Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1—1959

В. Л. ПАНТЕЛЕЕВ

К ВОПРОСУ О ВЫВОДЕ ПОПРАВКИ ЗА НЕИЗОХРОННОСТЬ ПРИ МАЯТНИКОВЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА МОРЕ

Голландский ученый Ф. Венинг-Мейнес предложил способ определения силы тяжести на море с помощью маятникового прибора [1]. По этому способу долгопериодические вынужденные колебания маятников, вызванные горизонтальными ускорениями штатива маятникового прибора, исключаются с помощью фоторегистрации разности движения двух маятников на одной и той же опоре с близкими собственными периодами.

В самом деле, дифференциальные уравнения маятников в линейном приближении имеют вид:

$$\theta_1'' + n_1^2\theta_1 + \frac{n_1^2\ddot{x}}{g} = 0, \quad \theta_2'' + n_2^2\theta_3 + \frac{n_2^2\ddot{x}}{g} = 0, \tag{1}$$

где ϑ_1 и ϑ_2 — углы элонгации маятников в некоторой абсолютной системе координат, причем положение маятников $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ совпадает с их положением равновесия при отсутствии ускорений; n_1, n_2 — соответственно их круговые частоты; $\ddot{x}$ — горизонтальное ускорение подставки в плоскости колебания маятников; g — ускорение силы тяжести.

Вычтем из первого уравнения системы (1) второе и получим:

$$(\theta_1'' - \theta_2'') + n_1^2(\theta_1 - \theta_2) = (n_2^2 - n_1^2)\left(\theta_2 - \frac{\ddot{x}}{g}\right),$$

$$\theta_2'' + n^2\theta_2 = -\frac{n_2^2\ddot{x}}{g}. \tag{2}$$

Из (2) легко видеть, что если $n_1 = n_2$, то движение некоторого фиктивного маятника, образованного как разность ϑ_1 и ϑ_2, не зависит от горизонтальных ускорений точки подвеса.

В реальном случае n_1 не может быть точно равно n_2, поэтому движение фиктивного маятника, вообще говоря, зависит от горизонтальных ускорений.

Венинг-Мейнес показал, что для учета как этого остаточного влияния ускорений, так и зависимости фазовой скорости фиктивного маятника от амплитуд и собственных частот образующих его маятников нет необходимости находить общее решение уравнений (2), хотя это не представляет больших трудностей.

Можно ввести такие переменные вместо ϑ_1 и ϑ_2, чтобы новые уравнения могли быть непосредственно использованы для определения необходимых поправок.

Правда, формулы, полученные Венинг-Мейнесом для этой цели, справедливы не для разностного маятника, а лишь для близкого к нему:

$$\theta = \theta_1 - \frac{n_1}{n_2}\theta_2. \tag{3}$$

Кроме того, переменным α_1 и φ_1, α_2 и φ_2 (см. уравнения (8с), (8д) стр. 20 работы [1]) дается ошибочная геометрическая интерпретация.

Введем новые переменные a_1, φ_1, a_2, φ_2 следующим образом:

$$z_1 = ae^{i\varphi_1} = \theta_1 - i\frac{\theta_1'}{n_1}, \quad z_2 = a_2e^{i\varphi_2} = \theta_2 - i\frac{\theta_2'}{n_2}, \tag{4}$$

так что $\vartheta_1 = \mathrm{Re}z_1$, $\vartheta_2 = \mathrm{Re}z_2$.

Заменяя ϑ_1 и ϑ_2 в уравнениях (1) на z_1 и z_2, после некоторых преобразований получим уравнения первого порядка:

$$z_1' = in_1\left(z_1 + \frac{\ddot{x}}{g}\right), \quad z_2' = in_2\left(z_2 + \frac{\ddot{x}}{g}\right). \tag{5}$$

Комплексная величина z будет соответствовать фиктивному маятнику по Венинг-Мейнесу, если

$$z = z_1 - \frac{n_1}{n_2}z_2 = ae^{i\varphi}, \tag{6}$$

то есть

$$\theta = \mathrm{Re}z. \tag{7}$$

Продифференцируем (6) и, учитывая (5), получим дифференциальное уравнение движения фиктивного маятника:

$$z' = in_1(z_1 - z_2). \tag{8}$$

Исключая z_2 с помощью (6) и приравнивая соответственно действительные и мнимые части, окончательно получим:

$$\varphi' = n_2 + (n_1 - n_2)\frac{a_1}{a}\cos(\varphi_1 - \varphi), \quad a' = -a_1(n_1 - n_2)\sin(\varphi_1 - \varphi). \tag{9}$$

Эти формулы и рекомендованы Венинг-Мейнесом для определения поправки фазовой скорости фиктивного маятника по разности фаз одного из маятников, который будем называть действительным маятником, и фиктивного маятника и отношения их амплитуд. При этом функциям a_1, a, φ и φ_1 Венинг-Мейнес дает следующую геометрическую интерпретацию: a_1, a — соответственно амплитуды действительного и фиктивного маятников, а φ_1, φ — их фазы.

Однако в общем случае это утверждение неправильно.

Понятия амплитуды и фазы могут быть применены лишь к синусоидальным колебаниям или близким к ним.

Пусть например, $\vartheta = \Theta \cos \Phi(t)$, где Θ и $d\,\Phi(t)/dt$ можно считать постоянными хотя бы в малом отрезке времени $t_2 - t_1$ умещающем в себе по крайней мере один полупериод

$$\frac{\pi}{d\Phi(t)/dt}, \quad t = t_1.$$

В этом случае Θ можно назвать амплитудой колебательного движения в отрезке $t_2 - t_1$, а $d\Phi(t)/dt$ — фазовой скоростью или мгновенной частотой этой гармоники.

В общем виде решения уравнений (1) можно представить следующим образом:

$$\theta_1 = \Theta_1(t) \cos \Phi_1(t) + \psi_1(t), \quad \theta_2 = \Theta_2(t) \cos \Phi_2(t) + \psi_2(t), \tag{10}$$

где $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — вынужденные колебания маятников, вызванные долгопериодическими возмущающими ускорениями.

Например, если $|\psi'|_{max}/n$ мало, то $\psi_1 = \psi_2 \approx -\ddot{x}/g$.

Нетрудно видеть, что a_1 и $d\varphi_1/dt$, определенные согласно условию (4)

$$\theta_1 = a_1 \cos \varphi_1 = \Theta_1(t) \cos \Phi_1(t) + \psi_1(t),$$

$$-\frac{\theta_1'}{n_1} = a_1 \sin \varphi_1 = -\frac{\Theta_1'(t)}{n} \cos \Phi_1(t) + \frac{\Phi_1'(t)}{n} \times$$

$$\times \Theta_1(t) \sin \Phi(t) - \frac{\psi_1'(t)}{n}, \tag{11}$$

уже в бигармоническом движении не могут быть почти постоянными в отрезке $t_2 - t_1$, если частоты гармоник $\Theta_1 \cos \Phi_1$ и ψ_1 сильно отличаются.

В связи с этим в формулах (9) функции и α_1 и φ_1 необходимо выразить через $\Theta_1(t)$, $\Phi_1(t)$, $\psi_1(t)$.

Заметим, что по (4)

$$\theta_1' = a_1 \cos \varphi_1, \quad -\theta' = a_1 n_1 \sin \varphi_1, \tag{12}$$

и учитывая (10), найдем выражения для $a_1 \cos(\varphi_1 - \varphi)$ и $a_1 \sin(\varphi_1 - \varphi)$:

$$a_1 \cos(\varphi_1 - \varphi) = \Theta_1 \cos(\Phi_1 - \varphi) + \frac{\Theta_1}{n_1} \sin \varphi \Big[(\Phi_1' - n_1) \times$$

$$\times \sin \Phi_1 - \frac{\Theta_1'}{\Theta_1} \cos \Phi_1 \Big] + \psi_1 \cos \varphi - \frac{1}{n_1} \psi_1' \sin \varphi,$$

$$a_1 \sin(\varphi_1 - \varphi) = \Theta_1 \sin(\Phi_1 - \varphi) + \frac{\Theta_1}{n_1} \cos \varphi \times \Big[(\Phi_1' - n_1) \sin \Phi_1 -$$

$$- \frac{\Theta_1'}{\Theta_1} \cos \Phi_1 \Big] - \psi_1 \sin \varphi - \frac{1}{n_1} \psi_1' \cos \varphi. \tag{13}$$

Будем считать, что возмущения фазовой скорости и амплитуды маятника таковы, что произведениями $(n_1 - n_2)(\Phi_1' - n_1)$ и $(n_1 - n_2)\frac{\Theta_1'}{\Theta_1}$ можно пренебречь.

Подставляя (13) в (9) и учитывая сказанное о малости $\Phi'_1 - n$ и Θ'_1/Θ_1, получим:

$$\varphi' = n_2 + (n_1 - n_2)\left[\frac{\Theta_1}{a}\cos(\Phi_1 - \varphi) + \frac{\psi_1}{a}\cos\varphi - \frac{\omega'}{n_1 a}\sin\varphi\right], \qquad (14)$$

$$a' = -(n_1 - n_2)\left[\Theta_1 \sin(\Phi_1 - \varphi) - \psi_1 \sin\varphi - \frac{\psi'}{n'}\cos\varphi\right].$$

При $n_1 = n_2$ функции φ' и a обращаются в константу, то есть φ' — в этом случае фазовая скорость фиктивного маятника, а a — амплитуда.

Если $n_1 - n_2 \neq 0$, но мало, тогда φ' соответствует фазовой скорости лишь с точностью до членов $(n_1 - n_3)\frac{\psi_1}{a}\cos\varphi$, $(n_1 - n_2)\frac{\psi_1'}{an^1}\sin\varphi$.

Обычно ψ_1 имеет тот же порядок малости, что и a, то есть φ' в этих формулах можно назвать фазовой скоростью лишь с точностью до $n_1 - n_2$, чего для практического учета неизохронности (неравенства периодов) маятников недостаточно.

Покажем, что можно получить формулы, аналогичные (14), но свободные от описанных выше недостатков.

Для этого вернемся снова к формулам (1). Представим $\ddot{x}(t)$ в виде $\ddot{x}(\mathrm{t}) = \ddot{\tilde{x}}(\mathrm{t}) + \xi$ так, чтобы ψ_1 и ψ_2 удовлетворяли уравнениям:

$$\theta_1'' + n_1^2\theta_1 + \frac{n_1^2}{g}\ddot{\tilde{x}} = 0, \quad \theta_2'' + n_2^2\theta_2 + \frac{n_2^2}{g}\ddot{\tilde{x}} = 0, \qquad (15)$$

а ξ была бы некоторой малой функцией, такой, что величиной $\frac{1}{g}|(n_1 - n_2)\xi|_{max}$ можно пренебречь.

Введем обозначения: $\vartheta_1 = \Theta_1\cos\Phi_1$, $\vartheta_2 = \Theta_2\cos\Phi_2$.

Теперь общее решение (10) уравнений (1) примет вид:

$$\theta_1 = \vartheta_1 + \psi_1, \quad \theta_2 = \vartheta_2' + \psi_2. \qquad (16)$$

Подставляя (16) в (1), получим дифференциальное уравнение для ϑ_1 и ϑ_2:

$$\vartheta_1'' + n_1^2\vartheta_1 + n_1^2\frac{\xi}{g} = 0, \quad \vartheta_2'' + n_2^2\vartheta_2 + n_2^2\frac{\xi}{g} = 0. \qquad (17)$$

Образуем фиктивный маятник как разность движения двух маятников, в отличие от описанного ранее фиктивного маятника по Венинг-Мейнесу,

$$\theta = \theta_1 - \theta_2 = \vartheta_1 - \vartheta_2 + \psi_1 - \psi_2. \qquad (18)$$

Введем, как и раньше, комплексные величины:

$$z_1 = a_1 e^{i\varphi_1} = \vartheta_1 + i\frac{\vartheta_1'}{n_1}, \quad z_2 = a_2 e^{i\varphi_2} = \vartheta_2 + i\frac{\vartheta_2'}{n_2}. \qquad (19)$$

Пусть z выражается через z_1 и z_2 следующим образом:

$$z = z_1 - z_2. \tag{20}$$

Тогда уравнение движения фиктивного маятника будет иметь вид:

$$\theta = \mathrm{Re}\, z + (\psi_1 - \psi_2). \tag{22}$$

Как и раньше, уравнения второго порядка (17) можно преобразовать в уравнения первого порядка, если заменить ϑ_1 и ϑ_2 на z_1 и z_2

$$z_1' = in_1\left(z_1 + \frac{\xi}{g}\right), \quad z_2' = in_2\left(z_2 + \frac{\xi}{g}\right). \tag{23}$$

Дифференцируем (20) и заменим z'_1 и z'_2 выражениями (23):

$$z' = i(n_1 z_1 - n_2 z_2) + i(n_1 - n_2)\frac{\xi}{g}.$$

Но так как $\left|(n_1 - n_2)\frac{\xi}{g}\right| \approx 0$, то

$$z' = i(n_1 z_1 - z_2 n_2). \tag{24}$$

Исключая в (24) z_2 с помощью (21) и приравнивая соответственно вещественные и мнимые части, получим:

$$\varphi' = n_2 + (n_1 - n_2)\frac{a_1}{a}\cos(\varphi_1 - \varphi),$$

$$a' = -a_1(n_1 - n_2)\sin(\varphi_1 - \varphi). \tag{25}$$

Хотя формулы по форме и совпадают с (16), но a_1 и φ_1 имеют иной смысл, ибо, в отличие от (13), $a_1\cos(\varphi_1 - \varphi)$ и $a_1\sin(\varphi_1 - \varphi)$ выражаются через Θ_1 и Φ_1 следующим образом:

$$a_1\cos(\Phi_1 - \varphi) = \Theta_1\cos(\Phi_1 - \varphi) + \frac{\Theta_1}{n_1}\sin\varphi \times$$

$$\times\left[(\Phi_1' - n_1)\sin\Phi_1 - \frac{\Theta_1'}{\Theta_1}\cos\Phi_1\right], \tag{26}$$

$$a_1\sin(\Phi_1 - \varphi) = \Theta_1\sin(\Phi_1 - \varphi) + \frac{\Theta_1}{n_1}\cos\varphi \times$$

$$\times\left[(\Phi_1' - n_1)\sin\Phi_1 - \frac{\Theta_1'}{\Theta_1}\cos\Phi_1\right].$$

Пренебрегая малыми $(\Phi_1' - n_1)(n_1 - n_2)$ и $\frac{\Theta_1'}{\Theta}(n_1 - n_2)$, при подстановке (26) в (25) окончательные формулы примут вид:

$$\varphi' = n_2 + (n_1 - n_2)\frac{\Theta_1}{a}\cos(\Phi_1 - \varphi),$$

$$a' = -\Theta_1(n_1 - n_2)\sin(\Phi_1 - \varphi). \tag{27}$$

Итак, движение фиктивного маятника можно представить в виде:

$$\theta = a \cos \varphi + \psi_1 - \psi_2, \tag{28}$$

где a и φ связаны соотношениями (27).

Нетрудно убедиться, что в формулах (27) a и φ' можно с достаточной степенью точности считать постоянными в интервале времени $t_2 - t_1 < \left(\frac{\pi}{\Phi'}\right)_{t=t_1}$, то есть a и φ могут быть названы соответственно амплитудой и фазой гармоники $a \cos \varphi$.

Наличие члена $\psi_1 - \psi_2$ в формуле (28) означает, что средняя линия главной гармоники колебания фиктивного маятника есть функция времени. Легко убедиться, что это колебание средней линии практически не может быть замечено на фотограмме записи движения фиктивного маятника, и членом $\psi_1 - \psi_2$ можно пренебречь.

В самом деле, так как по условию ψ_1 и ψ_2 не содержат резонансных членов, то

$$\psi_1(n_1) - \psi_2(n_2) \approx \frac{\partial \psi(n)}{\partial n} n \frac{\Delta n}{n},$$

где $\Delta n = n_1 - n_2$, а под n может подразумеваться любая из n_1 и n_2. Функция $n \cdot \partial\psi(n)/\partial n$ имеет тот же порядок малости, что и ψ_1 или ψ_2 а потому разность $\psi_1 - \psi_2$ уменьшена в $\left|\frac{\Delta n}{n}\right| = \left|\frac{T_1 - T_2}{T}\right|$ раз (T_1 и T_2 — собственные периоды маятников). Если ψ_{1max} и ψ_{2max} на фотограмме практически не превосходят 10 см, то при $T_1 - T_2 = 1 \cdot 10^{-5}$ легко видеть, что $/\psi_1 - \psi_2/_{max}$ не может превосходить нескольких тысячных миллиметра, то есть такой величиной безусловно можно пренебречь.

Из сказанного выше можно сделать вывод, что формулы Венинг-Мейнеса для учета неизохронности справедливы лишь для невозмущенного случая или для случая, когда ускорения подставки таковы, что для фазовой скорости фиктивного маятника малостью$(n_1 - n_2) \times \times \ddot{x}/ga$ можно пренебречь. В противном случае функция φ_1, полученная Венинг-Мейнесом, теряет смысл фазовой скорости.

Выше было показано, что долгопериодические ускорения не оказывают заметного влияния на фиктивный маятник, а малые ускорения с близрезонансными частотами, возмущающие как амплитуду, так и фазовую скорость действительных маятников, могут быть учтены с помощью формул (27).

Чтобы яснее представить, как велико влияние этих возмущений, рассмотрим следующий частный случай.

Пусть $\ddot{x}(t)/g = \alpha \cos(mt + \delta)$, где m мало отличается от собственной частоты маятника с индексом 1, то есть $n_1 - m = 2\nu$ — малая величина.

Решением дифференциального уравнения

$$\theta_2'' + n_1^2 \theta_2 + n_1^2 \alpha \cos(mt + \delta) = 0 \tag{29}$$

является функция:

$$\theta_1 = \theta_{01} \cos(n_1 t + \varphi_{01}) + \beta \sin \nu t \sin[(n_1 - \nu) t + \delta], \tag{30}$$

$$2\nu = n_1 - m,$$

где θ_{01}, φ_{01} — постоянные интегрирования, а

$$\beta = \frac{n_1^2}{n_1 + m} \cdot \frac{\alpha}{\nu}. \tag{31}$$

Очевидно, что если ν и α малы, то $\beta \sin \nu t$ — медленно меняющаяся функция, которая может быть названа амплитудой гармоники с частотой $n_1 - \nu$:

$$(\beta \sin \nu t) \sin [(n_1 - \nu) t + \delta] = -(\beta \sin \nu t) \cos \left[(n_1 - \nu) t + \delta + \frac{\pi}{2}\right]. \tag{32}$$

Таким образом, функция θ_1 есть сумма двух гармоник с близкими частотами. Как известно, такую сумму (или разность) можно представить в виде некоторой суммарной (разностной) гармоники с переменной амплитудой и переменной частотой (фазовой скоростью).

Итак, определим возмущенную фазовую скорость функции θ_1 (30).

Формулы (27), выражающие зависимость фазовой скорости разности гармоники от параметров гармоник, образующих эту разностную гармонику, в нашем случае применять нельзя, так как они справедливы лишь для случая, когда обе слагающие гармоники удовлетворяют уравнениям (1). В нашем случае определенно известно, что гармоника $\theta_0 \cos (n_1 t + \varphi_{01})$ не удовлетворяет уравнению (29).

Однако легко получить формулы, аналогичные (27), но более общие, без наложения на слагающие гармоники каких-либо условий.

Пусть, например, имеем гармоники

$$a_1 \cos \varphi_1 = \operatorname{Re} a_1 e^{i\varphi_1} = \operatorname{Re} z_1 \quad a_2 \cos \varphi_2 = \operatorname{Re} a_2 e^{i\varphi_2} = \operatorname{Re} z_2 \tag{33}$$

и разностную гармонику

$$a \cos \varphi = a_1 \cos \varphi_1 - a_2 \cos \varphi_2 = \operatorname{Re} z. \tag{34}$$

Продифференцируем выражение

$$z = z_1 - z_2 \tag{35}$$

и после некоторых преобразований получим:

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1 - \frac{1}{a^2} \{a_2 [a_2 - a_1 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)] (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + $$

$$+ (\dot{a}_1 a_2 - a_1 \dot{a}_2) \sin (\varphi_1 - \varphi_2)\}, \tag{36}$$

где a^2 — квадрат модуля функции (35):

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2). \tag{37}$$

Формулу (36) можно представить и в таком виде:

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_2 + \frac{a_1}{a} \left[(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \cos (\varphi_1 - \varphi) + \left(\frac{\dot{a}_1}{a_1} - \frac{\dot{a}_2}{a_2}\right) \sin (\varphi_1 - \dot{\varphi})\right]. \tag{38}$$

Используя эти формулы легко получить мгновенную фазовую скорость маятника, точка подвеса которого совершает малые горизонтальные колебания с частотой, близкой к резонансной:

$$\dot{\varphi} = n_1 + \nu \left(\frac{\theta_{01}^2 - \theta_{01}\beta \sin(\varphi_{01} - \delta)}{a_2} - 1 \right), \tag{39}$$

$$a^2 = \theta_{01}^2 + \beta \sin \nu t \left[\alpha \sin \nu t - 2\theta_{01} \cos(\nu t - \varphi_0 + \delta) \right].$$

Из этих формул видно, что возмущения фазовой скорости маятника — порядка ν.

Например, возмущенная амплитуда маятника меняется с периодом две минуты и при $n = 2\pi/1{,}01$ разность частот $n_1/2 - m/2 = \nu$ приблизительно равна 0,03, то есть возмущения в периоде маятника будут более чем $20\,000 \cdot 10^{-7}$ сек.

Этот пример убедительно показывает принципиальную невозможность определения силы тяжести на море отдельными маятниками.

Единственный путь определения силы тяжести на море маятниковым способом — образование фиктивного (разностного) маятника, движение которого лишь незначительно зависит от близрезонансных ускорений, которые могут быть учтены с помощью формул (27).

Весь выше описанный анализ проведем на базе линейных колебаний, хотя, как известно из практики, точности линейного приближения недостаточно. Поэтому все основные выводы и формулы следует считать справедливыми лишь для случая очень малых возмущений, при которых амплитуды маятников меняются мало, то есть не раскачиваются.

Вопрос о влиянии нелинейности дифференциального уравнения маятника значительно более сложен и требует специального рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Венинг-Мейнес Ф. А. Гравиметрические наблюдения на море. Геодезиздат, М., 1941.

Поступила в редакцию
30. 10 1958 г.

Кафедра
небесной механики
и гравиметрии