Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 9—1950

МЕХАНИКА

В. В. ДОБРОНРАВОВ

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА НЕГОЛОНОМНЫХ КООРДИНАТ К НЕКОТОРЫМ ВОПРОСАМ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД[1]

Метод неголономных координат возник главным образом в связи с открытием в общей механике существования обширного класса так называемых неголономных механических систем, т. е. систем, движение которых подчинено таким условиям (связям), которые выражаются дифференциальными соотношениями между координатами системы, не сводящимися к конечным соотношениям (не интегрируемыми).

Положим, что геометрическая конфигурация некоторой механической системы определяется совокупностью координат $(q^1, q^2, \ldots q^n)$; введем далее совокупности некоторых координат π^i в пространствах, касательных к пространству q^i в различных его точках; таким образом, переход от первоначальных координат q^i к π^i будет происходить при помощи некоторых дифференциальных соотношений[2].

$$d\pi^i = \alpha^i_j dq^j \quad (i, j = 1, 2, \ldots n). \tag{1}$$

В случае, когда система уравнений (1) не интегрируема, то новая система π^i и будет называться системой неголономных координат. Для изучения неголономных механических систем неголономные координаты оказались весьма удобными по той, во-первых, причине, что при наличии у системы неголономных связей последние, при помощи соответствующего подбора неголономных координат, могут быть выражены весьма просто в виде

$$d\pi^a = 0 \quad (a = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Кроме того, употребление неголономных координат позволяет составлять уравнения движения единообразной формы как для голономных механических систем, так и неголономных.

Элементы аппарата неголономных координат можно проследить еще в трудах основоположника классической аналитической механики — Ж. Лагранжа [1].

Систематическая разработка данного аппарата началась, как мы уже указывали, после открытия неголономных механических систем, в девяностых годах прошлого столетия.

---

[1] Доклад, прочитанный на Ломоносовских чтениях МГУ, 21.4.1950 г.

[2] В данной статье мы будем употреблять тензорные обозначения, т. е. индекс суммирования ставится наверху и внизу одновременно.

Здесь мы должны в первую очередь упомянуть про работы итальянского математика В. Вольтерры, немецкого физика Л. Больтцманна (ему, собственно говоря, принадлежит термин «неголономные координаты»).

Далее, с развитием тензорных методов в современной многомерной дифференциальной геометрии научными школами голландского геометра Скоутена и советских геометров В. Ф. Кагана, В. В. Вагнера, П. К. Рашевского, а также в связи с приложением этих методов к ряду вопросов теории относительности и современной теоретической физики, аппарат теории неголономных координат сделался мощным и необходимым аппаратом во всех указанных областях.

Перевод всей аналитической динамики на язык неголономных координат сделан в нашей докторской диссертации [5], где мы показали, что метод неголономных координат с успехом может быть применен и к динамике голономных механических систем.

При этом мы считаем необходимым подчеркнуть то обстоятельство, что применение метода неголономных координат не является вопросом только формально математических преобразований, которые необходимо проделывать в ряде случаев для того, чтобы получить результаты, не выявляющиеся в обычных системах координат; дело в том, что часто нам приходится иметь дело с такими реально существующими физическими величинами, которые задаются только в виде своих дифференциалов, как, например, элемент площади в полярных координатах, угол поворота вокруг мгновенной оси твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки, энтропия и т. д. При изучении тех или иных вопросов, в которых фигурируют подобные неголономные величины, применение аппарата неголономных координат может тоже дать полезные результаты.

Применение метода неголономных координат к механике сплошных сред до сих пор не производилось ввиду, повидимому, специфического отличия сплошной среды от механических систем с конечным числом степеней свободы.

Переходя к неголономным координатам, мы вводим в рассмотрение некоторые линейные дифференциальные формы; от вида этих форм и зависят все дальнейшие результаты. В механике сплошных сред можно указать, например, одну дифференциальную форму, которая во многом определяет механическое состояние среды.

Пусть мы имеем некоторое поле физического вектора, приложенного в различных точках пространства

$$\bar{a} = \bar{a}(\bar{r}) \tag{3}$$

и характеризующего как-то данную механическую сплошную систему (поле скоростей в гидромеханике или поле смещений в теории упругости и т. д.).

Составим элементарную циркуляцию вектора $\bar{a}$

$$d\Gamma = \bar{a}\,d\bar{r}. \tag{4}$$

В случае, когда Г будет голономной величиной, поле $\bar{a}$ будет градиентным (потенциальным), в случае неголономности Г, поле $\bar{a}$ будет вихревым.

В различных приложениях механики сплошных сред большую роль играют векторные поля с двумя типами связей, наложенных на них: случай векторного поля такого, для которого поле его вихрей будет ортогонально к первоначальному полю, т. е.

$$\bar{a} \operatorname{rot} \bar{a} = 0 \tag{5}$$

и случай, когда поле вихрей будет коллинеарно, с исходным, т. е.

$$\bar{a} = 2k \operatorname{rot} \bar{a}. \tag{6}$$

Мы будем называть вихревое поле первого класса поперечным вихревым полем, а вихревое поле второго класса продольным (винтовым).

В современных приложениях гидромеханики (а пожалуй, и теории упругости) оба поля, конечно, очень часто встречаются, в особенности второе (продольных вихрей), как, например, в теории турбин, винтов, теории турбулентности и т. д.

Вопросом разыскания возможных распределений полей типа (6) занимался ряд авторов[1], в частности, русский механик И. Громеко [2], который решил эту задачу в случае, когда k—коэффициент коллинеарности—есть постоянная величина. В данной нашей работе мы покажем, что, применяя метод неголономных координат, можно составить уравнения, которым должны удовлетворять все возможные распределения вихревых полей, с различными коэффициентами k, являющимися произвольными функциями точки пространства, занимаемого полем[2].

Для этой цели перейдем к произвольной локальной системе координат, в которой дифференциальная форма (4) примет вид:

$$a\, d\bar{r} = \alpha_i\, d\pi^i \quad (i = 1, 1, 3), \tag{7}$$

где $d\pi^i$ суть дифференциалы неголономных, вообще говоря, координат. Но при наложении на вектор $\bar{a}$ связи (6) можно определить различные системы этих координат π^i в виде голономных функций точки, а следовательно, и найти соответствующие распределения векторных полей. Действительно, в этом случае мы, во-первых, будем иметь на основании (7)

$$a_x = \alpha_i \frac{\partial \pi^i}{\partial x}, \quad a_y = \alpha_i \frac{\partial \pi^i}{\partial y}; \quad a_z = \alpha_i \frac{\partial \pi^i}{\partial z}. \tag{8}$$

Тогда выражение вихря вектора a примет вид:

$$\operatorname{rot} \bar{a} = [\operatorname{grad} \alpha_1 \operatorname{grad} \pi^2] + [\operatorname{grad} \alpha_2 \operatorname{grad} \pi^2] + [\operatorname{grad} \alpha_3 \operatorname{grad} \pi^3]. \tag{9}$$

На основании же условия (6) мы из (9) и (8) получим три дифференциальных уравнения относительно семи искомых функций:

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \pi^1, \quad \pi^2, \quad \pi^3, \quad k.$$

Напишем одно из этих уравнений:

$$\alpha_1 \frac{\partial \pi^1}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial \pi^2}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial \pi^3}{\partial x} =$$
$$= 2k \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \frac{\partial \pi^1}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \frac{\partial \pi^1}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \frac{\partial \pi^2}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} \frac{\partial \pi^2}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} \frac{\partial \pi^3}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial z} \frac{\partial \pi^3}{\partial y} \right). \tag{10}$$

Другие два уравнения напишутся после циклической перестановки индексов. Решение общей проблемы изыскания всех винтовых векторных полей сводится к нахождению всевозможных решений системы уравнений (10).

Таким образом, любое продольное вихревое поле должно удовлетворять уравнениям вида (10). Для нахождения же искомых полей следует задавать четыре произвольных функции, остальные же находить

---

[1] В известном руководстве по теоретической гидромеханике трех авторов— Н. Е. Кочина, И. А. Кибеля и Н. В. Розе приведен один частный случай (принадлежащий Бельтрами) такого вихревого поля для одного вида коэффициента «k». Отсылаем также к работе Н. И. Алексеева [3] и к работам С. С. Бюшгенса, С. Г. Попова, М. Хилла, Е. Бельтрами, Морера, Кальдонаццо, Синджа и Лекорню.

[2] По i происходит суммирование от 1 до 3.

из (10). При этом, очевидно, мы не сможем брать все α_i в виде постоянных одновременно, т. к. в этом случае вектор $\bar{a}$ будет потенциальным.

Безусловно все различные частные винтовые потоки, найденные указанными выше авторами, могут быть получены из (10) при помощи соответствующего подбора произвольных функций.

Укажем только некоторые распределения, когда система (10) решается в квадратурах и частным случаем которого является упомянутый нами выше пример из книги Н. Е. Кочина.

Для этой цели положим $\alpha_3=0$, $\alpha_1=1$.

Тогда система (10) упростится и перейдет в следующую:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\pi^1}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial\pi^2}{\partial x}=2k\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial y}\frac{\partial\pi^2}{\partial z}-\frac{\partial\alpha^2}{\partial z}\frac{\partial\pi^2}{\partial y}\right),\\
&\frac{\partial\pi^1}{\partial y}+\alpha_2\frac{\partial\pi^2}{\partial y}=2k\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial z}\frac{\partial\pi^2}{\partial x}-\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\frac{\partial\pi^2}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial\pi^1}{\partial z}+\alpha_2\frac{\partial\pi^2}{\partial z}=2k\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}\frac{\partial\pi^2}{\partial y}-\frac{\partial r_2}{\partial y}\frac{\partial\pi^2}{\partial x}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

Исключая k, получим систему двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{grad}\pi^1\operatorname{grad}\pi^2+\alpha_2(\operatorname{grad}\pi^2)^2=0,\\
&\operatorname{grad}\alpha_2\operatorname{grad}\pi^1+\alpha_2\operatorname{grad}\alpha_2\operatorname{grad}\pi^2=0.
\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

В случаях рассмотрения сферических или цилиндрических областей целесообразно переписывать уравнения (12) в соответствующих криволинейных координатах. Задавая подходящим образом одну из трех неизвестных функций, входящих в (12), можем получить то или иное решение задачи в квадратурах.

Например, в цилиндрических координатах уравнения (12) примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\pi^1}{\partial r}\frac{\partial\pi^2}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\pi^1}{\partial\theta}\frac{\partial\pi^2}{\partial\theta}+\frac{\partial\pi^1}{\partial z}\frac{\partial\pi^2}{\partial z}+\alpha_2\left[\left(\frac{\partial\pi^2}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\pi^2}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial\pi^2}{\partial z}\right)^2\right]=0,\\
&\frac{\partial\alpha_2}{\partial r}\frac{\partial\pi^1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\theta}\frac{\partial\pi^1}{\partial\theta}+\frac{\partial\alpha_2}{\partial z}\frac{\partial\pi^1}{\partial z}+\alpha_2\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial r}\frac{\partial\pi^2}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\alpha_2}{\partial\theta}\frac{\partial\pi^2}{\partial\theta}+\frac{\partial\alpha_2}{\partial z}\frac{\partial\pi^2}{\partial z}\right)=0.
\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

Полагая $\pi^2=\theta$, найдем $\alpha_2=-\frac{\partial\pi^1}{\partial\theta}$, после чего получим такое уравнение относительно π^1:

$$\frac{\partial\pi^1}{\partial r}\frac{\partial^2\pi^1}{\partial r\,\partial\theta}+\frac{\partial\pi^1}{\partial z}\frac{\partial^2\pi^1}{\partial\theta\,\partial z}=0.\tag{14}$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\left(\frac{\partial\pi^1}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\pi^1}{\partial z}\right)^2\right\}=0\tag{15}$$

и следовательно,

$$\left(\frac{\partial\pi^1}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\pi^1}{\partial z}\right)^2=F(r,z),\tag{16}$$

где $F(r, z)$ есть произвольная функция от r и z. Далее, разделением переменных найдем

$$\pi^1=\int\sqrt{f(r)+\psi(\theta)}\,dr+\int\sqrt{\omega(z)-\psi(\theta)}\,dz+\Phi(\theta),\tag{17}$$

где $f(r)$, $\psi(\theta)$, $\omega(z)$, $\Phi(\theta)$ являются произвольными функциями.

Затем выражаем α_2

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}\left\{\int \frac{dr}{\sqrt{f(r)+\psi(\theta)}} - \int \frac{dz}{\sqrt{\omega(z)-\psi(\theta)}}\right\}\psi'(\theta) + \frac{d\Phi}{d\theta}. \quad (18)$$

Соотношение (7) примет вид:

$$a_x dx + a_y d_y + a_z dz = d\pi^1 - \frac{\partial \pi^1}{\partial \theta} d\theta = \frac{\partial \pi^1}{\partial r} dr + \frac{\partial \pi^1}{\partial z} dz. \quad (19)$$

Выражая dx, dy через dr и $d\theta$, мы можем найти такое вихревое продольное поле (скажем, соответствующий поток в цилиндрической трубе):

$$a_x = \frac{\partial \pi^1}{\partial r}\cos\theta, \quad a_y = \frac{\partial \pi^1}{\partial z}\sin\theta, \quad a_z = \frac{\partial \pi^1}{\partial z}. \quad (20)$$

Применив к уравнениям (12) сферические координаты [4] получим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \pi^1}{\partial r}\frac{\partial \pi^2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \pi^1}{\partial \theta}\frac{\partial \pi^2}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial \pi^1}{\partial \psi}\frac{\partial \pi^2}{\partial \psi} + \\ &+ \alpha_2\left(\frac{\partial \pi^2}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \pi^2}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial \pi^2}{\partial \psi}\right)^2\Bigg] = 0 \\ &\frac{\partial \alpha^2}{\partial r}\frac{\partial \pi^1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta}\frac{\partial \pi^1}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \psi}\frac{\partial \pi^1}{\partial \psi} + \\ &+ \alpha_2\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial r}\frac{\partial \pi^2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta}\frac{\partial \pi^2}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \psi}\frac{\partial \pi^2}{\partial \psi}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Полагая опять $\pi^2 = \theta$ и $\alpha_2 = -\frac{\partial \pi^1}{\partial \theta}$, получим уже такое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \pi^1}{\partial \theta\, \partial r}\frac{\partial \pi^1}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \pi^1}{\partial \theta\, \partial \psi}\frac{\partial \pi^1}{\partial \psi} = 0 \quad (22)$$

Находя различные решения этого уравнения, далее, при помощи соотношения, аналогичного равенству (19) можно будет находить распределение винтовых полей, близких по структуре к сферическим вихрям Хилла, играющим большую роль в современной теории турбулентности [8].

В частности, беря π' в виде произвольной функции $f(\psi)$ только от ψ, получим такое поле:

$$a_x = -\frac{f'(\psi)}{r}\frac{\sin\psi}{\sin\theta}; \quad a_y = \frac{f'(\psi)}{r}\frac{\cos\psi}{\sin\theta}; \quad a_z = 0.$$

Исследование некоторых свойств поперечных вихревых полей отложим до следующего сообщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лагранж Ж. Аналитическая динамика, ч. II (русск.), 1950.
2. Громеко И. О некоторых классах движений жидкостей. Казань, 1898. Изд. Казанск. ун-та, 1891.
3. Алексеев Н. И. О потоке Громеки. Учен. зап. Моск. гидромелиоративного ин-та, т. XII, 1948.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1, изд.3, 1941, стр. 149.
5. Добронравов В. В. Аналитическая динамика в неголономных координатах. Учен. зап. МГУ, вып. 122, Механика, т. II, 1948.
6. Бюшгенс С. С. Изв. АН СССР, 1948, серия физико-математическая.
7. Попов С. Г., Вестник Моск. университета, 1947, № 8.
8. Synge I. L. On a statistical Model of Isotropic turbulence. Transact. of the R. S. of Canada; v. XXXVII, sect. III, p. 52 (1943).
9. Beltrami F. Rend. del., R. Ist. Lombardo (1889).
10. Morera G. Atti d. R. Acc. dei Lincei (1889).
11. Lecornu C. R. t. 168 (1919).