \leqslant +l]$. Тогда для того, чтобы данная последовательность непрерывных кривых $\{F_n\}$, сходящаяся к F, имела своим верхним топологическим пределом множество M, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$ имела слабую боковую сходимость к функции $\varphi(x)$ типа A и C_A и к $\psi(x)$ типа B и C_B.*

Теорема. *Пусть M — множество точек плоскости, заполняющих вертикальные отрезки с концами (x_0, y_1) и (x_0, y_2), где $y_1 \geqslant y_2$, и такое, что функции $y_1=\varphi(x_0)$ и $y_2=\psi(x_0)$ полунепрерывны соответственно сверху и снизу. Далее пусть множества F и M лежат внутри полосы $[-l \leqslant y \leqslant +l]$. Тогда для того, чтобы данная последовательность непрерывных кривых $\{F_n\}$, сходящаяся к F, имела своим нижним топологическим пределом множество M, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$ имела сильную боковую сходимость к функции $\varphi(x)$ типа A и C_A и к $\psi(x)$ типа B и C_B.*

Докажем вторую теорему. Первая доказывается аналогично.

Необходимость. M — нижний топологический предел последовательности кривых $\{F_n\}$. Покажем, что имеет место сильная боковая сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к $\varphi(x)$ типа A и C_A (аналогично доказывается сильная боковая сходимость $\{f_n(x)\}$ к $\psi(x)$ типа B и C_B).

Так как график функции $\varphi(x)$ принадлежит нижнему топологическому пределу, то 1-е условие сильной боковой сходимости выполнено. Покажем, что 2-е условие также выполнено.

Пусть x_0 принадлежит области изменения независимого переменного для последовательности $\{f_n(x)\}$. Из определения $\varphi(x)$ вытекает, что $\varphi(x_0) \geqslant f(x_0)$. Возьмем произвольное $\eta > 0$. Утверждается, что найдется такое $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ для бесконечного числа номеров n $f_n(x) < \varphi(x_0) + \eta$.

Допустим, что это не так. Значит, существует такое $\eta_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ можно найти такое N_1, что для $n > N_1$, найдется x_n такое, что $|x_n - x_0| < \delta$ и $f_n(x_n) \geqslant \varphi(x_0) + \eta_0$. Пусть при $n > N_2$ $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \eta_0$. Тогда при $n > \max(N_1, N_2)$ кривая F_n проходит через δ-окрестность точки $(x_0, \varphi(x_0) + \eta_0)$. Значит, точка $(x_0, \varphi(x_0) + \eta_0)$ принадлежит нижнему топологическому пределу, что противоречиво.

Достаточность. Имеет место сильная боковая сходимость $\{f_n(x)\}$ к $\varphi(x)$ типа А и C_A и к $\psi(x)$ типа В и C_B. Надо показать, что множество $M \sim [\varphi(x), \psi(x)]$ является нижним топологическим пределом для последовательности кривых $\{F_n\}$.

В силу 1-го условия сильной боковой сходимости точки графиков функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат нижнему топологическому пределу, поэтому из свойства 3 топологического предела следует, что точки, заполняющие вертикальные отрезки между графиками функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, также принадлежат нижнему топологическому пределу, т. е. $M \subset \underline{F}$.

Остается показать, что если точка $P \bar{\in} M$, то $P \bar{\in} \underline{F}$. Так как $P(x_0, y_0) \bar{\in} M$, то либо $y_0 > \varphi(x_0)$, либо $y_0 < \psi(x_0)$. Положим для определенности $y_0 > \varphi(x_0)$. Пусть $\eta = \frac{y_0 - \varphi(x_0)}{2}$. В силу 2-го условия сильной боковой сходимости найдется $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется для бесконечного числа номеров n неравенство $f_n(x) < \varphi(x_0) + \frac{\eta}{2}$. Пусть далее $\varepsilon = \min\left(\delta, \frac{\eta}{2}\right)$, тогда в ε — окрестности точки P нет точек бесчисленного множества кривых F_n. Значит $P \bar{\in} \underline{F}$. Таким образом, $M \supset \underline{F}$, т. е. $M = \underline{F}$, что и требовалось доказать.

Теперь можно поставить нашу задачу следующим образом: дать необходимые и достаточные условия того, чтобы для трех ограниченных функций $\varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant \psi(x)$ существовала последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$, обладающая двумя свойствами:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

2. $\{f_n(x)\}$ имеет слабую (сильную) боковую сходимость к $\varphi(x)$ типа А и C_A и к $\psi(x)$ типа В и C_B.

Решение этой задачи дает следующая

Основная теорема. *Чтобы для трех ограниченных функций* $\varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant \psi(x)$ *существовала последовательность непрерывных функций* $\{f_n(x)\}$, *обладающая следующими двумя свойствами*:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

2. $\{f_n(x)\}$ *имеет слабую (сильную) боковую сходимость к* $\varphi(x)$ *типа* А *и* C_A *и к* $\psi(x)$ *типа* В *и* C_B, *необходимо и достаточно, чтобы*:

1. $f(x)$ *была функцией 1-го класса.*

2. $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *были полунепрерывными соответственно сверху и снизу.*

3. $\varphi(x)=\psi(x)$ *на множестве второй категории на исходном интервале*[1].

Докажем несколько лемм. Положим

$$\Phi(x)=\varphi(x)-f(x)\geqslant 0 \quad \text{и} \quad \Psi(x)=f(x)-\psi(x)\geqslant 0.$$

Пусть далее последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ и имеет слабую (сильную) боковую сходимость к $\varphi(x)$ типа A и C_A и к $\psi(x)$ типа B и C_B.

Лемма 1. Множество $E(\Phi(x)\geqslant\mu)$ нигде не плотно, если $\mu>0$.

Допустим противное, тогда найдется такое $\mu_0>0$, что на некотором сегменте $[\alpha_0,\beta_0]$ множество $E(\Phi(x)\geqslant\mu_0)$ всюду плотно. Так как $f(x)$ — функция 1-го класса, то на любом интервале найдется точка непрерывности, в частности, и на интервале (α_0,β_0). Пусть это будет точка ξ. В таком случае найдется такая окрестность точки ξ — сегмент $[\alpha_1,\beta_1]\subset$ $\subset(\alpha_0,\beta_0)$, что $|f(\xi)-f(x)|<\frac{\mu_0}{4}$ для $x\in[\alpha_1,\beta_1]$.

Таким образом, график функции $f(x)$ на $[\alpha_1,\beta_1]$ лежит внутри прямоугольника ширины $\frac{\mu_0}{2}$ с центром в точке $(\xi,f(\xi))$. Точки графика функции $\varphi(x)$ для всюду плотного на $[\alpha_1,\beta_1]$ множества точек x лежат выше прямой $y=f(\xi)+\frac{3}{4}\mu_0$. С другой стороны, множество $E\left\{\varphi(x)\geqslant f(\xi)+\right.$ $\left.+\frac{3}{4}\mu_0\right\}$ в силу полунепрерывности сверху $\varphi(x)$ замкнуто. Значит, $\varphi(x)\geqslant f(\xi)+\frac{3}{4}\mu_0$ для всех $x\in[\alpha_1,\beta_1]$. Пусть

$$x_1\in(\alpha_1,\beta_1) \text{ и } \varepsilon_1=\min\left(\frac{\mu_0}{4},\ \beta_1-x_1,\ x_1-\alpha_1\right).$$

В силу боковой сходимости (сильной или слабой) найдется такое n_1, что кривая F_{n_1} — график функции $f_{n_1}(x)$ — будет иметь точки в ε_1 — окрестности точки $(x_1,\varphi(x_1))$; поэтому график функции $f_{n_1}(x)$ будет лежать выше прямой $st\left(y=f(\xi)+\frac{\mu_0}{2}\right)$ на некотором интервале $(\alpha_2,\beta_2)\subset(\alpha_1,\beta_1)$. Возьмем $x_2\in(\alpha_2,\beta_2)$ и $\varepsilon_2=\min\left(\frac{\mu_0}{4},\beta_2-x_2,x_2-\alpha_2\right)$. В силу боковой сходимости найдется такое $n_2>n_1$, что график функции $f_{n_2}(x)$ будет иметь точки в ε_2 — окрестности точки $(x_2,\varphi(x_2))$, поэтому график функции $f_{n_2}(x)$ будет лежать выше прямой st на некотором интервале $(\alpha_3,\beta_3)\subset(\alpha_2,\beta_2)$. Этот процесс будем неограниченно продолжать.

Получим последовательность натуральных чисел $n_1<n_2<\ldots<$ $<n_k<\ldots$ и последовательность сегментов $[\alpha_1,\beta_1]\supset[\alpha_2,\beta_2]\supset\ldots\supset$ $\supset[\alpha_k,\beta_k]\supset\ldots$

Последовательность вложенных сегментов имеет по крайней мере одну общую точку η. Утверждается, что в точке $x=\eta$ последовательность $\{f_n(\eta)\}$ не может сходиться к $f(\eta)$. В самом деле, пусть $\varepsilon<\frac{\mu_0}{4}$ и n — произвольное натуральное число, тогда найдется $n_k>n$, для которого

$$|f_{n_k}(x)-f(x)|\geqslant\frac{\mu_0}{4} \quad \text{для} \quad x\in[\alpha_k,\beta_k].$$

---

[1] Множеством 2-й категории на пространстве P называется такое множество, дополнение к которому есть множество 1-й категории на P.

Так как $\eta \in [\alpha_k, \beta_k]$, то $|f_{n_k}(\eta) - f(\eta)| \geqslant \frac{\mu_0}{4} > \varepsilon$. Мы пришли к противоречию. Лемма 1 доказана. Аналогично доказывается следующая.

Лемма 1′. *Множество $E(\Psi(x) \geqslant \mu)$ нигде не плотно, если $\mu > 0$.*

Лемма 2. *Пусть в полосе $[-l \leqslant y \leqslant +l]$ лежит замкнутое связное множество P, обладающее следующими свойствами:*

1. *Каждая вертикаль $x = x_0$, где $x_0 \in [a, b]$, имеет по крайней мере одну общую точку с множеством P.*

2. *Если точки $Q_1(x_1, y_1)$ и $Q_2(x_1, y_2) \in P$, то отрезок $Q_1Q_2 \in P$.*

Тогда из того, что точки $K_1(x', y')$ и $K_2(x', y'') \in S(P, \sigma)$ следует, что отрезок $K_1K_2 \in S(P, \sigma)$ ($S(P, \sigma)$ — σ — окрестность множества P).

Лемма 2 очевидна.

Пусть множество P удовлетворяет условиям леммы 2 и пусть γ_σ — граница $S(P, \sigma)$. Замкнутое множество γ_σ в силу того, что множество P лежит в полосе $[-l \leqslant y \leqslant \leqslant +l]$, либо связно, либо состоит из двух связных множеств. Определим в прямоугольнике $\pi\{a \leqslant x \leqslant b;\ -l \leqslant \leqslant y \leqslant +l\}$ множества $\overline{\gamma}_\sigma$ и $\underline{\gamma}_\sigma$ — верхняя и нижняя границы $S(P, \sigma)$ так:

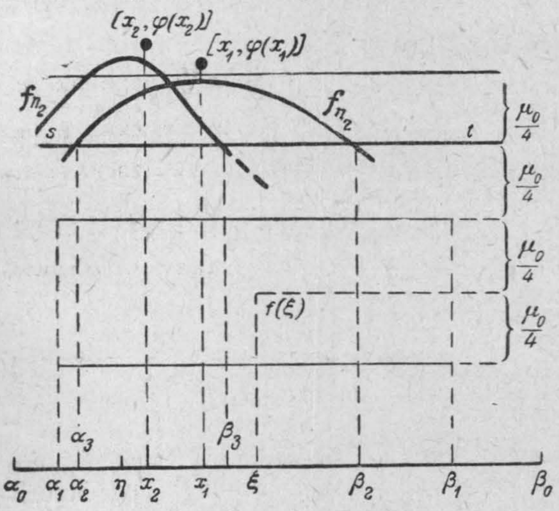

Рис. 1

Точка $Q(x, y) \in \overline{\gamma}_\sigma$, если $Q \in \gamma_\sigma \cap \pi$ и если существует такая точка $L(x', y') \in P$, что $x' = x$ и $y' < y$.

Точка $Q(x, y) \in \underline{\gamma}_\sigma$, если $Q \in \gamma_\sigma \cap \pi$ и если существует такая точка $L(x', y') \in P$, что $x' = x$ и $y' > y$.

Очевидно, что $\overline{\gamma}_\sigma + \underline{\gamma}_\sigma = \gamma_\sigma \cap \pi$ и $\overline{\gamma}_\sigma \cap \underline{\gamma}_\sigma$ пусто. Сформулируем без доказательства следующую лемму:

Лемма 3. *Если точки $Q_1(x_0, y_1)$ и $Q_2(x_0, y_2) \in \overline{\gamma}_\sigma$ (или $\underline{\gamma}_\sigma$), тогда отрезок $Q_1Q_2 \in \overline{\gamma}_\sigma$ (или $\underline{\gamma}_\sigma$).*

Лемма 4. *Пусть дан минимальный топологический предел $F_{\min}$, соответствующий графику ограниченной функции $f(x)$; значит, $|f(x)| \leqslant l$. Пусть σ — произвольное положительное число. Можно построить такие непрерывные функции $\overline{g}(x)$ и $\underline{g}(x)$, что $\overline{g}(x) \geqslant f(x) \geqslant \underline{g}(x)$ и их графики лежат в $S(F_{\min}, \sigma)$.*

Ясно, что $-l \leqslant \psi(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant +l$, где $\varphi(x) = M(f, x)$ и $\psi(x) = m(f, x)$.

Как известно, $\psi(x)$ — полунепрерывная снизу функция — есть предел неубывающей последовательности непрерывных функций[1], например:

$$q_n(x) = \inf_z (\psi(z) + n|x - z|).$$

Полунепрерывная сверху функция $\varphi(x)$ — есть предел невозрастающей последовательности непрерывных функций, например:

$$p_n(x) = \sup_z (\varphi(z) - n|x - z|).$$

[1] См. Хаусдорф, «Теория множеств». ОНТИ НКТП СССР, М.—Л., 1937, стр. 238.

Легко показать, что $q_n(x)$ — непрерывная функция. Мы покажем, что при достаточно большом номере n ее график лежит в $S(F_{\min}, \sigma)$.

Пусть $0 < \varepsilon < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ и n_0 выбрано так, что $\frac{2l+\varepsilon}{n_0} < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$. Утверждается, что график функции $q_{n_0}(x)$ лежит в $S(F_{\min}, \sigma)$. Для этого достаточно показать, что точка $A(x_0, q_{n_0}(x_0)) \in S(F_{\min}, \sigma)$.

Из определения $q_{n_0}(x)$ следует, что найдется такое число z, что $\psi(z) + n_0|x_0 - z| < q_{n_0}(x_0) + \varepsilon \leqslant l + \varepsilon$ или $n_0|x_0 - z| < l + \varepsilon - \psi(z) \leqslant 2l + \varepsilon$, так как $q_n(x) \leqslant \psi(x)$ и $\psi(x) \geqslant -l$. Итак $|x_0 - z| < \frac{2l+\varepsilon}{n_0} < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$. Так как $\psi(z) < q_{n_0}(x_0) + \varepsilon$, то точка $B(z, \psi(z))$ расположена ниже прямой $y = q_{n_0}(x_0) + \varepsilon$. Возможны два случая:

1. $\psi(z) \geqslant q_{n_0}(x_0)$, тогда

$$\rho^2(A, B) \leqslant \varepsilon^2 + \left(\frac{2e+\varepsilon}{n_0}\right)^2 < \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} = \sigma^2,$$

ибо

$$|z - x_0| < \frac{2l+\varepsilon}{n_0} < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$$

и $q_{n_0}(x_0) \leqslant \psi(z) < q_{n_0}(x_0) + \varepsilon$.

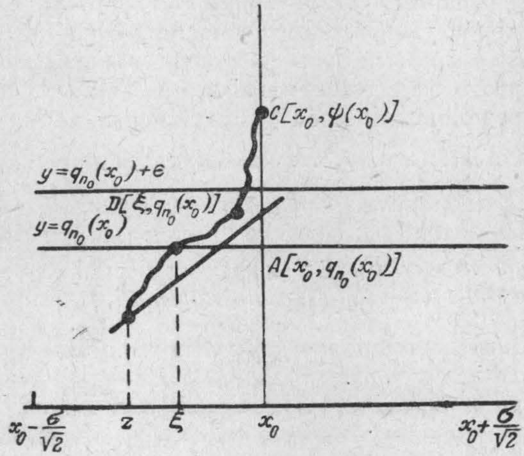

Рис. 2

Мы получили $\rho(A, B) < \sigma$. Это означает, что $A \in S(F_{\min}, \sigma)$.

2. $\psi(z) < q_{n_0}(x_0)$. Точка $C(x_0, \psi(x_0))$ расположена не ниже прямой $y = q_{n_0}(x_0)$, так как $\psi(x_0) \geqslant q_{n_0}(x_0)$. Далее $C \in F_{\min}$ и $B \in F_{\min}$, поэтому найдется континуум $\gamma \in F_{\min}$, соединяющий точки B и C и лежащий в полосе $|x - x_0| \leqslant |z - x_0| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$. Континуум γ имеет общую точку $D(\xi, q_{n_0}(x_0))$ с прямой $y = q_{n_0}(x_0)$, причем $|\xi - x_0| \leqslant |z - x_0| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$. Тогда $\rho(A, D) = |\xi - x_0| < \frac{\sigma}{\sqrt{2}} < \sigma$, т. е. $A \in S(F_{\min}, \sigma)$, что и требовалось доказать. Положим $\underline{g}(x) = q_{n_0}(x) \leqslant \psi(x) \leqslant f(x)$.

Аналогично строится непрерывная функция $\overline{g}(x) \geqslant \varphi(x) \geqslant f(x)$, график которой расположен в $S(F_{\min}, \sigma)$. Этим лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $F_{\min}$ — минимальный топологический предел, отвечающий ограниченной функции 1-го класса $f(x)$. Тогда существует последовательность непрерывных функций $\{h_n(x)\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = f(x)$ и $\overline{\mathrm{lt}}_{n\to\infty} H_n = F_{\min}$, где H_n — график функции $h_n(x)$.*

Так как $f(x)$ — функция 1-го класса, то существует последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$, сходящаяся к $f(x)$. На основании леммы 4 для каждого σ_n можно построить непрерывные функции $\overline{g_n}(x)$ и $\underline{g_n}(x)$ такие, что $\overline{g_n}(x) \geqslant f(x) \geqslant \underline{g_n}(x)$ и графики их лежат в $S(F_{\min}, \sigma_n)$.

Положим $h_n(x) = \max\{\min[g_n(x), f_n(x)], g_n(x)\}$. Очевидно, что $h_n(x)$ — непрерывная функция. Утверждается, что $\{h_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ и верхний топологический предел ее графиков $\{H_n\}$ равен $F_{\min}$.

В самом деле, возможны два случая:

a. $f_n(x) \geqslant f(x)$, тогда

$$0 \leqslant h_n(x) - f(x) = \min[\overline{g_n(x)}, f_n(x)] - f(x) \leqslant f_n(x) - f(x).$$

b. $f_n(x) \leqslant f(x)$, тогда

$$0 \leqslant f(x) - h_n(x) = f(x) - \max[f_n(x), \underline{g_n(x)}] \leqslant f(x) - f_n(x).$$

Значит, $|f(x) - h_n(x)| \leqslant |f(x) - f_n(x)|$, т. е. $h_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$. Второе утверждение очевидно. Этим лемма 5 доказана.

Сформулируем без доказательства две леммы, которые являются простым следствием из определений верхнего и нижнего топологических пределов для последовательности непрерывных кривых $\{F_n\}$.

Лемма 6. *Пусть верхний топологический предел* $\overline{F} = \overline{\operatorname{lt}}_{n\to\infty} F_n$ *последовательности непрерывных кривых* $\{F_n\}$ *ограничен, тогда для любого положительного числа* σ *существует такое натуральное число* N, *что при* $n > N$ $F_n \subset S(\overline{F}, \sigma)$.

Лемма 7. *Пусть нижний топологический предел* $\underline{F} = \underline{\operatorname{lt}}_{n\to\infty} F_n$ *последовательности непрерывных кривых* $\{F_n\}$ *ограничен; тогда для любого положительного числа* σ *существует такое натуральное число* N, *что при* $n > N$ $F_n \cap S(x, \sigma) \neq 0$ *для любого* $x \in \underline{F}$.

Доказательство основной теоремы. Необходимость. Пусть последовательность непрерывных функций сходится к ограниченной функции $f(x)$ и имеет слабую (сильную) боковую сходимость к $\varphi(x)$ типа A и C_A и к $\psi(x)$ типа B и C_B (где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — ограниченные функции). Ясно, что $f(x)$ — функция 1-го класса. Далее из боковой сходимости (сильной или слабой) следует, что $\varphi(x)$ — полунепрерывна сверху, а $\psi(x)$ — полунепрерывна снизу. Остается показать, что $\varphi(x) = \psi(x)$ на множестве 2-й категории. Пусть E — множество точек x, для которых $\varphi(x) \neq \psi(x)$, значит, по крайней мере, или $\varphi(x) \neq f(x)$ или $\psi(x) \neq f(x)$. Тогда

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E\left\{\varphi(x) - \psi(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E\left\{\varphi(x) - f(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\} + \sum_{n=1}^{\infty} E\left\{f(x) - \psi(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E\left\{\Phi(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\} + \sum_{n=1}^{\infty} E\left\{\Psi(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$$

Из лемм 1 и 1′ и этого равенства следует, что E — множество типа F_σ — есть множество первой категории, ибо $E\left\{\Phi(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$ и $E\left\{\Psi(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$ нигде не плотны. Это и показывает, что дополнительное множество, т. е. множество тех точек x, для которых $\varphi(x) = \psi(x)$, — множество второй категории.

Достаточность. Даны ограниченные функции $\varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant \psi(x)$, заданные на отрезке $[a, b]$, $f(x)$ — функция 1-го класса, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ полунепрерывны соответственно сверху и снизу и множество точек x, где $\varphi(x) = \psi(x)$ — множество 2-й категории. Построим последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$, сходящуюся к $f(x)$ и имеющую боковую сходимость к функции $\varphi(x)$ типа A и C_A и к $\psi(x)$ типа B и C_B.

Возьмем последовательность положительных чисел $\{\sigma_n\}$, монотонно стремящихся к 0. По лемме 5 существует последовательность непрерывных функций $\{h_n(x)\}$ такая, что на отрезке $[a, b]$ $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = f(x)$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ H_n = F_{\min}$, где H_n — график функции $h_n(x)$. На основании леммы 6 можно считать, что $H_n \subset S(F_{\min}, \sigma_n)$.

Пусть E_n^0 — множество таких значений x, для которых точка $[x, \varphi(x)]$ лежит вне $S(F_{\min}, \sigma_n)$ и D_n^0 — множество таких значений x, для которых точка $[x, \psi(x)]$ лежит вне $S(F_{\min}, \sigma_n)$. Утверждается, что множества E_n^0 и D_n^0 замкнуты и нигде не плотны. Доказательство проведем для множества E_n^0. Аналогичными рассуждениями проводится доказательство для D_n^0.

Если E_n^0 пусто или конечно, то утверждение очевидно. Пусть E_n^0 бесконечно. Пусть, далее, ξ — предельная точка для E_n^0. Тогда $\xi = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, где $x_k \in E_n^0$, значит точка $(x_k, \varphi(x_k))$ лежит вне $S(F_{\min}, \sigma_n)$, а следовательно, выше $S(F_{\min}, \sigma_n)$. Положим, что $\xi \bar{\in} E_n^0$, т. е. точка $(\xi, \varphi(\xi))$ лежит внутри $S(F_{\min}, \sigma_n)$. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что квадрат со сторонами, равными 2ε и параллельными координатным осям и с центром в точке $(\xi, \varphi(\xi))$ лежит внутри области $S(F_{\min}, \sigma_n)$. В силу полунепрерывности сверху функции $\varphi(x)$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|\xi - x| < \delta$, $\varphi(x) < \varphi(\xi) + \varepsilon$. Пусть $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon, \delta)$. Для $|\xi - x_k| < \varepsilon_0$ точка $(x_k, \varphi(x_k))$ лежит ниже квадрата, так как она не может находиться внутри квадрата, лежащего внутри области $S(F_{\min}, \sigma_n)$. Ниже точки $[x_k, \varphi(x_k)]$ найдется точка $A \in F_{\min} \subset S(F_{\min}, \sigma_n)$ и с абсциссой $x = x_k$. С другой стороны точка $B(x_k, \varphi(\xi))$ лежит в квадрате, значит, в $S(F_{\min}, \sigma_n)$. Тогда в силу леммы 2 отрезок $AB \subset S(F_{\min}, \sigma_n)$, а потому точка $(x_k, \varphi(x_k)) \in AB \subset$ $\subset S(F_{\min}, \sigma_n)$. Мы пришли к противоречию. Значит $\xi \in E_n^0$, т. е, E_n^0 замкнуто. Нигде неплотность множества E_n^0 следует из включений

$$E_n^0 \subset E\{\varphi(x) - f(x) \geqslant \sigma_n\} \subset E\{\varphi(x) - \psi(x) \geqslant \sigma_n\},$$

где $E\{\varphi(x) - \psi(x) \geqslant \sigma_n\}$ замкнуто и нигде не плотно, так как в противном случае $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E\{\varphi(x) - \psi(x) \geqslant \sigma_n\}$ не было бы множеством 1-й категории.

Для каждого номера n определим функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$, которые будут играть роль верхней и нижней функций для некоторой последовательности непрерывных функций, сходящейся к $h_n(x)$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{на } E_n^0 \\ h_n(x) & \text{на } CE_n^0 \end{cases} \qquad \psi_n(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{на } D_n^0 \\ h_n(x) & \text{на } CD_n^0 \end{cases}$$

Очевидно, что функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ полунепрерывны соответственно сверху и снизу.

Пусть, далее, $E_n' = E\{\omega(\varphi_n, E_n^0) \geqslant \sigma_n\}$ — множество точек x, для которых колебание функции $\varphi_n(x)$ относительно множества E_n^0 больше или равно σ_n. Пусть определены множества $E_n^0, E_n', \ldots, E_n^{k-1}$. Полагаем $E_n^k = E\{\omega(\varphi_n, E_n^{k-1}) \geqslant \sigma_n\}$. В силу замкнутости множества E_n^0 и полунепрерывности сверху функции $\omega(\varphi_n, E_n^{k-1})$ множество E_n^k замкнуто и $E_n^0 \supset E_n' \supset \ldots \supset E_n^k \supset \ldots$ Так как E_n^0 нигде не плотно, то множество E_n^k также нигде не плотно.

Покажем, что если $E_n^0 \neq 0$, то найдется такое целое неотрицательное число m_n, что $E_n^{m_n} \neq 0$ и $E_n^k = 0$ при $k > m_n$.

Предварительно докажем, что если $x_0 \in E_n^k$, то точка $[x_0, \varphi(x_0)]$ лежит не ниже верхней границы γ_{σ_n} множества $S(F_{\min}, \sigma_n)$, сдвинутой в положительном направлении вдоль оси OY на расстояние, равное $k \cdot \sigma_n$. Доказательство будем вести по индукции. В самом деле при $k=0$, если $x_0 \in E_n^0$, то по определению точка $(x_0, \varphi(x_0))$ лежит вне $S(F_{\min}, \sigma_n)$, т. е. не ниже $\overline{\gamma}_{\sigma_n}$ $(k \cdot \sigma_n = 0)$, таким образом, утверждение имеет место.

Положим, оно справедливо для $k = 0, 1, \ldots, s-1$. Покажем, что оно имеет место для $k = s$. Пусть $x_0 \in E_n^s$, значит, $\omega[\varphi_n(x_0), E_n^{s-1}] \geqslant \sigma_n$ x_0 — предельная для точек множества E_n^{s-1}, так как в изолированной точке x множества E_n^{s-1} $\omega[\varphi_n(x), E_n^{s-1}] = 0$, т. е. $x \overline{\in} E_n^s$. Пусть $M[\varphi_n(x_0), E_n^{s-1}]$ и $m[\varphi_n(x_0), E_n^{s-1}]$ соответственно максимум и минимум функции $\varphi_n(x)$ в точке x_0 относительно множества E_n^{s-1}. Так как $\varphi_n(x)$ — полунепрерывная сверху функция, то $M(\varphi_n(x_0), E_n^{s-1}) = \varphi_n(x_0)$. Далее, из соотношения

$$M(\varphi_n(x_0), E_n^{s-1}) - m(\varphi_n(x_0), E_n^{s-1}) = \omega[\varphi_n(x_0), E_n^{s-1}] \geqslant \sigma_n$$

следует, что $m[\varphi_n(x_0), E_n^{s-1}] \leqslant \varphi_n(x_0) - \sigma_n$. Значит, сколь угодно близко к точке $(x_0, m[\varphi_n(x_0), E_n^{s-1}])$ найдутся точки $(x_t, \varphi_n(x_t))$, где $x_t \in E_n^{s-1}$, расположенные по индуктивному предположению не ниже сдвинутой вверх на расстояние, равное $(s-1)\sigma_n$ верхней границы $\overline{\gamma}_{\sigma_n}$. В силу замкнутости $\overline{\gamma}_{\sigma_n}$ и леммы 3 точки $(x_0, m[\varphi_n(x_0), E_n^{s-1}])$ и $(x_0, \varphi_n(x_0) - \sigma_n)$ лежат также не ниже сдвинутой вверх на расстояние, равное $(s-1)\sigma_n$, верхней границы $\overline{\gamma}_{\sigma_n}$. Точка $(x_0, \varphi(x_0))$ лежит выше точки $(x_0, \varphi(x_0) - \sigma_n)$ на σ_n, значит, она лежит не ниже сдвинутой на $\sigma_n + (s-1)\sigma_n = s \cdot \sigma_n$ верхней границы $\overline{\gamma}_{\sigma_n}$. Утверждение доказано.

В силу того, что функция $\varphi(x)$ ограничена и множество $\overline{\gamma}_{\sigma_n}$ также ограничено, при достаточно большом s_0 сдвинутая вверх на $s_0\sigma_n$ граница $\overline{\gamma}_{\sigma_n}$ будет расположена выше графика функции $\varphi(x)$, т. е $E_n^{s_0} = 0$. Таким образом, если $E_n^0 \neq 0$, то существует такое целое число $m_n \geqslant 0$, что $E_n^{m_n} \neq 0$, а $E_n^k = 0$ при $k > m_n$.

Аналогично строятся множества $D_n', \ldots, D_n^k, \ldots$, где

$$D_n^k = E\{\omega(\psi_n, D_n^{k-1}) \geqslant \sigma_n\}, \; k = 1, 2, \ldots$$

Множества D_n^k — замкнуты, нигде не плотны и $D_n^0 \supset D_n' \supset \ldots \supset D_n^k \supset \ldots$ Нетрудно убедиться, что если $D_n^0 \neq 0$, то существует такое целое неотрицательное число p_n, что $D_n^{p_n} \neq 0$ и $D_n^k = 0$ при $k > p_n$.

Пусть $P_n = E\{\omega[f(x)] \geqslant \sigma_n\}$. P_n — замкнутое и нигде не плотное множество, так как $f(x)$ — функция 1-го класса. Тогда $L_n^0 = P_n + E_n^0 + D_n^0$ — замкнутое нигде не плотное множество. Рассмотрим множества $E_n^0, \ldots, E_n^{m_n}$, если $E_n^0 \neq 0$ и $D_n^0, \ldots, D_n^{p_n}$, если $D_n^0 \neq 0$. Если $E_n^0 = 0$, то его не рассматриваем; аналогично поступают с $D_n^0 = 0$.

Выпишем для рассматриваемых множеств таблицы смежных интервалов, располагая их в порядке невозрастания длин

$$\begin{array}{llll} E_n^0 & \delta'_{10}, \quad \delta'_{20}, \ldots, \delta'_{k0}, \ldots & D_n^0 & \delta''_{10}, \quad \delta''_{20}, \ldots, \delta''_{k0}, \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_n^{m_n} & \delta'_{1m_n}, \quad \delta'_{2m_n}, \ldots, \delta'_{km_n}, \ldots & D_n^{p_n} & \delta''_{1p_n}, \quad \delta''_{2p_n}, \ldots, \delta''_{kp_n}, \ldots \end{array}$$

где положено

$$\delta'_{ik} = (a'_{ik}, b'_{ik}) \text{ и } \delta''_{ik} = (a''_{ik}, b''_{ik}).$$

Преобразуем эти таблицы. Пусть Δ'_{ik} и Δ''_{ik} — множества, состоящие из смежных интервалов соответственно множеств E_n^k и D_n^k с длиной не меньшей, чем $\frac{1}{i}$. Очевидно, что множества Δ'_{ik} и Δ''_{ik} состоят из конечного числа смежных интервалов. Получим таблицы

$$\begin{array}{ll} \Delta'_{10}, \quad \Delta'_{20}, \ldots, \Delta'_{k0}, \ldots & \Delta''_{10}, \quad \Delta''_{20}, \ldots, \Delta''_{k0}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta'_{1m_n}, \quad \Delta'_{2m_n}, \ldots, \Delta'_{km_n}, \ldots & \Delta''_{1p_n}, \quad \Delta''_{2p_n}, \ldots, \Delta''_{kp_n}, \ldots \end{array}$$

При этом очевидно, что $\Delta'_{i,k} \supset \Delta'_{i-1,k}$ и $\Delta''_{i,k} \supset \Delta''_{i-1,k}$ $\Delta'_{ik} \supset \Delta'_{i,k-1}$ и $\Delta''_{ik} \supset \Delta''_{i,k-1}$. В последнем случае знак включения понимается как покрытие.

Построим последовательность непрерывных функций $\{h_n^k(x)\}$, обладающую следующими свойствами: 1. $\lim\limits_{k\to\infty} h_n^k(x) = h_n(x)$ и 2. $\{h_n^k(x)\}$ имеет боковую сходимость к $\varphi_n(x)$ типа A и C_A и к $\psi_n(x)$ типа B и C_B с точностью до σ_n.

Последнее надо понимать так: пусть $\varphi'_n(x)$ и $\psi'_n(x)$ — соответственно верхняя и нижняя функции для последовательности $\{h_n^k(x)\}$, тогда $0 \leqslant \varphi_n(x) - \varphi'_n(x) \leqslant \sigma_n$ и $0 \leqslant \psi'_n(x) - \psi_n(x) \leqslant \sigma_n$.

Возможны два случая:

1. $E_n^0 = D_n^0 = 0$, тогда полагаем $h_n^k(x) = h_n(x)$ $k = 1, 2, \ldots$ Последовательность $\{h_n^k(x)\}$ очевидно удовлетворяет вышеперечисленным свойствам.

2. По крайней мере одно из множеств E_n^0 или D_n^0 не пусто. В дальнейшем, если $E_n^0 = 0$, то соответствующую ему таблицу не рассматриваем, если $D_n^0 = 0$, то поступаем аналогично.

Для построения $h_n^k(x)$ во втором случае рассмотрим k-тые столбцы таблиц

$$\Delta'_{k0}, \Delta'_{k1}, \ldots, \Delta'_{km_n}, \quad \Delta''_{k0}, \Delta''_{k1}, \ldots, \Delta''_{kp_n}. \qquad (*)$$

Мы имеем совокупность систем смежных интервалов. Концы этих смежных интервалов (их конечное число) определяют конечную систему точек $A_k^1, A_k^2, \ldots, A_k^{s_k}$.

Положим

$$\alpha_k = \min_{(r,\,l)\, r \neq l} \left\{ \frac{1}{k}, \ \rho(A_k^r, A_k^l) \right\}, \text{ где } 1 \leqslant r, l \leqslant s_k. \qquad (**)$$

Отложим отрезки длины $\frac{\alpha_k}{3}$ от концов A_k^r внутрь смежных интервалов, рассматриваемой системы (*). В силу выбора α_k, полученные отрезки не содержат внутри себя точек системы (**). Вне построенных отрезков полагаем $h_n^k(x) = h_n(x)$. Определим функцию $h_n^k(x)$ на отрезках.

I. Пусть отрезок длины $\frac{\alpha_k}{3}$ отложен вправо от точки A_k^r. На этом отрезке $\left[a_k^r, a_k^r + \frac{\alpha_k}{3}\right]$ (a_k^r—абсцисса точки A_k^r), множество L_n^0 нигде не плотно. В таком случае на нем найдется интервал, не содержащий точек множества L_n^0. Возьмем для определенности наибольший из таких интерва-

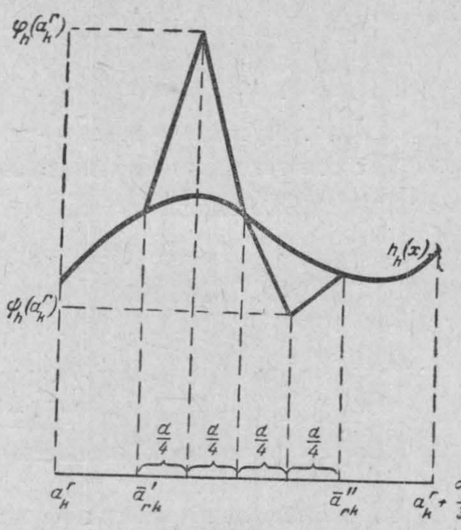

Рис. 3

лов, если их несколько, то самый близкий к точке A_k^r. Пусть это будет $(\bar{a}'_{kr}, \bar{a}''_{kr})$. На $\left[a_k^r, a_k^r + \frac{\alpha_k}{3}\right] - (\bar{a}'_{kr}, \bar{a}''_{kr})$ полагаем $h_n^k(x) = h_n(x)$. Далее определим $h_n^k(x)$ на $(\bar{a}'_{kr}, \bar{a}''_{kr})$ следующим образом:

Пусть $\bar{a}''_{kr} - \bar{a}'_{kr} = d$

$$h_n^k(x) = \begin{cases} h_n(\bar{a}'_{kr}) & \text{при } x = \bar{a}'_{kr} \\ \varphi_n(\bar{a}_k^r) & x = \bar{a}'_{kr} + \frac{d}{4} \\ h_n\left(\bar{a}'_{kr} + \frac{d}{2}\right) & x = \bar{a}'_{kr} + \frac{d}{2} \\ \psi_n(\bar{a}'_{kr}) & x = \bar{a}'_{kr} + \frac{3d}{4} \\ h_n(\bar{a}_k^r) & x = \bar{a}''_{kr} \\ \text{в остальных частях интервала } (\bar{a}'_{kr}, \bar{a}''_{kr}) - \text{линейно.} \end{cases}$$

II. Отрезок длины $\frac{\alpha_k}{3}$ отложен влево от точки A_k^r. В этом случае $h_n^k(x)$ определяется аналогично.

Очевидно, что построенная функция $h_n^k(x)$ непрерывна. Покажем, что $\lim\limits_{k \to \infty} h_n^k(x) = h_n(x)$.

1. Пусть $x_0 \in L_n^0$, тогда $h_n(x_0) = h_n(x_0)$ для любого номера k, и все доказано.

2. Пусть $x_0 \bar{\in} L_n^0$, значит, $x_0 \bar{\in} E_n^0$ и $x_0 \bar{\in} D_n^0$, поэтому точка x_0 принадлежит смежному интервалу $\delta' = (a', b')$ к множеству E_n^0 и смежному интервалу $\delta'' = (a'', b'')$ к множеству D_n^0.

Положим $\beta = \min\{\rho(a', x_0), \rho(x_0, b'), \rho(a'', x_0), \rho(x_0, b'')\}$. Пусть далее $k_0 > \frac{1}{3\beta}$. Тогда при $k \geqslant k_0$, $\frac{a_k}{3} \leqslant \frac{1}{3k} \leqslant \frac{1}{3k_0} < \beta$, т. е. точка x_0 лежит вне откладываемых отрезков длины $\frac{a_k}{3}$. Поэтому при $k > k_0$ $h_n^k(x_0) = h_n(x_0)$; этим сходимость доказана.

Теперь покажем, что $\{h_n^k(x)\}$ имеет боковую сходимость к $\varphi_n(x)$ типа A и C_A с точностью до σ_n. Аналогично доказывается боковая сходимость к $\psi(x)$ типа B и C_B с точностью до σ_n. Сначала покажем, что выполнено 1-е условие сильной боковой сходимости.

1. Пусть $x_0 \bar{\in} E_n^0$. Тогда $x_0 \in \delta' = (a', b')$ — смежному к множеству E_n^0. С другой стороны $\varphi_n(x_0) = h_n(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} h_n^k(x_0)$, поэтому 1-е условие сильной боковой сходимости выполнено.

2. Пусть $x_0 \in E_n^0$, тогда существует такое число m, что $x_0 \in E_n^m$ и $x_0 \bar{\in} E_n^{m+1}$, так как множеств $E_n^m \neq 0$ конечное число.

а) x_0 — точка 1-го рода или изолированная замкнутого множества E_n^m. В этом случае имеет место также точная боковая сходимость к $\varphi_n(x_0)$. В самом деле, пусть — ε произвольное положительное число. Так как x_0 — точка 1-го рода или изолированная для множества E_n^m, то она является концом смежного интервала δ'_{rm} длины ρ, т. е. $x_0 = a_k^r$. Пусть $k_0 \geqslant \max\left(\frac{1}{3\varepsilon}, \frac{1}{\rho}\right)$. Тогда при $k \geqslant k_0$ интервал δ'_{rm} входит в систему $\Delta'_{k0}, \Delta'_{k1}, \ldots, \Delta'_{km_n}$, так как $\frac{1}{\rho} \leqslant k_0 \leqslant k$ или $\rho \geqslant \frac{1}{k}$. По построению функции $h_n^k(x)$ на интервале $\left(x_0 - \frac{a_k}{3}, x_0 + \frac{a_k}{3}\right)$ найдется такая точка x_k, что $h_n^k(x_k) = \varphi_n(a_k^r) = \varphi_n(x_0)$ и $|x_k - x_0| < \frac{a_k}{3} \leqslant \frac{1}{3_k} < \varepsilon$ при $k \geqslant k_0$. Тогда $\sqrt{(x_0 - x_k)^2 + [\varphi_n(x_0) - h_n^k(x_k)]^2} = \sqrt{(x_0 - x_k)^2} = |x_0 - x_k| < \varepsilon$ при $k \geqslant k_0$. Значит, в этом случае 1-е условие сильной боковой сходимости выполнено.

b) x_0 — точка 2-го рода замкнутого множества E_n^m. В этом случае имеет место боковая сходимость к $\varphi_n(x_0)$ с точностью до σ_n.

Так как $x_0 \bar{\in} E_n^{m+1}$, то $x_0 \in \delta'_{r,m+1} = (a'_{r,m+1}, b'_{r,m+1})$ — смежному интервалу к множеству E_n^{m+1}, и $\omega[\varphi_n(x_0), E_n^m] < \sigma_n$. Поэтому найдется такое $\eta > 0$, что $|\varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)| < \sigma_n$ для $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap E_n^m$. Возьмем произвольное положительное число ε. Пусть

$$\beta = \min\{\rho(a'_{r,m+1}, x_0), \rho(x_0, b'_{r,m+1}), \varepsilon, \eta\}.$$

Пусть δ — смежный интервал к E_n^m, обладающий тем свойством, что длина интервала $\delta \cap S(x_0, \beta)$ наибольшая (если их несколько, берем самый близкий к точке x_0). Пусть длина $\delta \cap S(x_0, \beta)$ равна ρ, $k_0 \geqslant \frac{1}{\rho}$ и $k \geqslant k_0$. По крайней мере один из концов интервала δ вместе с частью интервала δ длины ρ расположен в $S(x_0, \beta)$. Так как длина интервала δ

больше или равна ρ и $k \geqslant \frac{1}{\rho}$, то интервал δ попадает в систему (*). И так как $\frac{a_k}{3} \leqslant \frac{1}{3k} \leqslant \frac{1}{3k_0} < \frac{1}{k_0} \leqslant \rho$, то на интервале $\delta \cap S(x_0, \beta)$ длины ρ $h_n^k(x)$ определена так, как указано в пунктах I и II. В силу того, что конец y интервала δ лежит в $S(x_0, \beta) \subset S(x_0, \eta)$, то $|y - x_0| < \beta \leqslant \eta$ $\varphi_n(y) > \varphi_n(x_0) - \sigma_n$. И значит, при $k \geqslant k_0$ на $[x_0 - \beta, x_0 + \beta]$

$$\max h_n^k(x) \geqslant \varphi_n(x_0) - \sigma_n \quad (\beta \leqslant \varepsilon).$$

Значит первое условие сильной боковой сходимости выполнено.

Покажем, что выполнено второе условие слабой боковой сходимости. Возьмем произвольное $\eta > 0$. В силу полунепрерывности сверху функции $\varphi_n(x)$ найдется такое число $\gamma > 0$, что при $|x - x_0| < \gamma$

$$\varphi_n(x) < \varphi_n(x_0) + \eta.$$

Далее, неравенство $h_n^k(x) < \varphi_n(x_0) + \eta$ может не выполняться, если существует такое значение x вне интервала $(x_0 - \gamma, x_0 + \gamma)$, что $\varphi_n(x) \geqslant \varphi_n(x_0) + \eta$ и отвечающий ему отрезок длины $\frac{a_k}{3}$ пересекается интервалом $(x_0 - \gamma, x_0 + \gamma)$. В таком случае при $k \geqslant k_0 > \frac{2}{3\gamma}$, $\frac{a_k}{3} \leqslant \frac{1}{3k} \leqslant \frac{1}{3k_0} < \frac{\gamma}{2}$ и потому такой отрезок длины $\frac{a_k}{3}$ не пересекается с интервалом $\left(x_0 - \frac{\gamma}{2}, x_0 + \frac{\gamma}{2}\right)$. Значит при $k \geqslant k_0$ и $x \in \left(x_0 - \frac{\gamma}{2}, x_0 + \frac{\gamma}{2}\right)$ $h_n^k(x) < \varphi_n(x_0) + \eta$, т. е. выполнено второе условие слабой боковой сходимости. Этим доказана боковая сходимость последовательности непрерывных функций $\{h_n^k(x)\}$ к $\varphi_n(x)$ с точностью до σ_n.

Итак, мы построили последовательность непрерывных функций $h_n^1(x), h_n^2(x), \ldots, h_n^k(x), \ldots$, сходящуюся к $h_n(x)$ и имеющую боковую сходимость с точностью до σ_n к функциям $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ в указанном смысле.

Рассмотрим последовательность

$$h_1^{\beta_1}(x),\ h_2^{\beta_2}(x), \ldots, h_k^{\beta_k}(x), \ldots, \text{ где } \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_k < \ldots$$

Докажем, что предел $\{h_k^{\beta_k}(x)\}$ существует и равен $f(x)$.

1. Пусть $x \overline{\in} \sum_{n=1}^{\infty} L_n^0$. Так как тогда $x_0 \overline{\in} \sum_{n=1}^{\infty} P_n$, то x_0 — точка непрерывности функции $f(x)$. Далее из того, что $x_0 \overline{\in} \sum_{n=1}^{\infty} E_n^0$ и $x_0 \overline{\in} \sum_{n=1}^{\infty} D_n^0$, следует, что точки $(x_0, \varphi(x_0))$ и $(x_0, \psi(x_0))$ лежат в $S(F_{\min}, \sigma_n)$ при любом n, значит, принадлежат $F_{\min}$. Тогда $\varphi(x_0) = M(f, x_0) = f(x_0)$ и $\psi(x_0) = m(f, x_0) = f(x_0)$ — в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0. Отсюда следует, что x_0 — точка непрерывности функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что при $|x - x_0| < \eta$

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |\psi(x) - \psi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Кроме того, $\psi(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$, потому значения функции $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ для $x_0 - \eta < x < x_0 + \eta$ лежат в прямоугольнике

$$|x - x_0| < \eta \quad |y - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем $\sigma_{k_0} \leqslant \frac{\min(\varepsilon, \eta)}{2}$ и пусть $k \geqslant k_0$.

Тогда в силу выбора номера k часть полосы $|x - x_0| < \frac{\eta}{2}$, лежащая вне прямоугольника $|x - x_0| < \frac{\eta}{2}$, $|y - f(x_0)| < \varepsilon$, лежит вне $S(F_{\min}, \sigma_k)$. В таком случае, так как график функции $h_k(x)$ по определению лежит в $S(F_{\min}, \sigma_k)$, для $|x - x_0| < \frac{\eta}{2}$ и $k \geqslant k_0$ $|f(x_0) - h_k(x)| < \varepsilon$. Положим $k_1 \geqslant \max\left\{\frac{4}{3\eta}, k_0\right\}$. При $k \geqslant k_1$, $\beta_k \geqslant k \geqslant k_1 \geqslant \frac{4}{3\eta}$, т. е. $\alpha_k \leqslant \frac{1}{\beta_k} \leqslant \frac{3\eta}{4}$. Далее, на $\left(x_0 - \frac{\eta}{2}, x_0 + \frac{\eta}{2}\right)$ графики функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $h_k(x)$ $(k \geqslant k_1 \geqslant k_0)$ лежат внутри прямоугольника

$$|x - x_0| < \frac{\eta}{2} \quad |y - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Неравенство $|h_k^{\beta_k}(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ может не выполняться, если существует такое значение x вне интервала $\left(x_0 - \frac{\eta}{2}, x_0 + \frac{\eta}{2}\right)$, что $|\varphi_k(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$ или $|\psi_k(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$ и отвечающий ему отрезок длины $\frac{\alpha_k}{3}$ пересекается с интервалом $\left(x_0 - \frac{\eta}{2}, x_0 + \frac{\eta}{2}\right)$.

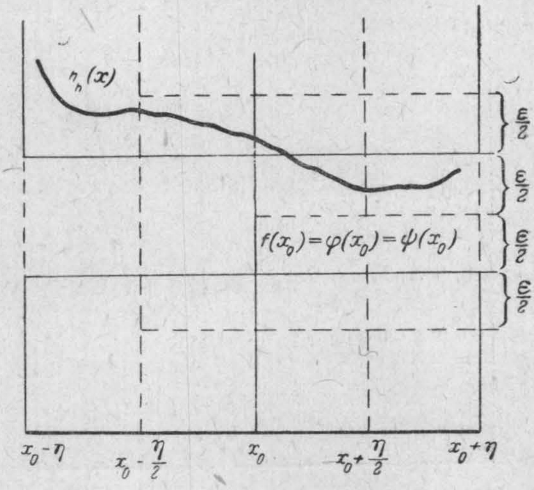

Рис. 4

В таком случае при $k \geqslant k_1$. $\frac{\alpha_k}{3} \leqslant \frac{\eta}{4}$ и такой отрезок длины $\frac{\alpha_k}{3}$ не пересекается с интервалом $\left(x_0 - \frac{\eta}{4}, x_0 + \frac{\eta}{4}\right)$. Значит, при $k \geqslant k_1$ на $\left(x_0 - \frac{\eta}{4}, x_0 + \frac{\eta}{4}\right)$, $|h_k^{\beta_k}(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ и, в частности, $|h_k^{\beta_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. Пусть $x_0 \in \sum_{n=1}^{\infty} L_n^0$. Тогда выполняется по крайней мере одно из трех соотношений.

a) $x_0 \in P_n$ при $n \geqslant n_0$, *b*) $x_0 \in E_p^0$ при $p \geqslant p_0$, *c*) $x_0 \in D_r^0$ при $r \geqslant r_0$. Пусть имеет место a). Тогда $\omega(f, x_0) \geqslant \sigma_{n_0}$. Пусть при $k \geqslant k_0$

$$|h_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Если $k \geqslant \max\{n_0, k_0\}$, то $x_0 \in P_k \subset L_k^0$, и значит, $h_k^{\beta_k}(x_0) = h_k(x_0)$ и $|h_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$, т. е. $|h_k^{\beta_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$.

В случае *b*) $x_0 \in E_p^0$ при $p \geqslant p_0$. Пусть при $k \geqslant k_0$ $|h_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$. Тогда при $k \geqslant \max\{p_0, k_0\}$, $x_0 \in E_k^0 \subset L_k^0$, значит, $h_k^{\beta_k}(x_0) = h_k(x_0)$ и $|h_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$, т. е. $|h_k^{\beta_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$.

И, наконец, в случае *c*) $x_0 \in D_r^0$ при $r \geqslant r_0$. Пусть при $k \geqslant k_0$, $|h_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$. Тогда при $k \geqslant \max\{r_0, k_0\}$, $x_0 \in D_k^0 \subset L_k^0$; значит,

$$h_k^{\beta_k}(x_0) = h_k(x_0) \text{ и } |h_k(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ т. е. } |h_k^{\beta_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Этим доказано, что $\lim_{k\to\infty} h_k^{\beta_k}(x) = f(x)$.

Подберем верхние индексы β_k так, чтобы $\{h_k^{\beta_k}(x)\}$ имела боковую сходимость к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Мы показали, что последовательность непрерывных функций $\{h_n^k(x)\}$ имеет боковую сходимость с точностью до σ_n к $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$. В силу лемм 6 и 7 существует такое натуральное число k_n, что график функции $h_n^k(x)$ при $k \geqslant k_n$ лежит в $2\sigma_n$ — окрестности топологического предела (здесь $\overline{F} = \underline{F}$) и проходит через $2\sigma_n$ окрестность любой точки топологического предела.

Положим $\beta_1 = k_1$, $\beta_2 > \max(k_2, \beta_1), \ldots, \beta_n > \max(k_n, \beta_{n-1}), \ldots$ Очевидно, что $\{h_k^{\beta_k}(x)\}$ имеет боковую сходимость к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно типа А и C_A и типа В и C_B.

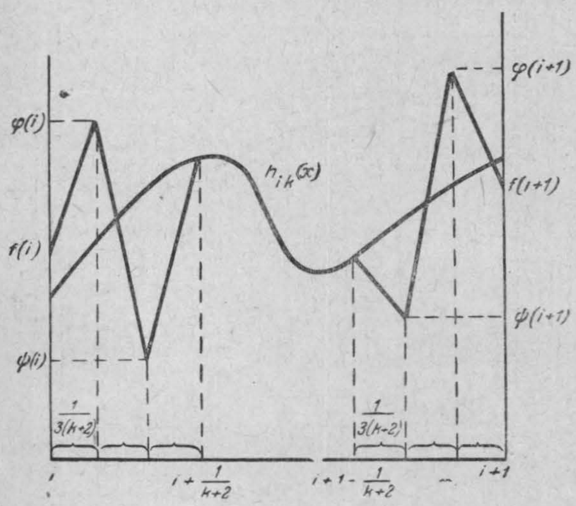

Рис. 5

Теперь построим *последовательность непрерывных функций, сходящуюся к данной ограниченной функции* $f(x)$ *и имеющую боковую сходимость к ограниченным функциям* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *соответственно типов* А *и* C_A, В *и* C_B *на всей оси* x*-ов. Причем* $f(x)$ — *функция 1-го класса,* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ — *полунепрерывные функции соответственно сверху и снизу и совпадающие на множестве второй категории.*

Разобьем ось x-ов на четное число сегментов $\{\delta_i\}$ точками, имеющими целые абсциссы. Для этого положим $\delta_i = [i, i+1]$, где $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Как было показано, существует последовательность непрерывных функций $\{h_{i,k}(x)\}$, которая на сегменте δ_i сходится к $f(x)$ и имеет боковую сходимость в вышеуказанном смысле к $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Возьмем функции $h_{i,k}(x)$ $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, непрерывные соответственно на сегментах δ_i $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Определим непрерывную функцию на всей оси x-ов следующим образом:

$$h_k(x) = \begin{cases} f(i) & x = i \\ \varphi(i) & x = i + \dfrac{1}{3(k+2)} \\ \psi(i) & x = i + \dfrac{2}{3(k+2)} \\ h_{i,k}(x) & i + \dfrac{1}{k+2} \leqslant x \leqslant i + 1 - \dfrac{1}{k+2} \\ \psi(i+1) & x = i + 1 - \dfrac{2}{3(k+2)} \\ \varphi(i+1) & x = i + 1 - \dfrac{1}{3(k+2)} \\ f(i+1) & x = i + 1 \end{cases}$$

В остальных частях сегмента δ_i — линейно, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Легко видеть, что полученная последовательность непрерывных функций

$\{h_k(x)\}$ на всей оси x-ов сходится к $f(x)$ и имеет боковую сходимость в вышеуказанном смысле к $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Далее освободимся от требования ограниченности функций $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Пусть заданы функции $f(x)$ — 1-го класса, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — полунепрерывные соответственно сверху и снизу и совпадающие на множестве 2-й категории. Подвергнем эти функции преобразованию

$$\left.\begin{array}{lll} \text{при} & 0 \leqslant y \leqslant +\infty & z = \dfrac{y}{1+y} \\ \text{и при} & -\infty \leqslant y \leqslant 0 & z = \dfrac{y}{1-y} \end{array}\right\} \qquad (\bullet)$$

Получим функции $\tilde{f}(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$, которые, как нетрудно убедиться, будут обладать теми же свойствами, что и исходные функции $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и, кроме того, $-1 \leqslant \tilde{f}(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x) \leqslant +1$.

Построим последовательность непрерывных функций $\{h_k(x)\}$, сходящуюся к $\tilde{f}(x)$ и имеющую боковую сходимость к $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ соответственно типов А и $С_A$, В и $С_B$. Причем можно считать, что $|h_k(x)| \leqslant 1$, так как $-1 \leqslant \tilde{f}(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x) \leqslant +1$. Пусть $\{\tau_k\}$ — последовательность положительных чисел, монотонно стремящихся к 1 и $\tau_k < 1$. Рассмотрим $\{\tau_k h_k(x)\}$ — последовательность непрерывных функций, сходящуюся к $\tilde{f}(x)$ и имеющую боковую сходимость в указанном смысле к $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ и, кроме того, $|\tau_k h_k(x)| \leqslant \tau_k < 1$. Над этими функциями совершим обратное k $(\bullet)$ преобразование, получим последовательность $\{f_k(x)\}$. Так как $|\tau_k h_k(x)| < 1$, то $f_k(x)$ — непрерывна. Нетрудно убедиться, что последовательность непрерывных функций $\{f_k(x)\}$ сходится к $f(x)$ и имеет боковую сходимость к $\varphi(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно типов А и $С_A$, В и $С_B$.

Основную теорему можно обобщить следующим образом: *даны функции* $\overline{\varphi(x)} \geqslant \underline{\varphi(x)} \geqslant f(x) \geqslant \underline{\psi(x)} \geqslant \overline{\psi(x)}$, *где* $f(x)$ — *функция 1-го класса,* $\overline{\varphi(x)}$, $\underline{\varphi(x)}$ — *полунепрерывные сверху функции, а* $\overline{\psi(x)}$ *и* $\underline{\psi(x)}$ *полунепрерывные снизу функции и* $\overline{\varphi(x)} = \overline{\psi(x)}$ *на множестве 2-й категории. Требуется построить последовательность непрерывных функций* $\{f_n(x)\}$, *сходящуюся к* $f(x)$ *и чтобы их графики сходились к заданному верхнему топологическому пределу* $[\overline{\varphi(x)}, \overline{\psi(x)}]$ *и заданному нижнему топологическому пределу* $[\underline{\varphi(x)}, \underline{\psi(x)}]$. Другими словами, чтобы $\{f_n(x)\}$ имела в указанном смысле слабую боковую сходимость к $\overline{\varphi(x)}$ и $\overline{\psi(x)}$ и сильную боковую сходимость к $\underline{\varphi(x)}$ и $\underline{\psi(x)}$.

Пусть $\{f_{2n}(x)\}$ сходится к $f(x)$ и имеет боковую сходимость к $\overline{\varphi(x)}$ и $\overline{\psi(x)}$ и $\{f_{2n+1}(x)\}$ сходится к $f(x)$ и имеет боковую сходимость к $\underline{\varphi(x)}$ и $\underline{\psi(x)}$ в указанном смысле. Тогда $\{f_n(x)\}$ дает решение поставленной задачи.

Поступила в редакцию
22.8.1949 г.

Кафедра
теории функций