Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1959

МАТЕМАТИКА

КИМ ЧЕ ДЖЕН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ ВЛИЯНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

1. Введение

Пусть дана система дифференциальных уравнений возмущенного движения:

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{sj}\, x_j + X_s(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{1,1}$$

где a_{sj} — действительные числа. Предполагается, что функции X_s имеют непрерывные первые и ограниченные вторые производные в области G:

$$|x_s| \leqslant H, \quad s = 1, 2, \ldots, n. \tag{1,2}$$

Как известно, эти предположения обеспечивают существование и единственность интегральной кривой, проходящей через любую точку рассмотренной области G.

Определение. Пусть задана некоторая область G_0. Шар $\sum_{s=1}^{n} x_s^2 \leqslant R^2$ находится в области притяжения асимптотически устойчивого положения равновесия $\{x_s = 0\}$ относительно области G_0, если, каковы бы ни были траектории, начинающиеся в шаре R, они при $t \geqslant 0$ находятся в области G_0 и при $t \to \infty$ неограниченно приближаются к точке $\{x_s = 0\}$.

В дальнейшем будем предполагать, что область $G = G_0$ параллелепипед $|x_s| \leqslant H$, $s = 1, 2, \ldots, n$.

Оценки области притяжения тривиального решения получены в работах В. В. Немыцкого [3, 4], И. Г. Малкина [5], П. В. Атрашенка [6] и М. А. Айзермана [7].

В настоящей работе дается новая оценка области притяжения, основанная на построении функции Ляпунова.

2. Леммы и обозначения

Наряду с системой (1,1) рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{sj}\, x_j, \qquad s = 1, 2, \ldots, n \tag{2,1}$$

или более коротко.

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A = (a_{ij}). \tag{2,1'}$$

Рассмотрим две леммы.

Лемма 1. Если дана положительно определенная квадратичная форма

$$V = \sum_{s,\, j=1}^{n} v_{sj}\, x_s\, x_j, \qquad v_{sj} = v_{js}, \tag{2,2}$$

то n-мерный эллипсоид

$$V = \sum_{s,\, j=1}^{n} v_{sj}\, x_s\, x_j = \left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right) = H^2 \tag{2,3}$$

целиком содержится в параллелепипеде

$$|x_s| \leqslant H,$$

где V_n — определитель формы, то есть

$$V_n = \begin{vmatrix} v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n} \\ v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{n1}, v_{n2}, \ldots, v_{nn} \end{vmatrix}, \tag{2,4}$$

а V_{n-1} — наибольший по величине минор определителя V_n, $n-1$-го порядка, диагональные элементы которого совпадают с диагональными элементами определителя.

Лемма 2. Если заданы две однородные положительно определенные квадратичные формы:

$$V(x) = \sum_{s,\, j=1}^{n} v_{sj}\, x_s\, x_j, \qquad v_{sj} = v_{js},$$

$$W(x) = \sum_{s,\, j=1}^{n} w_{sj}\, x_s\, x_j, \qquad w_{sj} = w_{js},$$

такие, что для всех x, заданных в области G,

$$V(x) \leqslant W(x),$$

то поверхность $W(x) = h^2$ целиком содержится в замкнутой области, ограниченной поверхностью $V(x) = h^2$.

Доказательства этих двух лемм непосредственно следуют из теорем (3,4) и (3,10) работы А. Д. Горбунова [8].

Замечание 1. Если в квадратичной форме (2,2) $v_{sj}=0$ при $s \neq j$, то есть $V(x)=v_{11}x_1^2+v_{22}x_2^2+\ldots+v_{nn}x_n^2$, где

$$v_{ii}>0, \quad i=1,\ 2,\ldots n,$$

то шар

$$\sum_{s=1}^{n} x_s^2=\frac{\alpha}{\beta}H^2$$

целиком содержится в эллипсоиде $V(x)=\alpha H^2$, а тот в свою очередь — в области $|x_s|\leqslant H$, где

$$\alpha=\min v_{ii}\beta=\max v_{ii}.$$

Из лемм 1 и 2 следует, что, если вместо h^2 взять $\frac{V_n}{V_{n-1}}H^2$, то поверхность

$$W(x)=\frac{V_n}{V_{n-1}}H^2$$

целиком содержится в области, ограниченной поверхностью

$$V(x)=\frac{V_n}{V_{n-1}}H^2$$

а последняя — в области $|x_s|\leqslant H$.

Замечание 2. Если λ_1 — наименьший корень характеристического уравнения $\det\|v_{sj}-\lambda\delta_{sj}\|=0$, то $V_n/V_{n-1}=\lambda_1$, где v_{sj} — коэффициенты квадратической формы (2,2).

Перед тем как формулировать теорему, введем некоторые обозначения.

Рассмотрим прежде всего следующее линейное уравнение с частными производными:

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}(a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n)=-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2). \tag{2,5}$$

Будем искать, следуя Ляпунову, решение уравнения (2,5) в виде квадратичной формы

$$V=\sum_{s,j=1}^{n} v_{sj}x_s x_j,$$

где v_{sj} — неизвестны. Так как $v_{sj}=v_{js}$, то число этих неизвестных $N=n(n+1)/2$.

Подставляя V в уравнение (2,5) и сравнивая коэффициенты при $x_1^2, x_1x_2, \ldots, x_2^2, x_2x_3, \ldots, x_3^2, \ldots, x_n^2$, получим для неизвестных систему $N=n(n+1)/2$ линейных однородных уравнений вида:

$$\begin{cases} b_{11}v_{11}+b_{12}v_{12}+\ldots+b_{1n}v_{1n}+b_{1n+1}v_{22}+\ldots+b_{1N}v_{nn}=-1 \\ b_{21}v_{11}+b_{22}v_{12}+\ldots+b_{2n}v_{1n}+b_{2n+1}v_{22}+\ldots+b_{2N}v_{nn}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{N1}v_{11}+b_{N2}v_{22}+\ldots+b_{Nn}v_{1n}+b_{Nn+1}+v_{22}+\ldots+b_{NN}v_{nn}=-1. \end{cases} \tag{2,6}$$

Обозначим через Δ определитель, составленный из коэффициентов левой части системы (2,6), то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n}, \ldots, b_{1N} \\ b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n}, \ldots, b_{2N} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ b_{N1}, b_{N2}, \ldots, b_{Nn}, \ldots, b_{NN} \end{vmatrix}. \tag{2,7}$$

При этом N^2 элементов $b_{\sigma\nu}$ выражаются линейно через величины $a_{s\sigma}$.

Если Δ не равен нулю*, то из системы (2,6) можно найти v_{sj}. При этом, очевидно, имеет место следующее неравенство:

$$|v_{sj}| \leqslant \max|v_{sj}| < \frac{n|\Delta_1|}{|\Delta|}, \tag{2,8}$$

где Δ_1 — максимальный минор определителя Δ $N-1 = n(n-1)/2-1$-го порядка и n — число неравных нулю правых частей системы (2,6).

Определим нормы следующим образом:

$$\|V\| = \sum_{s,j=1}^{n} |v_{sj}|, \quad \|X\| = \sum_{s=1}^{n} |x_s|, \quad \|B\| = \sum_{s,j=1}^{n} |b_{sj}|. \tag{2,9}$$

Пусть, наконец,

$$H_1 = \frac{1}{nM}\left[\frac{1}{2n\|V\|} - \|B\|\right] > 0, \tag{2,10}$$

$$\overline{H} = \min(H, H_1), \tag{2,11}$$

где M равно $\sup\left|\frac{\partial^2 X_s}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right|$ в области G и

$$R^2 = \frac{1}{n^2}\left(\frac{V_n}{V_{n-1}} \cdot \frac{|\Delta|}{|\Delta_1|}\right)\overline{H}^2. \tag{2,12}$$

3. Оценка области влияния устойчивого, по Ляпунову, положения равновесия

Представим нелинейную функцию X_s системы (1,1) в следующем виде:

$$X_s = \sum_{j=1}^{n} b_{sj} x_j + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} C_s^{\alpha,\beta} x_\alpha x_\beta,$$

где b_{sj} — значения частных производных функций X_s по x_j в начале координат а $C_s^{\alpha,\beta}$ — значения вторых частных производных функций X_s по x_α и x_β в некоторой точке шара $|x_s| \leqslant H$; согласно нашим обозначениям

$$|C_s^{\alpha,\beta}| \leqslant M.$$

---

* Это будет иметь место, как показано Ляпуновым, если корни характеристического уравнения $\det\|A - \lambda E\| = 0$ имеют отрицательные действительные части.

Тогда систему уравнений (1,1) можно записать в следующем виде:

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{sj}\ x_j+\sum_{j=1}^{n}b_{sj}\,x_j+\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n}C_s^{\alpha,\ \beta}\,x_\alpha x_\beta, \tag{3,1}$$

$$s=1,\ 2,\ldots,\ n,$$

или более кратко:

$$\frac{dx}{dt}=Ax+Bx+f(x), \tag{3,1'}$$

где

$$f(x)=\begin{pmatrix}f(x)\\ f_2(x)\\ \vdots\\ f_n(x)\end{pmatrix},\qquad \begin{matrix}f_s(x)=x'C_s\,x,\\ x'=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\end{matrix}\qquad x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Пусть: 1) корни характеристического уравнения $\det\|A-\lambda E\|=0$ имеют отрицательные действительные части; 2) квадратичная форма $V=\sum\limits_{s,\ j=1}^{n}v_{sj}\,x_s\,x_j$ удовлетворяет уравнению $\frac{dV}{dt}=-\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)$ в силу системы $\frac{dx}{dt}=Ax$; 3) $\|B\|\leqslant\frac{1}{2n^4}\times\times\frac{|\Delta|}{|\Delta_1|}$. Тогда шар $\sum\limits_{s=1}^{n}x_s^2\leqslant R^2$ будет находиться в области притяжения асимптотически устойчивого положения равновесия относительно области $|x_s|\leqslant H$, если

$$R^2=\frac{1}{n^2}\left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\cdot\frac{|\Delta|}{|\Delta_1|}\right)\overline{H}^2,$$

где

$$\overline{H}=\min(H,\ H_1),$$

$$H_1=\frac{1}{nM}\left(\frac{|\Delta|}{2n^4\,|\Delta_1|}-\|B\|\right).$$

Доказательство. Составляя производную от функций

$$V=\sum_{s,\ j=1}^{n}v_{sj}\,x_s\,x_j$$

в силу полной системы уравнений (3,1), получим

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{sj}\,x_j+\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n}C_s^{\alpha,\ \beta}\,x_\alpha\,x_\beta\right). \tag{3,2}$$

Тогда в силу второго условия теоремы последнее уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{dV}{dt}=-\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}2v_{sj}\,x_j\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n}b_{s\nu}\ x_\nu\right)+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}2v_{sj}\,x_j\right)\left(\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{n}C_s^{\alpha,\ \beta}\,x_\alpha\,x_\beta\right). \tag{3,3}$$

Используя очевидное неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i||\beta_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \sum_{i=1}^{n}|\beta_i|$$

для второго слагаемого правой части выражения (3,3), получим следующую оценку:

$$\left|\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}2v_{sj}x_j\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n}b_{s\nu}x_\nu\right)\right| \leqslant 2\|V\|\,\|B\|\,\|X\|^2. \tag{3,4}$$

Для третьего слагаемого аналогичным образом будем иметь

$$\left|\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}2v_{sj}x_j\right)\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}C_s^{\alpha,\beta}x_\alpha x_\beta\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2nM\max_j|x_j|\,\|V\|\,\|X\|^2. \tag{3,5}$$

Далее из $\left(\sum_{s=1}^{n}|x_s|\right)^2 \leqslant n\sum_{s=1}^{n}x_s^2$ получаем следующую оценку первого слагаемого правой части уравнения (3,3):

$$-\sum_{s=1}^{n}x_s^2 \leqslant -\frac{1}{n}\left(\sum_{s=1}^{n}|x_s|\right)^2 = -\frac{1}{n}\|X\|^2. \tag{3,6}$$

Следовательно, получим неравенство

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\frac{1}{n}\|X\|^2 + 2\|V\|\,\|B\|\,\|X\|^2 + 2n\,M\max_j|x_j|\,\|V\|\,\|X\|^2 =$$

$$= \left[-\frac{1}{n} + 2\|V\|\,\|B\|\right]\|X\|^2 + 2nM\max_j|x_j|\,\|V\|\,\|X\|^2. \tag{3,7}$$

В силу неравенства

$$|v_{sj}| \leqslant \frac{n\,|\Delta_1|}{\Delta}$$

(см. 2,8) имеем

$$\frac{dV}{dt} \leqslant \left[-\frac{1}{n} + 2n^2\frac{n\,|\Delta_1|}{\Delta}\|B\|\right]\|X\|^2 + 2nM\max_j|x_j|\,n^2\frac{n\,|\Delta_1|}{|\Delta|}|X|^2. \tag{3,8}$$

Таким образом, производная dV/dt в силу полной системы определенно отрицательна в области $|x_s| \leqslant H_1$, где

$$H_1 = \frac{1}{nM}\left[\frac{|\Delta|}{2n^4|\Delta_1|} - \|B\|\right], \tag{3,9}$$

в частности в $|x_s| \leqslant \overline{H}$; $\overline{H} = \min(H, H_1)$.

Оценим область притяжения положения равновесия.

Рассмотрим шар радиуса R, где

$$R = \frac{1}{n}\left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\cdot\frac{|\Delta|}{|\Delta_1|}\right)^{1/2}\overline{H}, \qquad \overline{H} = \min(H, H_1). \tag{3,10}$$

На основании леммы 1 эллипсоид

$$V = \sum_{s,j=1}^{n} v_{sj} x_s x_j = \frac{V_n}{V_{n-1}} \overline{H}^2$$

целиком содержится в параллелепипеде $|x_s| \leqslant \overline{H}$, а следовательно, на основании леммы 2, шар радиуса

$$R = \frac{1}{n} \left(\frac{V_n}{V_{n-1}} \cdot \frac{|\Delta|}{|\Delta_1|} \right)^{1/2} \overline{H}$$

тоже входит в область $|x_s| \leqslant \overline{H}$, и, следовательно, решения, выходящие из точек этого шара, остаются в G: $|x_s| \leqslant H$ и стремятся к нулю при $t \to +\infty$. Этим теорема доказана.

Следствие. Если все действительные части λ_i $i = 1, 2, 3, \ldots n$ положительны, то Δ (2,7) тоже не равен нулю и, следовательно, те же оценки показывают, что шар $\sum_{s=1}^{n} x_s^2 = R$ будет находиться в области влияния особой точки при $t \to -\infty$.

4. Частные случаи

1) Пусть дана система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j + \sum_{j=1}^{n} b_{sj} x_j + \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n} C_s^{\alpha, \beta} x_\alpha x_\beta, \quad s = 1, 2, \ldots n. \quad (4,1)$$

Рассмотрим наряду с системой (4,1) систему

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{sj} x_j, \quad (4,2)$$

или

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (4,2')$$

и предположим, что действительные части всех корней характеристического уравнения $\det \| A - \lambda E \| = 0$ отрицательные и

$$AA' = A'A, \quad (4,3)$$

где $A = (a_{ij})$ и $A' = (a_{ji})$ (здесь и в дальнейшем в этом параграфе штрихом обозначена транспонированная матрица). Проведем построение функций Ляпунова.

Рассматривая положительно определенные функции вида

$$V = \int_t^{\infty} X' X dt \quad (4,4)$$

и их производную dV/dt, составленную в силу системы (4,2), имеем

$$\frac{dV}{dt} = -X' X = -\sum_{s=1}^{n} x_s^2, \quad (4,5)$$

то есть знакоопределенную отрицательную функцию.

Выразим функцию V через фундаментальную систему решений линейной системы $dx/dt = Ax$.

Матричное решение X системы (4,2) имеет следующий вид [2]:

$$X(t, X^{(0)}) = e^{At} X^{(0)}, \tag{4,6}$$

где $A = (a_{ij})$ — матрица из коэффициентов a_{sj} и $X^{(0)}$ — начальная односторонняя матрица при $t = t_0$. Поэтому, подставляя формулу (4,6) в (4,4), получим

$$V(t) = \int_t^\infty X' X dt = X^{(0)'} \int_t^\infty e^{A't} e^{At} dt X^{(0)}. \tag{4,7}$$

Используя равенство $AA' = A'A$, интеграл (4,7) можно определить следующим образом:

$$\int_t^\infty e^{A't} e^{At} dt = \int_t^\infty e^{(A'+A)t} dt = (A' + A)^{-1} \times$$

$$\times e^{(A'+A)t} \Big|_t^\infty = -(A' + A)^{-1} e^{(A'+A)t}. \tag{4,8}$$

Поэтому

$$V = X^{(0)'} [-(A' + A)^{-1}] e^{(A'+A)t} X^{(0)}. \tag{4,9}$$

Так как имеет место равенство $e^{A't}(A' + A) = (A' + A) e^{A't}$ (из $Ae^{A't} = e^{A't} A$ и $A' e^{A't} = e^{A't} A'$), то отсюда можно получить следующее:

$$(A' + A)^{-1} e^{(A'+A)t} = e^{(A'+A)t} (A' + A)^{-1}. \tag{4,10}$$

Следовательно, равенство (4,9) можно записать так:

$$V = -X^{(0)'} e^{A't} (A' + A)^{-1} e^{At} X^{(0)}. \tag{4,11}$$

В силу (4,6) равенство (4,11) можно выразить следующим образом:

$$V = -X'(A' + A)^{-1} X. \tag{4,12}$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$V = \sum_{s,j}^{n} d_{sj} x_s x_j. \tag{4,13}$$

где d_{sj} — элементы матрицы $-(A' + A)^{-1}$.

Теперь покажем, что производная функция dV/dt от функции V удовлетворяет равенствам (4,5).

Дифференцируя функцию V (4,12) относительно t, получим

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(4,2')} = -\frac{dX'}{dt}(A' + A)^{-1}X - X'(A' + A)^{-1}\frac{dX}{dt}.$$

В силу системы (4,2')

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{(4,2')} = -X'A'(A' + A)^{-1}X - X'(A' + A)^{-1}AX =$$

$$= -X'[A'(A' + A)^{-1} + (A' + A)^{-1}A]X.$$

Правая часть последнего уравнения равна $-X'X$, если скобки равны единичной матрице. Действительно, из равенства $AA' = A'A$ следует, что $A(A'+A)=(A'+A)A$; следовательно, $(A'+A)^{-1}A=A(A'+A)^{-1}$. Из этого

$$A'(A'+A)^{-1}+(A'+A)^{-1}A=A'(A'+A)^{-1}+A(A'+A)^{-1}=$$
$$=(A'+A)(A'+A)^{-1}=E.$$

Как и в теореме 1, получаем неравенство (3,7)

$$\frac{dV}{dt}\leqslant\left[-\frac{1}{n}+2\|V\|\|B\|\right]\|X\|^2+2nM_{\max}|x_j|\|V\|\|X\|^2.$$

Поэтому, продолжая доказательство аналогично теореме 1, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Если матрица A перестановочная по транспонированию ($AA'=A'A$), корни характеристического уравнения $\det\|A-\lambda E\|=0$ отрицательны и для нормы b_{sj} имеет место следующее неравенство:

$$\|B\|<\frac{1}{2n\|V\|},$$

где $\|V\|=\sum_{s,\,j=1}^{n}|d_{sj}|$ (см. 2,9), d_{sj} — элементы матрицы $-(A'+A)^{-1}$,

то шар $\sum_{s=1}^{n}x_s^2\leqslant R^2$ находится в области притяжения асимптотически устойчивого положения равновесия $\{x_s=0\}$ для заданной системы (4,1), где R^2 имеет вид (2,12), и в частности $V_n=\det\|(A'+A)^{-1}\|$.

Следствие. Очевидно, что утверждение теоремы остается верным, если взять матрицу симметрическую ($A=A'$) такую, что корни характеристического уравнения $\det\|A-\lambda E\|=0$ отрицательны.

2) Пусть дана система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{sj}x_j+\sum_{j=1}^{n}b_{sj}x_j+$$
$$+\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n}C_s^{\alpha,\,\beta}x_\alpha x_\beta,\quad s=1,\,2,\ldots,\,n,\tag{4,14}$$

где $a_{ii}<0$, $a_{sj}=0$ при $s>j$, пусть $\min\limits_i|a_{ii}|=a$.

Рассмотрим наряду с системой (4,14) систему

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{\substack{j=1\\ s\leqslant j}}^{n}a_{sj}x_j,\quad s=1,\,2,\ldots,\,n.\tag{4,15}$$

В этом случае определитель Δ (2,7) с этими коэффициентами a_{sj}, $s\leqslant j$, $s,\ j=1,\,2,\ldots,\,n$ имеет вид:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2a_{11} & 0\\ a_{12} & a_{11}+a_{22}\\ \ldots & \ldots\\ \ldots & 2a_{nn}\end{vmatrix}.\tag{4,16}$$

Так как значение определителя (4,16) равно $\Delta = \prod_{i,j=1}^{n} (a_{ii} + a_{jj})$, то для $|\Delta_1|/|\Delta|$ (см. 2,8) имеем следующее равенство:

$$\frac{|\Delta_1|}{|\Delta|} = \frac{1}{\min\limits_{i,\,j} |a_{ii} + a_{jj}|} = \frac{1}{2a}. \qquad (4,17)$$

Поэтому, как следствие из теоремы 1, можно доказать теорему 3.

Теорема 3. Пусть квадратичная форма $V = \sum\limits_{s,\,j=1}^{n} v_{sj} x_s x_j$ удовлетворяет уравнению $dV/dt = -(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$ в силу системы (4,15);

$$\|B\| \leqslant \frac{a}{n^4}; \qquad (4,18)$$

тогда шар $\sum\limits_{s=1}^{n} x_s^2 \leqslant R^2$ будет находиться в области притяжения асимптотически устойчивого положения равновесия относительно области $x_s| \leqslant H$, если

$$R^2 = \frac{1}{n^2}\left(2a\,\frac{V_n}{V_{n-1}}\right)\overline{H}^2,$$

где

$$\overline{H} = \min(H,\ H_1),\quad H_1 = \frac{1}{nM}\left[\frac{a}{n^4} - \|B\|\right]. \qquad (4,19)$$

3) Пусть дана система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt} = \lambda_s x_s + \sum_{j=1}^{n} b_{sj} x_j +$$

$$+ \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{n} C_s^{\alpha,\,\beta} x_\alpha x_\beta,\quad s = 1,\ 2, \ldots,\ n, \qquad (4,20)$$

где $\lambda_s < 0$ $s = 1,\ 2, \ldots,\ n$, и пусть $\min\limits_s |\lambda_s| = \lambda$, $\max\limits_s |\lambda_s| = \mu$.

Рассмотрим наряду с системой (4,20) систему

$$\frac{dx_s}{dt} = \lambda_s x_s,\quad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \qquad (4,21)$$

В этом случае квадратичная форма $V = \sum\limits_{s,\,j=1}^{n} v_{sj} x_s x_j$, удовлетворяющая уравнению $dV/dt = -(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$ в силу $dx_s/dt = \lambda_s x_s$, имеет вид

$$V = -\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{\lambda_s} x_s^2. \qquad (4,22)$$

Следовательно:

$$\|V\| = \sum_{s,\, j=1}^{n} |v_{sj}| = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{|\lambda_s|} < \frac{n}{2}\,\frac{1}{\min|\lambda_s|} = \frac{n}{2}\,\frac{1}{\lambda}. \qquad (4{,}23)$$

Поэтому, как следствие из теоремы 1, получаем теорему 4.

Теорема 4. Если имеет место неравенство

$$\|B\| < \frac{\lambda}{n^2}, \qquad (4{,}24)$$

то шар $\sum_{s=1}^{n} x_s^2 \leqslant R^2$ будет находиться в области притяжения асимптотически устойчивого положения равновесия относительно области $|x_s| \leqslant H$,
если

$$R^2 = \frac{\lambda}{\mu}\overline{H}^2\,^*, \quad \overline{H} = \min(H,\ H_1),$$

$$H_1 = \frac{1}{nM}\left[\frac{\lambda}{n^2} - \|B\|\right]^{**} \qquad (4{,}25)$$

5. Пример

Пусть например, дана система двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y + X(x,\ y) \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + Y(x,\ y), \end{cases} \qquad (5{,}1)$$

где

$$|X|,\ |Y| < B\{|x| + |y|\} \text{ в области } G: |x|,\ |y| \leqslant H. \qquad (5{,}2)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial x}(-x - y) + \frac{\partial V}{\partial y}(x - y) = -(x^2 + y^2). \qquad (5{,}3)$$

Будем искать функцию V в виде квадратичной формы

$$V = v_{11}x^2 + 2v_{12}xy + v_{22}y^2, \qquad (5{,}4)$$

где v_{sj}, i, $j = 1$, 2 суть неопределенные числа. Подставляя функцию (5,4) в уравнение (5,3), получим

$$(2xv_{11} + 2v_{12}y)(-x - y) + (2v_{12}x + 2v_{22}y)(x - y) = -(x^2 + y^2).$$

Для определения v_{sj} получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -2v_{11} + 2v_{12} = -1 \\ -v_{11} - 2v_{12} + v_{22} = 0 \\ -\qquad 2v_{12} - 2v_{22} = -1, \end{cases} \qquad (5{,}5)$$

---

*См. замечание 1.

** См. (2,10).

В этой системе $|\Delta| = 16$, $|\Delta_1| = 6$. Таким образом, $\|B\|$ должна удовлетворять следующему неравенству, то есть, следуя условию 3 из теоремы 1,

$$\|B\| < 1/2n^4 |\Delta/\Delta_1| = 1/12.$$

Однако, если найти $v_{11} = 1/2$, $v_{12} = 0$, $v_{22} = 1/2$, то имеем $\|V\| = 1$ и для $\|B\|$ можно получить следующую оценку:

$$\|B\| < 1/4 \, (= 1/2n \|V\|).$$

Теперь найдем область асимптотической устойчивости для заданной системы V_n, $V_{n-1} = 1/2$. Следовательно, в силу (2,12) или из теоремы 1

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{16}{6}\right)^{1/2} H = \frac{1}{\sqrt{3}} H.$$

В силу оценки В. В. Немыцкого [3]

$$C_R = B < \frac{b^2}{n^2 \sqrt{m}} \varepsilon_{\max}^{n-1}, \quad R = \varepsilon_{\max}^{n-1} H,$$

где

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\sqrt{n-1}}{n^2} \frac{b^2}{\|A\|}, \quad \|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2},$$

m — число отличных от нуля функций X_s и $b^2 = \min_i |\mathrm{Re}\lambda_i|$. Следовательно, можно получить для рассмотренного выше примера:

$$b^2 = 1, \quad n = 2, \quad m = 2, \quad \|A\| = 2,$$

$$C_R < ({}^1/_{2^2} \sqrt{2}) \cdot ({}^1/_{2^2} \cdot 2) = {}^1/_{32} \sqrt{2},$$

$$R = \varepsilon_{\max}^{n-1} H = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} H = \frac{1}{8} H.$$

Таким образом, в этом случае наша оценка лучше оценки, полученной по методу В. В. Немыцкого.

Настоящая работа выполнена под руководством проф. В. В. Немыцкого, которому автор приносит благодарность за постановку задачи и за постоянную помощь и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, М. — Л., 1950.
2. Немыцкий В. В., Степанов И. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М. — Л., 1949.
3. Немыцкий В. В. ДАН СССР, **101**, № 5, 1955.
4. Немыцкий В. В. Тр. Моск. матем. о-ва, т. 5, стр. 456—482, 1956.
5. Малкин И. Г. ПММ, **167**, вып. 4, 1952.
6. Атрашенок П. В. Вестн. ЛГУ, сер. мат., физ., хим., № 8, 1954.
7. Айзерман М. А. Автоматика и телемеханика, **8**, вып. 1, 1947.
8. Горбунов А. Д. Вестн. МГУ, № 10, 1950.

Поступила в редакцию
2.12 1958 г.

Кафедра
дифференциальных уравнений