

МАТЕМАТИКА

В. Г. МЕЛАМЕД

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТЕФАНА В СЛУЧАЕ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Задачей Стефана называют задачу об определении температурно-го поля и скорости продвижения границы раздела фаз в двухфазной среде. Она формулируется как задача о сопряжении двух температурных полей:

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{для } 0 < x < \xi(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{для } \xi(t) < x < l \quad (2)$$

с дополнительными условиями

$$\left. \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \Phi_1(t), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= \varphi_1(x), \quad 0 < x < \xi(0), \\ u_2(l, t) &= \Phi_2(t), \quad u_2(x, 0) = \varphi_2(x) \end{aligned} \quad (4)$$

и при наличии особого граничного условия на движущейся границе раздела двух фаз:

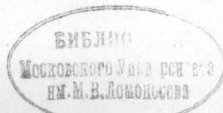
$$u_1[\xi(t), t] = u_2[\xi(t), t] = T_0^*, \quad (5)$$

$$x_1 \left. \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\xi(t)} - x_2 \left. \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\xi(t)} = \xi'(t), \quad (6)$$

причем $\xi(t) \neq 0$.

Принимается, что при переходе через границу раздела фаз теплофизические характеристики меняются скачкообразно. Сложность решения задачи Стефана заключается в том, что условие (6) на движущейся границе раздела фаз относит ее к классу нелинейных задач.

* Без ограничения общности T_0 можно принять равным 0.



Наряду с целым рядом методов решения этой задачи [1—3] в последнее время автором предложено решение ее в случае первой краевой задачи путем сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот метод позволяет получить численное решение задачи Стефана с любой степенью точности, доказать его существование и единственность решения, а также сходимость укороченной системы [4, 5]. Расчеты на электронной счетной машине «Стрела» при различном числе уравнений показали, что для практических целей можно ограничиться пятью уравнениями ($n = 2$).

Целью настоящей статьи является распространение этого метода на случай, часто встречающийся в практике, когда на одной границе в каждой точке поверхности задается плотность теплового потока как произвольная функция времени $du_1(x, t)/dx|_{x=0} = \Phi_1(t)$.

§1. Укороченная система обыкновенных дифференциальных уравнений в случае второй краевой задачи

Так же как и в работах [4, 5], введем новые функции $v_1(x, t)$ и $v_2(x, t)$, связанные с искомыми функциями $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ соотношениями:

$$u_1(x, t) = v_1(x, t) + \Phi_1(t) [x - \xi(t)], \quad (7)$$

$$u_2(x, t) = v_2(x, t) + \Phi_2(t) \frac{x - \xi(t)}{l - \xi(t)}. \quad (8)$$

Как показано в (5), функцию $v_2(x, t)$ можно разложить в ряд Фурье на отрезке $(\xi(t), l)$ при фиксированном значении t :

$$v_2(x, t) = \frac{2}{l - \xi(t)} \sum_{i=1}^{\infty} B_i(t) \sin \frac{i\pi [x - \xi(t)]}{l - \xi(t)}, \quad (9)$$

где $B_k(t) = \int_{\xi(t)}^l v_2(x, t) \sin \frac{k\pi [x - \xi(t)]}{l - \xi(t)} dx$.

Так как на границе $x = 0$ первой зоны $\partial v(x, t)/\partial x|_{x=0} = 0$ (а на границе $x = \xi(t)$ функция $v_1[\xi(t), t] = 0$), то $v_1(x, t)$ можно представить в виде (доказательство приведено в § 2):

$$v_1(x, t) = \frac{2}{\xi(t)} \sum_{i=1}^{\infty} A_i(t) \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2\xi(t)}, \quad (10)$$

где $A_k(t) = \int_0^{\xi(t)} v_1(x, t) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2\xi(t)} dx$.

Ускоренная система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику температурного поля с подвижной границей в двухфазной среде, в случае второй краевой задачи имеет вид (вывод ее дан в § 2):

$$A'_k(t) = -\frac{a_1^2(2k-1)^2}{4\gamma_1^2(t)} A_k(t) + \eta'(t) \left[\frac{2k-1}{2\gamma_1(t)} \sum_{i=1}^n A_i(t) W_{ik} + \right.$$

$$+ \frac{2\pi\eta(t)}{2k-1} \Phi_1(t) (-1)^{k+1} \left] - \frac{4\Phi_1'(t) \eta^2(t)}{(2k-1)^2}, \quad (11)$$

$$B_k'(t) = - \frac{a_2^2 k^2}{[L - \eta(t)]^2} B_k(t) - \eta'(t) \left[\frac{2k}{L - \eta(t)} \sum_{i=1}^n B_i(t) U_{ik} - \frac{\Phi_2(t)}{k} \right] + \frac{\Phi_2'(t) [L - \eta(t)]}{k} (-1)^k, \quad (12)$$

$$\eta'(t) = \omega_1 \left[\frac{1}{\eta(t)^2} \sum_{i=1}^n (2i-1) A_i(t) (-1)^i + \pi \Phi_1(t) \right] - \frac{\omega_2}{L - \eta(t)} \left[\frac{2}{L - \eta(t)} \sum_{i=1}^n i B_i(t) + \Phi_2(t) \right], \quad (13)$$

где

$$\eta(t) = \frac{1}{\pi} \xi(t), \quad L = \frac{1}{\pi} l, \quad \omega_1 = \kappa_1 |\pi^2, \quad \omega_2 = \kappa_2 |\pi^2,$$

$$W_{ik} = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+k+1} 2i-1}{(k-1)(k+i-1)} & i \neq k \\ \frac{1}{2k-1} & i = k \end{cases} \quad U_{ik} = \begin{cases} \frac{i}{i^2 - k^2} & i \neq k \\ \frac{1}{4k} & i = k. \end{cases}$$

Решение системы (11—13) можно получить одним из методов численного интегрирования.

В приложениях часто встречается случай, когда в начальный момент $t = t_0$, $\xi(t_0) = 0$ (однофазное начальное состояние). В том случае при $t_0 < t \leq t_0 + \delta$ (δ мало) $\xi(t)$ и $u_1(x, t)$ с достаточной точностью можно считать линейными, $B_k(t_0 + \delta) \approx B_k(t_0)$. При этом, как видно из (7) и (9), $A_k(t) = 0$.

Решение уравнений (11) и (12) при $t > t_0 + \delta$ целесообразно искать по формулам:

$$A_k(t_{n+1}) = A_k(t_n) e^{-\psi_k(t_n)h} + T_k(t_n) \frac{1 - e^{-\psi_k(t_n)h}}{\psi_k(t_n)},$$

$$B_k(t_{n+1}) = B_k(t_n) e^{-\theta_k(t_n)h} + R_k(t_n) \frac{1 - e^{-\theta_k(t_n)h}}{\theta_k(t_n)},$$

где

$$\psi_k(t_n) = - \frac{a_1^2 (2k-1)^2}{4\eta(t_n)^2}, \quad \theta_k(t_n) = - \frac{a_2^2 k^2}{[L - \eta(t_n)]^2};$$

h — шаг по t ; $T_k(t_n)$ и $R_k(t_n)$ есть значения правых частей в (11) и (12) соответственно без $\psi_k(t_n) A_k(t_n)$ и $\theta_k(t_n) B_k(t_n)$. В случае численного задания $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ с помощью замены в уравнениях (11) и (12) можно исключить $\Phi_1^1(t)$ и $\Phi_2^1(t)$. При проведении конкретных расчетов, так же как и в случае первой краевой задачи, можно ограничиться случаем $n = 2$.

Программу для расчета на электронных счетных машинах целесообразно выбирать с автоматическим выбором шага. При малых ξ шаг по времени довольно мал, но по мере увеличения ξ возрастает до 128 часов при точности 10^{-6} .

§ 2. Сведение системы (1) — (6) к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Предполагается, что функции краевых условий удовлетворяют следующим требованиям:

$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ имеют непрерывную первую производную $\varphi_1'(0) = \Phi_1(0)$, $\varphi_2(l) = \Phi_2(0)$. Кроме того, $\varphi_1''(x)$ и $\varphi_2''(x)$ кусочно непрерывны. Решение ищется для отрезка времени, в течение которого $0 < \xi(t) < l^*$.

Из (3) — (8) следует, что

$$\partial v_1(x, t) / \partial x |_{x=0} = v_1[\xi(t), t] = v_2(l, t) = v_2[\xi(t), t] \equiv 0. \quad (14)$$

Выведем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентных системе (1) — (6), для первой зоны **. Докажем предварительно, что в рассматриваемом случае функцию $v_1(x, t)$ можно представить в виде:

$$v_1(x, t) = \frac{2}{\xi(t)} \sum_{i=1}^{\infty} A_i(t) \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2\xi(t)}. \quad (15)$$

Для простоты обозначим $v_1(x, t)$ для каждого фиксированного значения t через $f(x)$. Доопределим $f(x)$ на сегменте $(\xi; 2\xi)$, продолжив ее нечетным образом относительно точки $x = \xi$.

Полученную функцию на интервале $(0; 2\xi)$ можно разложить следующим образом:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos \frac{k\pi x}{2\xi}.$$

Легко видеть, что в силу нечетности функции $f(x)$ относительно точки $x = \xi$ все коэффициенты с четными индексами равны нулю, откуда следует возможность представления $v_1(x, t)$ в виде (15).

Составим для $A_k(t)$ бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого умножим обе части (1) на $\cos(2k-1)\pi x/2\xi$ и проинтегрируем в пределах от 0 до ξ :

$$\int_0^{\xi} \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2\xi} dx = a_1^2 \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2\xi} dx. \quad (16)$$

* Образование новой фазы влечет лишь увеличение числа уравнений.

** Вывод для второй зоны аналогичен изложенному в [5].

Интегрируя по частям и используя граничные условия, получим:

$$\int_0^{\xi} \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2\xi} dx = -\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4\xi^2} A_k. \quad (17)$$

Для преобразования левой части (16), рассмотрим вспомогательное выражение:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\xi} u_1(x, t) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2\xi} dx = A'_k - \frac{4\xi^2 \Phi_1'(t)}{(2k-1)^2 \pi^2} - \frac{8\xi \xi' \Phi(t)}{(2k-1)^2 \pi^2}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{\xi} u_1(x, t) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2\xi} dx &= \int_0^{\xi} \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2\xi} dx + \\ &+ \frac{(2k-1)\pi}{2\xi} \sum_{i=1}^{\infty} A_i W_{ik} + \frac{2\xi \xi' \Phi_1(t)}{(2k-1)\pi} (-1)^{k+1} - \frac{8\xi \xi' \Phi_1(t)}{(2k-1)^2 \pi^2}, \end{aligned}$$

где

$$W_{ik} = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+k+1}(2i-1)}{(k-i)(k+i-1)} & i \neq k \\ \frac{1}{2k-1} & i = k. \end{cases}$$

Сравнивая эти выражения, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi} \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2\xi} dx &= A'_k - \xi' \left[\frac{2k-1}{2\xi} \sum_{i=1}^{\infty} A_i W_{ik} + \right. \\ &\left. + \frac{2\xi \Phi_1(t)}{(2k-1)\pi} (-1)^{k+1} \right] - \frac{4\xi^2 \Phi_1'(t)}{(2k-1)^2 \pi^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (17), (18) в (16), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для зоны, на поверхности которой задано граничное условие II рода:

$$\begin{aligned} A'_k &= -\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4\xi^2} A_k + \xi' \left[\frac{2k-1}{2\xi} \sum_{i=1}^{\infty} A_i W_{ik} + \right. \\ &\left. + \frac{2\xi \Phi_1(t)}{(2k-1)\pi} (-1)^{k+1} \right] - \frac{4\Phi_1'(t)\xi^2}{(2k-1)^2 \pi^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из условия (6) получим уравнение для скорости продвижения границы фаз:

$$\xi' = x \left[\frac{\pi}{\xi^2} \sum_{i=1}^{\infty} (2i-1) A_i (-1)^i + \Phi_1(t) \right] - \frac{x_2}{l-\xi} \left[\frac{2\pi}{l-\xi} \sum_{i=1}^{\infty} i B_i + \Phi_2(t) \right]. \quad (20)$$

Присоединяя к (19) и (20) уравнение (12) и положив в нем $n = \infty$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую задачу Стефана в случае второй краевой задачи.

Оценка решения укороченной системы и его единственность доказываются совершенно аналогично, как и для первой краевой задачи, подробно рассмотренной в (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубинштейн Л. И. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 11, № 1, 1947; ДАН СССР, 58, № 2, 1947.
2. Каменомостская С. Л. НДВШ, 1, № 1, 1958.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнение математической физики. Гос-техиздат, М., 1953.
4. Меламед В. Г. ДАН СССР, 118, 4, 1957.
5. Меламед В. Г. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6, 1958.

Поступила в редакцию
17. 9 1958 г.

Кафедра
мерзлотоведения