

# Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 1—1959

С. К. ЛЕСОТА

## О МЕТОДИКЕ ИЗМЕРЕНИЯ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ АМПЛИТУДНЫХ И ЧАСТОТНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ РЕАЛЬНОГО ГЕНЕРАТОРА МЕТОДОМ БЕРШТЕЙНА

Флуктуационные явления в гармоническом генераторе определяют конечную ширину спектральной линии генерируемых колебаний. Изучению этого вопроса за последнее время посвящено большое количество работ (например, [2—4]), в которых показывается, что ширина спектральной линии является функцией величины частотных и амплитудных флуктуаций в генераторе. И. Л. Берштейном [1] был предложен метод их измерения. Он состоит в том, что поскольку путь колебания от генератора до амплитудного детектора проходит по двум параллельным цепям, одна из которых является линией задержки, то, кроме амплитудных флуктуаций, на амплитуде сигнала, выделяющегося на детекторе, сказываются и частотные флуктуации.

И. Л. Берштейн проводил измерения в диапазоне обычных радиочастот и применяемые им линии задержки не обладали частотной дисперсией. В области СВЧ (при длинах волн менее 10 см) в качестве линии задержки удобно использовать волноводный тракт, длиной равный нескольким сотням длин волн исследуемого колебания. При этом оказывается необходимым учитывать различие в фазовых скоростях спектральных составляющих исходного колебания, как это сделано в работе В. С. Троицкого [2]. Поэтому представляет некоторый интерес рассмотреть характер изменения флуктуационных составляющих колебания, модулированного по амплитуде и фазе произвольным образом, по прохождении им линии задержки, обладающей частотной дисперсией. При измерении амплитудных и частотных флуктуаций реального генератора методом Берштейна оказывается возможным определить корреляцию между амплитудными и частотными флуктуациями и найти их автокорреляционные зависимости.

### Влияние частотной дисперсии передающей линии на синусоидальный сигнал, имеющий случайную модуляцию по амплитуде и фазе

Рассмотрим гармонический генератор, колебания которого модулированы случайным образом по амплитуде и фазе:

$$V(t) = V_0[1 + m(t)] \sin [\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (1)$$

где  $\varphi(t) = \int_0^t \omega(t) dt$ ,  $m(t)$  и  $\omega(t)$  — случайные функции со стационарным распределением;  $V$  — стационарная амплитуда колебаний. Предположим, что это колебание проходит через линию передачи длины  $l$ , обладающей частотной дисперсией (рис. 1). Вид колебания на вы-

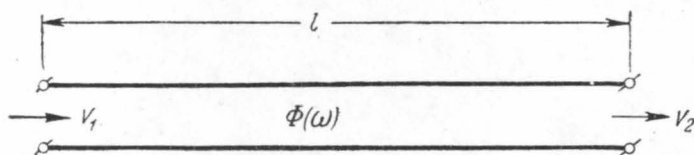


Рис. 1. Схематическое изображение линии задержки:  $V_1$  — напряжение сигнала на входе линии;  $V_2$  — на выходе линии;  $\Phi(\omega)$  — передаточная функция линии

ходном конце будет зависеть от передаточной функции линии  $\Phi(\omega)$  [5]. Причем, если  $V_1(\omega)$  является изображением Фурье для  $V_1(t)$ \*, а  $V_2(\omega)$  — для  $V_2(t)$ , то

$$V_2(\omega) = \Phi(\omega) V_1(\omega). \quad (2)$$

В общем случае передаточная функция может быть записана в виде:

$$\Phi(\omega) = A(\omega) e^{\pm j\varphi(\omega)}. \quad (3)$$

Когда активные потери в линии не зависят от частоты и набег фазы  $\varphi(\omega)$  пропорционален длине линии

$$\varphi(\omega) = \beta(\omega) l;$$

$\Phi(\omega)$  принимает вид:

$$\Phi(\omega) = e^{\mp j\beta(\omega)l}. \quad (4)$$

Перепишем (1) в виде:

$$V_1(t) = \frac{V_0}{2} \{ [\alpha(t) - j\gamma(t)] e^{j\omega_0 t} + [\alpha(t) + j\gamma(t)] e^{-j\omega_0 t} \}, \quad (5)$$

где

$$\alpha(t) = [1 + m(t)] \sin \varphi(t), \quad \gamma(t) = [1 + m(t)] \cos \varphi(t).$$

Отсюда  $V_1(\omega)$  равно:

$$V_1(\omega) = \frac{V_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha(t) - j\gamma(t)] e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{V_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha(t) + j\gamma(t)] e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt = \frac{V_0}{2} \{ [\alpha(\omega - \omega_0) - j\gamma(\omega - \omega_0)] + [\alpha(\omega + \omega_0) + j\gamma(\omega + \omega_0)] \}. \quad (6)$$

\*  $V(t)$  предполагается конечной в интервале  $(-T, T)$  и равной нулю за его пределами, то есть  $V(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^T V(t) e^{-j\omega t} dt$  и составляющие Фурье  $V(\omega)$  для случайной функции  $V(t)$  понимаются здесь аналогично тому, как имеет место, например, в работах [5,6]

Используя (2), (4) и (6), получим для колебания на выходе линии передачи  $V_2(t)$ , предварительно разлагая фазовую постоянную линию  $\beta(\omega)$  в ряд около  $\omega_0$  по степеням  $(\omega \pm \omega_0)$  и ограничиваясь первыми двумя членами разложения:

$$V_2(t) = \frac{V_0}{2} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha(\omega - \omega_0) - j\gamma(\omega - \omega_0)] e^{j(\omega - \omega_0)(t - \tau)} \times \right. \\ \times d\omega e^{j(\omega_0 t - \beta_0 t)} + \frac{V_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha(\omega + \omega_0) + j\gamma(\omega + \omega_0)] \times \\ \left. \times e^{j(\omega + \omega_0)(t - \tau)} d\omega e^{-j(\omega_0 t - \beta_0 t)} \right\}, \quad (7)$$

где  $\tau = l/v_{гр}$ . ( $v_{гр} = 1/\beta'$ ). Здесь при разложении  $\beta(\omega)$  в ряд считается, что постоянная распространения — четная функция частоты и, следовательно,

$$\beta'(+\omega) = \beta'(-\omega), \quad \beta(\omega) = \beta_0 + \beta'_0(+\omega_0)(\omega - \omega_0) + \dots, \quad (8)$$

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta'_0(-\omega_0)(\omega + \omega_0) + \dots = \beta_0 - \beta'_0(+\omega_0)(\omega + \omega_0) + \dots$$

Интегралы в выражении (7) представляют собой разложение Фурье для функций  $\alpha$  и  $\gamma$  в момент времени  $(t - \tau)$ . Следовательно, для  $V_2(t)$  можно написать:

$$V_2(t) = V_0 \alpha(l - \tau) \cos(\omega_0 t - \beta_0 l) + V_0 \gamma(t - \tau) \sin(\omega_0 t - \beta_0 l). \quad (9)$$

Или, учитывая (1), (5), получим для колебания, модулированного по амплитуде и фазе случайным образом, на выходе линии передачи, параметры которой заданы выражениями (4), (8), следующее выражение:

$$V_2(t) = V_0 [1 + m(t - \tau)] \sin[\omega_0 t - \beta_0 l + \varphi(t - \tau)]. \quad (10)$$

### Преобразование флуктуаций частоты в амплитудные флуктуации

При образовании флуктуаций фазы колебаний гармонического генератора методом Берштейна [1] на детекторе суммируются колебания генератора, прошедшие по короткому и длинному пути (линия задержки). Амплитудные и фазовые модуляции суммарного сигнала оказываются зависящими каждая и от амплитудных, и от фазовых модуляций исходного сигнала.

Для суммарного колебания, используя выражение (1) и (10), имеем:

$$V_{\Sigma}(t) = V_1(t) + V_2(t) = V_0 \{ [1 + m(t)] \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] + \\ + k [1 + m(t - \tau)] \sin[\omega_0 t - \beta_0 l + \varphi(t - \tau)] \}, \quad (11)$$

где  $k$  — амплитудный коэффициент (рис. 2).

После несложных преобразований выражения (11) получим для  $V_{\Sigma}(t)$ :

$$V_{\Sigma}(t) = [U_{\Sigma 0} + V_{\Sigma 0}(t, \tau)] \sin [\omega_0 t + \xi(t, \tau)], \quad (12)$$

где обозначено:

$$U_{\Sigma 0} + V_{\Sigma 0}(t, \tau) = V_0 \sqrt{a^2 + b(t, \tau)} \quad (13)$$

и

$$a^2 = 1 + k^2 + 2k \cos \beta_0 l, \quad (14)$$

$$b(t, \tau) = m^2(t) + k^2 m^2(t - \tau) + 2[m(t) + k^2 m(t - \tau)] + 2k[1 + m(t) + m(t - \tau) + m(t)m(t - \tau)] \cos [\Delta(t, \tau) + \beta_0 l] - 2k \cos \beta_0 l, \quad (15)$$

$$\operatorname{tg} \xi(t, \tau) = \frac{[1 + m(t)] \sin \varphi(t) + k[1 + m(t - \tau)] \sin [\varphi(t - \tau) - \beta_0 l]}{[1 + m(t)] \cos \varphi(t) + k[1 + m(t - \tau)] \cos [\varphi(t - \tau) - \beta_0 l]},$$

$$\Delta(t, \tau) = \varphi(t) - \varphi(t - \tau). \quad (16)$$

Необходимо отметить, что случайная функция  $b(t, \tau)$  является стационарной, так как  $m(t)$  стационарна по определению, стационарность

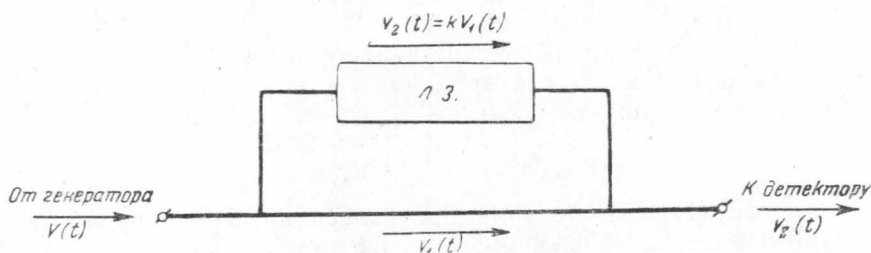


Рис. 2. К схеме метода измерений. Л. З. — линия задержки

$\Delta(t, \tau)$  легко доказывается [4]. Рассматривая малые времена задержки  $\tau$ , можно считать изменение случайной фазы колебания  $\Delta(t, \tau)$  небольшим за время  $\tau$  и при разложении  $\sin \Delta(t, \tau)$  и  $\cos \Delta(t, \tau)$  в ряд по степеням  $\Delta(t, \tau)$  ограничиваться членами  $\Delta^2(t, \tau)$ :

$$\sin \Delta(t, \tau) \approx \Delta(t, \tau); \quad \cos \Delta(t, \tau) \approx 1 - \Delta^2(t, \tau)/2.$$

С учетом сделанного допущения выражение (15) можно переписать в виде:

$$b(t, \tau) \approx m^2(t) + k^2 m^2(t - \tau) + 2[m(t) + k^2 m(t - \tau)] + 2k[m(t) + m(t - \tau) + m(t)m(t - \tau)] \cos \beta_0 l - 2k \Delta(t, \tau) \left\{ \frac{1}{2} \Delta(t, \tau) \cos \beta_0 l + [1 + m(t) + m(t - \tau)] \sin \beta_0 l \right\}. \quad (15')$$

Рассмотрим выражение для среднего квадрата случайной части амплитуды суммарного колебания  $V_{\Sigma 0}(t, \tau)$  в двух случаях:  $a^2 = 0$  и  $a^2 \gg |b(t, \tau)|$ .

1.  $a = 0$ , что соответствует  $k^2 = 1$  и  $\cos \beta_0 l = -1$ . По (15') получаем для  $V_{\Sigma 0}^2(t, \tau)$ :

$$\overline{V_{\Sigma 0}^2(t, \tau)} = V_0^2 \overline{[m^2(t) - m(t)m(t-\tau)] + \Delta^2(t, \tau)}, \quad (17)$$

так как  $\overline{m(t)}$  и  $\overline{\Delta(t, \tau)}$  равны 0 и  $\overline{m^2(t)} = \overline{m^2(t-\tau)}$ .

II.  $a^2 \gg |b(t, \tau)|$ , что имеет место при малых  $m(t)$ ,  $\Delta(t, \tau)$  и  $\cos \beta_0 l > -1$ . Средний квадрат переменной составляющей амплитуды суммарного колебания равен:  $(V_0^2/4a) \overline{b^2(t, \tau)}$ . Из (15') имеем для  $\overline{b^2(t, \tau)}$  (тройными произведениями и выше случайных величин пренебрегаем).

$$\begin{aligned} \overline{b^2(t, \tau)} = & 4\{[(1 + k \cos \beta_0 l)^2 + k^2(k + \cos \beta_0 l)^2] \overline{m^2(t)} + \\ & + k^2 \sin^2 \beta_0 l \overline{\Delta^2(t, \tau)} + 2k(k + \cos \beta_0 l)(1 + \\ & + k \cos \beta_0 l) \overline{m(t)m(t-\tau)} - 2k[(1 + k \cos \beta_0 l) \times \\ & \times \overline{\Delta(t, \tau)m(t)} + k(k + \cos \beta_0 l) \overline{\Delta(t, \tau)m(t-\tau)}] \sin \beta_0 l\}. \end{aligned} \quad (18)$$

### Разложение спектральной плотности суммарного сигнала

Перейдем в выражениях (17) и (18) от средних по времени квадратов случайных величин и их корреляционных функций к соответствующим спектральным плотностям. Для  $\overline{V_{\Sigma 0}^2(t, \tau)}$ ,  $\overline{m^2(t)}$ ,  $\overline{m(t)m(t-\tau)}$  и  $\overline{\Delta^2(t, \tau)}$  можно написать [4, 5]:

$$\overline{V_{\Sigma 0}^2(t, \tau)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\Sigma}(\omega) d\omega, \quad \overline{m^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_m(\omega) d\omega, \quad (19)$$

$$\overline{m(t)m(t-\tau)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_m(\omega) \cos \omega\tau d\omega,$$

$$\overline{\Delta^2(t, \tau)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\omega}(\omega) \left[ \sin^2 \frac{\omega\tau}{2} / \left( \frac{\omega\tau}{2} \right)^2 \right] \tau^2 d\omega,$$

где  $S_{\Sigma}(\omega)$ ,  $S_m(\omega)$  и  $S_{\omega}(\omega)$  — спектральные плотности соответственно флуктуационного напряжения на детекторе, флуктуаций амплитуды  $m(t)$  и частоты  $\omega(t)$ .

Случай I. Подставляя выражение (19) в (17), получаем интеграл по  $\omega$ , подынтегральное выражение которого дает спектральную плотность суммарного сигнала  $V_{\Sigma 0}(t, \tau)$  как сумму спектральных плотностей амплитудных и частотных флуктуаций с некоторыми коэффициентами:

$$S_{\Sigma 1}(\omega) = 4V_0^2 [S_m(\omega) + S_{\omega}(\omega)/\omega^2] \sin^2 \frac{\omega\tau}{2}. \quad (20)$$

(20) имеет место для случая  $a^2 = 0$ , когда «задержанное» и «прямое» колебания на детекторе на частоте  $\omega_0$  оказываются в противофазе, и при равенстве амплитуд компенсируют друг друга. Постоянная составляющая тока детектора отсутствует и боковые частоты, интерферируя, дают на детекторе чисто шумовой сигнал. Он оказывается пропорциональным квадрату стационарной амплитуды  $V_0^2$  рассматриваемого колебания. Это позволяет при большом  $V_0^2$  упростить индикационную аппаратуру, повысить точность измерений.

Из (20) видно, что при уменьшении  $\omega$ , когда  $\omega\tau < \pi$ , коэффициент при члене, характеризующем амплитудные шумы, уменьшается как  $\sin^2$ , коэффициент при фазовых шумах увеличивается, стремясь к 1 (и тем быстрее, чем больше время задержки). Кроме того, если учесть, что амплитудные шумы при малых  $\omega$  значительно меньше фазовых [2, 3], то выражение (20) будет определять частотные флуктуации в наиболее интересной области спектра рассматриваемых колебаний.

Случай II. Если на детекторе имеется постоянная составляющая исследуемого сигнала, во много раз большая флуктуационного напряжения ( $a^2 \gg |b(t, \tau)|$ ), то средний квадрат флуктуационной части напряжения детектора оказывается зависящим также и от взаимной корреляции амплитудных и частотных флуктуаций. Входящие в (18) средние значения от перекрестных произведений функций фазовых и амплитудных флуктуаций могут быть записаны в виде, подобном (19). В подынтегральное выражение будет входить функция взаимной спектральной плотности частотных и амплитудных флуктуаций  $S_{\omega m}(\omega)$  и некоторая функция частоты  $\omega$  и времени задержки  $\tau$ .

Для  $\Delta(t, \tau)$  имеем:

$$\Delta(t, \tau) = \int_0^\tau \omega(t - \tau) d\tau. \quad (21)$$

Среднее от произведения  $\overline{\Delta(t, \tau) m(t)}$  равно по определению:

$$\overline{\Delta(t, \tau) m(t)} = \frac{1}{2T} \int_{T-\infty}^{+T} \Delta(t, \tau) m(t) dt. \quad (22)$$

Подставив (21) в (22) и меняя порядок интегрирования, получаем:

$$\overline{\Delta(t, \tau) m(t)} = \int_0^\tau R_{\omega m}(-\tau) dt. \quad (23)$$

Используя представление корреляционной функции в виде интеграла Фурье от спектральной плотности, преобразуем выражение (23) к виду:

$$\overline{\Delta(t, \tau) m(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\omega m}(\omega) \cos \omega\tau d\omega d\tau.$$

Отсюда получаем после интегрирования по  $\tau$ :

$$\overline{\Delta(t, \tau) m(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\omega m}(\omega) [\sin \omega\tau / \omega\tau] \tau d\omega. \quad (24)$$

Аналогичное выражение имеем и для  $\Delta(t, \tau) m(t - \tau)$ , то есть

$$\overline{\Delta(t, \tau) m(t - \tau)} = \overline{\Delta(t, \tau) m(t)}. \quad (25)$$

Подстановка в (18) выражений (19), (24) и (25) дает для спектральной плотности суммарного сигнала  $S_{\Sigma 2}(\omega)$  следующее выражение:

$$\begin{aligned} S_{\Sigma 2}(\omega) = & \frac{V_0^2}{a^2} \{ [a^4 - 4k(1 + k \cos \beta_0 l)(k + \cos \beta_0 l) \times \\ & \times \sin^2 \frac{\omega \tau}{2}] S_m(\omega) + \left[ \sin^2 \frac{\omega \tau}{2} / \left( \frac{\omega \tau}{2} \right)^2 \right] \times \\ & \times \tau^2 k^2 \sin^2 \beta_0 l S_{\omega}(\omega) - 2 [\sin \omega \tau / \omega \tau] \times \\ & \times \tau a^2 k \sin \beta_0 l S_{\omega m}(\omega) \}. \end{aligned} \quad (26)$$

При  $\kappa + \cos \beta_0 l = 0$  или  $1 + \kappa \cos \beta_0 l = 0$  выражение (26) упрощается:

$$\begin{aligned} S'_{\Sigma 2}(\omega) = & V_0^2 \left\{ (1 - k^2) S_m(\omega) + \left[ \sin^2 \frac{\omega \tau}{2} / \left( \frac{\omega \tau}{2} \right)^2 \right] \times \right. \\ & \left. \times \tau^2 k^2 S_{\omega}(\omega) - 2 [\sin \omega \tau / \omega \tau] \tau k \sin \beta_0 l = S_{\omega m}(\omega) \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

если  $\kappa + \cos \beta_0 l = 0$ , и

$$\begin{aligned} S''_{\Sigma 2}(\omega) = & V_0^2 \left\{ (k^2 - 1) S_m(\omega) + \left[ \sin^2 \frac{\omega \tau}{2} / \left( \frac{\omega \tau}{2} \right)^2 \right] \times \right. \\ & \left. \times \tau^2 S_{\omega}(\omega) - 2 [\sin \omega \tau / \omega \tau] \tau k \sin \beta_0 l S_{\omega m}(\omega) \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

если  $1 + \kappa \cos \beta_0 l = 0$ .

Смысл выражений  $\kappa + \cos \beta_0 l = 0$  и  $1 + \kappa \cos \beta_0 l = 0$ , определяющих амплитудные и фазовые соотношения между прямой и «задержанной» волнами, понятен из рис. 3. Подробнее он изложен в работах [1, 2].

Рассмотрим полученные результаты. Выражение (26) совпадает по своему характеру с соответствующим выражением (43) работы [2]. Основное отличие (26) от (43) [2] заключается в появлении в явном виде в (26) слагаемого, соответствующего взаимной корреляции амплитудных и частотных флуктуаций  $S_{\omega m}(\omega)$ . Ему соответствует в (43) [2] член так называемых «смешанных шумов» —  $\zeta S_m(\omega)$  ( $\zeta$  — коэффициент корреляции амплитуды и фазы), не имеющий непосредственной физической интерпретации.

В выражениях (27) и (28) корреляционный член входит с множителем  $\sin \beta_0 l$ . Это дает возможность вычислить  $S_{\omega m}(\omega)$ , используя изменение знака  $\sin \beta_0 l$  при переходе синуса через ноль.

В выражениях  $\kappa + \cos \beta_0 l = 0$  и  $1 + \kappa \cos \beta_0 l = 0$  одному значению  $\kappa$  соответствует два значения фазового угла  $\beta_0 l$ , отличающихся друг от друга не более, чем на  $\pi$  (рис. 3):

$$\beta_{0,1,2} l = (2n - 1) \pi \pm \psi,$$

где  $n = 1, 2 \dots$  и  $0 < \psi < \pi/2$ , при которых значения синусов равны по модулю:  $\sin \beta_0 l_1 = -\sin \beta_0 l_2$ .

Если на длине  $l$  укладывается большое число длин волн (порядка

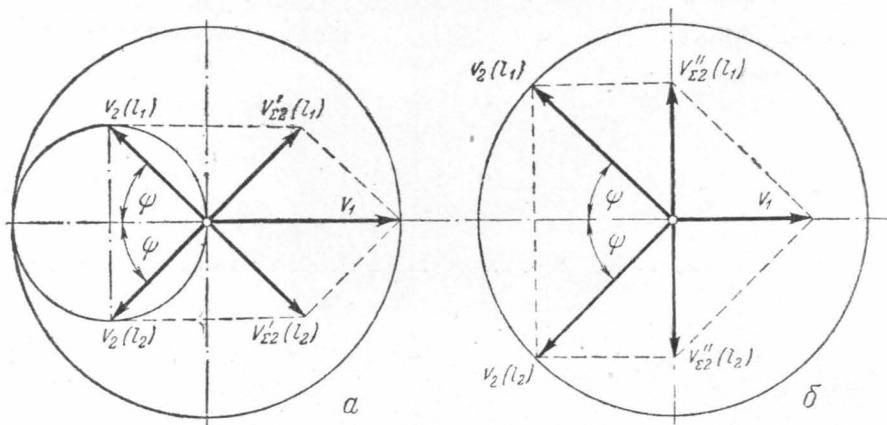


Рис. 3. Векторная диаграмма для суммарного сигнала  $V_{\Sigma}(t)$ :  $a - k < 1$ ;  $b - k > 1$

нескольких сот), что обычно имеет место при измерениях, то можно считать  $\tau_1 = \tau_2$ . Полуразность выражений (27) или (28), взятых для  $l_1$  и  $l_2$ , дает  $S_{\text{ом}}(\omega)$  при известных  $k$ ,  $\tau$ ,  $\omega$ .

### Заключение

Выражение (10) для сигнала на выходе линии задержки, обладающей линейной частотной дисперсией, показывает, что время задержки для флуктуационных составляющих является групповым временем задержки на основной частоте  $\omega_0$ , то есть флуктуации как бы «отстают» от фазы несущей частоты  $\omega_0$ . Это можно объяснить тем, что спектральные составляющие колебания, найденные с помощью интеграла Фурье, являются некоторыми усреднениями по времени. Групповое время задержки для амплитудных и частотных флуктуаций, полученное таким путем, входит в выражение (26). Это совпадает с результатами измерений, приведенными в [3].

### ЛИТЕРАТУРА

1. Берштейн И. Л. ДАН СССР, 20, 1, 11, 1938: ЖТФ, 11, 4, 305, 1941.
2. Троицкий В. С. Радиотехника и электроника, 1, 6, 819, 1956.
3. Троицкий В. С., Хрулев В. В. Радиотехника и электроника, 1, 6, 831, 1956.
4. Малахов А. Н. ЖЭТФ, 30, 5, 884, 1956; Радиотехника и электроника, 2, 10, 1295, 1957.
5. Солодовников В. В. Введение в статистическую динамику систем автоматического регулирования, ГИТТЛ, 1952, гл. I, III, IV.
6. Долуханов М. П. Введение в теорию передачи информации по электрическим каналам связи. Связьиздат, М., 1955.

Поступила в редакцию  
25. 8 1958 г.

Кафедра  
радиотехники