

**АСТРОНОМИЯ**

М. У. САГИТОВ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛУБИНЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ  
АНОМАЛЬНОГО ТЕЛА  
ПО ДАННЫМ ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЙ СЪЕМКИ**

В практике разведочной гравиметрии оценка глубины залегания аномальных тел и особенно глубины центра тяжести играет большую роль. Определение глубины центра тяжести аномального тела по данным гравиметрии может оказать большую помощь при разведке многих рудных месторождений, когда в первую очередь нужно знать глубину залегания и массу аномального тела, а не форму структуры, что обычно важно при разведке нефти и газа. Оценка глубины центра тяжести производится однозначно по данному гравитационному полю без всяких ограничений на форму, положение, а также распределение плотности тела.

Предложенные в литературе [1—5] формулы для определения глубины центра тяжести аномальных тел ориентированы на использование значений аномального вертикального градиента силы тяжести  $w_{zz}$ , аномального потенциала силы тяжести  $w$ , горизонтальной составляющей притяжения  $w_s$  и др., которые не могут быть получены непосредственными измерениями с помощью гравиметров (если не считать отдельных попыток определения  $w_{zz}$  как отношения разности силы тяжести на двух различных уровнях к разности их высот [6, 7]). В этой связи представляет интерес рассмотреть способ определения глубины центра тяжести аномального тела при условии, что аномалии силы тяжести известны.

Для простоты в настоящей работе рассматривается двухмерная задача. Однако выводы можно распространить и на более общий трехмерный случай. Предполагается, что аномальное тело имеет форму горизонтально расположенного цилиндра с конечным поперечным сечением. Выбирается прямоугольная система координат. Земная поверхность  $s$  принимается за плоскость  $xOy$ . Начало координат предполагается расположенным в произвольной точке земной поверхности. Ось  $z$  направляется перпендикулярно земной поверхности, а ось  $y$  — вдоль простирания аномального тела, тогда ось  $x$  будет направлением того поперечного сечения, вдоль которого считается заданным распределение аномалий силы тяжести  $\Delta g(x, 0)$ , обусловленное искомым телом.

Определим абсциссу  $x_0$  центра тяжести поперечного сечения тела, используя известное [8] соотношение:

$$x_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x' \Delta g(x', 0) dx'}{\int_{-\infty}^{\infty} \Delta g(x', 0) dx'} \quad (1)$$

После этого введем новую систему координат, в которой направление координатных осей остается прежним, а начало координат переносится вдоль оси  $x$  в точку  $x_0$ . Тогда ось  $z$  будет проходить через

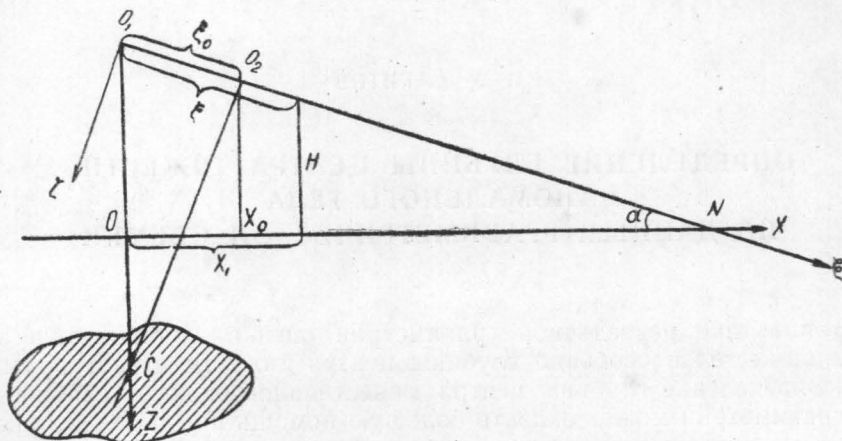


Рис. 1

центр тяжести поперечного сечения тела. Проведем вспомогательную прямую, наклоненную к оси  $x$  на некоторый угол  $\alpha$ , и пересекающую ось  $x$  на достаточно большом расстоянии  $ON = L$  (рис. 1). Выберем еще одну систему координат  $\xi O_1 \zeta$ . Ее начало совмещается с точкой пересечения вспомогательной прямой с осью  $z$ . Ось  $\xi$  направляется вдоль, а ось  $\zeta$  — перпендикулярно вспомогательной прямой.

Теперь, если бы мы имели составляющие притяжения  $w_\zeta(\xi, 0)$  на оси  $\xi$ , то могли бы определить абсциссу  $\xi_0$  центра тяжести поперечного сечения в новой системе координат  $\xi O_1 \zeta$ :

$$\xi_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \xi W_\zeta(\xi, 0) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \Delta g(x', 0) dx'} \quad (2)$$

Перпендикуляр к оси  $\xi$ , восстановленный в точке  $\xi_0$ , пересечет центр тяжести поперечного сечения. Из  $\triangle O_1 O_2 C$  (рис. 1) следует:  $O_1 C = \xi / \sin \alpha$ , а из  $\triangle O O_1 N$  —  $O O_1 = L \operatorname{tg} \alpha$ .

Глубина  $z_0$  центра тяжести поперечного сечения определяется как разность  $z_0 = \xi_0 / \sin \alpha - L \operatorname{tg} \alpha$  или то же самое запишется еще в виде:

$$z_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \xi w_\zeta(\xi, 0) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \Delta g(x', 0) dx'} \sin \alpha - L \operatorname{tg} \alpha \quad (3)$$

Выведем соотношения для определения составляющей  $w_\zeta(\xi, 0) = w_\zeta(x, -H)$ , при этом можно исходить из формулы, дающей решение

задачи Неймана для плоскости. Потенциал притяжения  $\omega(x, y, z)$  во внешнем пространстве представляется через значения вертикальной составляющей притяжения (аномалии силы тяжести) на земной поверхности  $s$ :

$$\omega(x, y, -H) = \frac{1}{2\pi} \iint_s \frac{\Delta g(x', y', 0) ds}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + H^2]^{1/2}}. \quad (4)$$

В случае двумерной задачи равенство (4) преобразуется к виду:

$$\omega(x, -H) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta g(x', 0) \ln[H_2 + (x' - x)^2] dx', \quad (5)$$

так как

$$\omega_z(x, -H) = \omega_x(x, -H) \cos(\hat{\zeta x}) + \omega_z(x, -H) \cos(\hat{\zeta z}), \quad (6)$$

где  $\omega_x(x, -H)$  и  $\omega_z(x, -H)$  — составляющие притяжения соответствен-

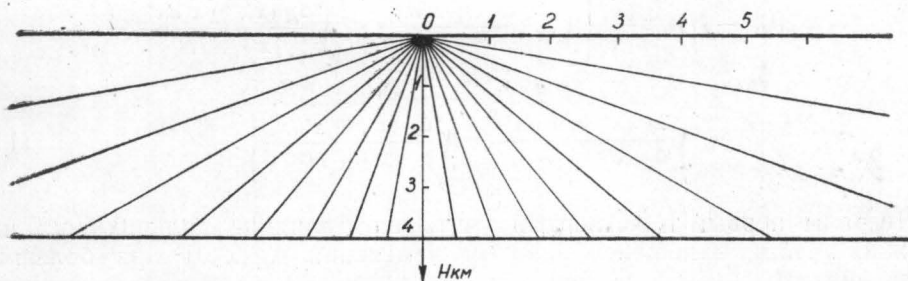


Рис. 2. Общий вид палетки, предложенной Б. А. Андреевым

но по координатным осям  $x$  и  $z$ ;  $\cos(\hat{\zeta x})$  и  $\cos(\hat{\zeta z})$ , — направляющие косинусы углов между направлением  $\zeta$  и осями  $x$  и  $z$  соответственно.

Причем, если в данном случае  $\cos(\hat{\zeta z}) = \cos \alpha$ ,  $\cos(\hat{\zeta x}) = \sin \alpha$ , то для составляющей притяжения  $\omega_z(x, -H)$  имеем:

$$\omega_z(x, -H) = \frac{\sin \alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g(x', 0) (x' - x) dx'}{(x' - x)^2 + H^2} + \frac{\cos \alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g(x', 0) H dx'}{(x' - x)^2 + H^2}. \quad (7)$$

Здесь

$$\omega_x(x, -H) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g(x', 0) (x' - x) dx'}{(x' - x)^2 + H^2}, \quad (8)$$

$$\omega_z(x, -H) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g(x', 0) H dx'}{(x' - x)^2 + H^2}. \quad (9)$$

Для вычисления интеграла  $\omega_z(x, -H)$  Б. А. Андреевым [9] (рис. 2) предложена палетка, с успехом применяемая в практике гравиметрической разведки. Достоинства этой палетки заключаются в

том, что она может использоваться для расчета на любые высоты. Это обстоятельство весьма важно для нашей задачи, где необходимо производить расчет  $w_z(x, -H)$  на оси  $\xi$ , точки которой отстоят от земной поверхности на различных расстояниях  $H$ . Однако палетка для расчета  $w_x(x, -H)$  по данным значениям  $\Delta g(x, 0)$ , приведенная в работе [10], для нашей задачи неудобна тем, что для каждой точки оси  $\xi$ , имеющей свое значение  $H$ , необходимо иметь новую палетку. Целесообразно было бы иметь палетку, универсальную для любых высот. Ниже рассмотрим эту задачу.

Прежде всего полагаем в интеграле (8)  $x=0$ , тогда

$$w_x(0, -H) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{x'^2 + H^2}; \quad (10)$$

затем представим его в виде нескольких интегралов:

$$w_x(0, -H) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{-L_1} \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{x'^2 + H^2} + \int_{L_1}^0 \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{x'^2 + H^2} + \right. \\ \left. + \int_0^{L_2} \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{x'^2 + H^2} + \int_{L_2}^{\infty} \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{x'^2 + H^2} \right\}. \quad (11)$$

Интегралы первый и четвертый учитывают влияние дальних зон; их можно учесть, задавшись законом изменения  $\Delta g(x', 0)$  при больших значениях  $x'$ . Для двухмерного тела с конечным поперечным сечением это изменение можно принять обратно пропорциональным  $x'^2$ :

$$\Delta g(x', 0) = A/x'^2, \quad (12)$$

где  $A$  — некоторая постоянная.

Это предположение равносильно замене искомого тела с произвольным поперечным сечением круговым цилиндром, масса единицы которого равна таковой искомого тела. Учитывая равенство (12), для учета влияния дальних зон получаем равенство:

$$\Delta_{\infty} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-L_1} \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{H^2 + x'^2} + \frac{1}{\pi} \int_{L_2}^{\infty} \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{H^2 + x'^2} = \\ = \frac{\Delta g(-L_1, 0)L_1^2 + \Delta g(L_2, 0)L_2^2}{4\pi H^2} \ln \frac{L_1^2(H_2^2 + L_2^2)}{L_2^2(H^2 + L_1^2)}. \quad (13)$$

Интегралы второй и третий в равенстве (11) вычисляются с помощью палетки. Для ее построения представим их в виде ряда интегралов, распространенных по элементарным участкам; в пределах каждого из которых аномалии силы тяжести можно считать постоянными:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-L_1}^0 \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{x'^2 + H^2} = \frac{1}{\pi} \sum_i \int_{-x_i}^{-x_{i-1}} \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{H^2 + x'^2}, \quad (14)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{L_2} \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{x'^2 + H^2} = \frac{1}{\pi} \sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{H^2 + x'^2}. \quad (15)$$

Применяя теорему о среднем, вместо выражений (14), (15) можно написать:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-L_1}^0 \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{x'^2 + H^2} = -\frac{1}{2\pi} \sum_i \{\Delta g(x', 0)\}_{-x_i - x_{i-1}} \ln \frac{H^2 + x_i^2}{H^2 + x_{i-1}^2}, \quad (16)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{L_2} \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{x'^2 + H^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_i \{\Delta g(x', 0)\}_{x_{i-1} x_i} \ln \frac{H^2 + x_i^2}{H^2 + x_{i-1}^2}, \quad (17)$$

где  $\{\Delta g(x', 0)\}_{-x_i - x_{i-1}}$ ,  $\{\Delta g(x', 0)\}_{x_i x_{i-1}}$  — средние значения аномалий силы тяжести на элементарных участках  $[-x_i, -x_{i-1}]$ ,  $[x_{i-1}, x_i]$  соответственно. Потребуем, чтобы для границ элементарных участков в равенствах (16), (17) выполнялись условия:

$$\ln(H^2 + x_i^2)/(H^2 + x_{i-1}^2) = m, \quad (18)$$

где  $m$  — некоторая постоянная, задающая в конечном итоге размеры элементарных участков.

Имея в виду равенства (16) — (18), (13), вместо выражения (11) имеем:

$$\omega_x(0, -H) = \frac{m}{2\pi} \left\{ \sum_i \{\Delta g(x', 0)\}_{x_{i-1} x_i} - \sum_i \{\Delta g(x', 0)\}_{x_i x_{i-1}} \right\} + \Delta_\infty. \quad (19)$$

Из условия (18) вытекает, что

$$x_i = \pm \sqrt{H^2(e^m - 1) + e^m x_{i-1}^2},$$

откуда для границ элементарных участков имеем выражение:

$$x_i = H \sqrt{e^{im} - 1}. \quad (20)$$

В случае расчета  $\omega_x(x, -H)$  в точках близ земной поверхности ( $H$  — мало) или на ней ( $H=0$ ) возникает трудность вычисления интегралов (16) и (17), потому что подынтегральное выражение приобретает большие значения при  $x'=0$ . Во избежание этой особенности при расчете необходимо в интеграле (10) выделить центральную зону  $(-a, a)$ , тогда

$$\omega_x(0, -H) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{-L_1} \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{x'^2 + H^2} + \int_{-L_1}^{-a} \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{x'^2 + H^2} + \right. \\ \left. + \int_{-a}^{+a} \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{x'^2 + H^2} + \int_{+a}^{L_2} \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{x'^2 + H^2} + \int_{L_2}^{\infty} \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{x'^2 + H^2} \right\}. \quad (21)$$

Вместо равенства (20) имеем выражение, определяющее границы элементарных участков палетки:

$$x_i = \sqrt{H^2(e^{im} - 1) + a^2 e^{im}}. \quad (22)$$

Для учета действия центральной зоны можно предположить, что в до-

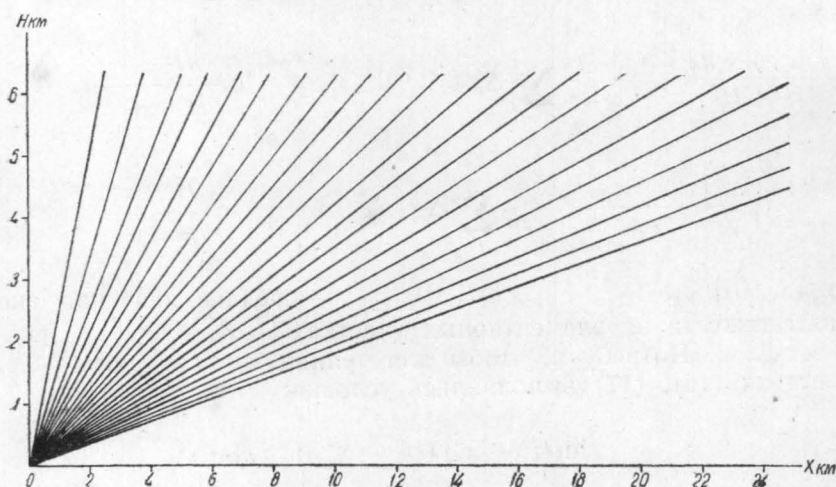


Рис. 3. Палетка для расчета  $\omega_x(x, -H)$  при  $H \neq 0$

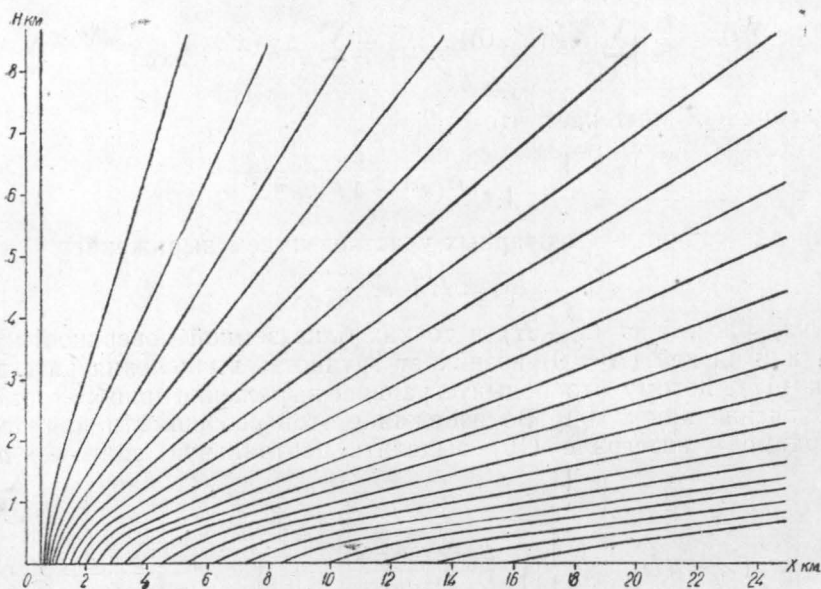


Рис. 4

статочно малом ее интервале,  $[-a, a]$   $\Delta g(x', 0)$  изменяется линейно, то есть  $\Delta g(x', 0) = Bx' + C$ , где  $B, C$  — некоторые постоянные.

Это предположение равносильно замене отрезка кривой  $\Delta g(x', 0)$

прямой линией. Поправка, учитывающая влияние центральной зоны  $(-a, a)$ , будет равна:

$$\Delta_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\Delta g(x', 0) x' dx'}{x'^2 + H^2} = \frac{1}{\pi} [\Delta g(a, 0) - \Delta g(-a, 0)] \left(1 - \frac{H}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{H}\right). \quad (23)$$

При расчете  $\omega_x$  в точках земной поверхности, то есть когда  $H = 0$ , формула (23) приобретает вид:

$$\Delta_0 = 1/\pi [\Delta g(a, 0) - \Delta g(-a, 0)].$$

В прямоугольной системе координат  $XOH$  (рис. 3, 4) строится семейство кривых  $x_i(H)$ , определяемых равенствами (20) или (22) при  $i = 0, 1, 2, \dots$  Масштаб по оси  $X$  должен быть таким же, как и профиля  $x$ , вдоль которого заданы аномалии силы тяжести  $\Delta g(x, 0)$ . Масштаб по оси  $H$  удобно выбрать в несколько раз крупнее. В случае, когда  $H$  мало или равно нулю, необходимо пользоваться палеткой, подобной изображенной на рис. 4. В этой палетке выделена центральная зона  $[-a, a]$ , действие которой учитывается поправкой (23). Палетка построена с  $m = 0,157$ , так что ее коэффициент  $m \sin \alpha / \pi = 0,05 \sin \alpha$ , а  $a = 0,50$  км. Расчет с помощью палетки производится накладыванием на нее профиля  $x$  с аномалиями силы тяжести  $\Delta g(x, 0)$  так, чтобы ось  $X$  проходила параллельно профилю  $x$ , а последний пересекал ось  $H$  на требуемой высоте. После этого определяются средние значения аномалий силы тяжести  $\Delta g(x, 0)$  на элементарных участках, ограниченных смежными кривыми палетки; все значения  $\{\Delta g(x, 0)\}_{x_i - x_{i-1}}$  при  $x > 0$  и  $\{\Delta g(x, 0)\}_{-x_i - x_{i-1}}$  при  $x < 0$  суммируются раздельно. Разность этих сумм, умноженная на коэффициент палетки  $m\pi/\sin\alpha$  дает требуемое значение  $\omega_x(x, -H) \sin \alpha$ . Для расчета  $\omega_x(x, -H)$  в новой точке палетка передвигается параллельно самой себе так, чтобы ось  $H$  проходила через эту точку, а профиль  $x$  пересекал ось  $H$  в точке, соответствующей новой высоте. Дальнейшие операции остаются прежними. Таким образом, рассчитав  $\omega_x(x, -H) \sin \alpha$  в точках вспомогательной прямой, а также вычислив в этих точках  $\omega_z(x, -H) \ln \alpha$  с помощью палетки, изображенной на рис. 2, составляющие притяжения  $\omega_c(x, -H)$  определяются как сумма этих величин.

Вспомогательная прямая должна выбираться так, чтобы  $L$  было достаточно большим. Это необходимо для того, чтобы пересчитывать гравитационное поле только в области верхнего полупространства, не занятого аномальными массами, где этот пересчет делается надежно. Формулы определения глубины центра тяжести поперечного сечения аномального тела проверялись на модели аномального тела в виде кругового цилиндра. Рассчитывалось поле вертикальной составляющей притяжения  $\Delta g(x, 0)$ , обусловленное этим цилиндром. Считая данным только поле  $\Delta g(x, 0)$ , глубина оси цилиндра определялась способом, определенным выше. Проверка этого способа на теоретическом примере показала, что в принципе он позволяет надежно определять глубину центра тяжести аномального тела.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гамбурцев Г. А. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 1, 1938.
2. Kogbetliantz E. Geophysics, № 4, 1944.
3. Заморев А. А. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 3, 1939.
4. Казанский А. П. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 2—3, 1938.
5. Маловичко А. К. Уч. зап. Новосибирского пед. ин-та, вып. 6, 1948.
6. Балавадзе В. К., Шангелая Г. Ш. ДАН СССР, 95, № 1, 1954.
7. Thyssen-Vornemisza S., Stackler W. Geophysics, № 3, 1956.
8. Сорокин Л. В. Гравиметрия и гравиметрическая разведка, 1951.
9. Андреев Б. А. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 1954.
10. Тяпкин К. Ф. Прикладная геофизика, вып. 12, 1955.

Поступила в редакцию  
30. 10 1958 г.

Кафедра  
небесной механики  
и гравиметрии