Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2—1959

А. Д. ГОРБУНОВ, Б. М. БУДАК

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ РЕШЕНИИ МНОГОТОЧЕЧНЫМИ РАЗНОСТНЫМИ МЕТОДАМИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $dy/dx = f(x, y)$

В этой статье сначала вводится понятие вычислительного процесса, возникающего при решении задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$ многоточечным разностным методом, и понятие устойчивости такого вычислительного процесса, находятся необходимые и достаточные условия устойчивости. Затем устанавливается устойчивость некоторых классов вычислительных процессов и рассматриваются примеры.

Формированию понятий, излагаемых в данной статье, способствовали примеры и взгляды, встречающиеся в современной математической литературе [1—3] и вычислительная практика.

§ 1

Пусть для уравнения

$$dy/dx = f(x, y), \tag{1}$$

правая часть которого определена, непрерывна, вычислима* и удовлетворяет условию Липшица по y с константой L в некотором прямоугольнике $\overline{\Pi}: |x - x_0| \leqslant A,\ |y - y_0| \leqslant B$, требуется найти решение $y = y(x)$, удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

---

* Под вычислимой функцией мы понимаем такую функцию, определение которой содержит информацию, достаточную для получения в любой точке области ее задания приближенного значения этой функции в виде десятичной дроби с любым наперед заданным числом верных знаков. Под верным знаком десятичной дроби, составляющей приближенное значение некоторой величины, мы понимаем всякий знак этой дроби, принадлежащий разряду, единица которого не меньше модуля абсолютной погрешности этой дроби.

Пусть приближенные зничения y_k названного решения в узлах $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, h > 0$ отыскиваются при помощи конечно-разностного уравнения

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i y_{k-i} = h \sum_{i=0}^{n} \beta_i f_{k+l-i}, \quad f_j = f(x_j, y_j), \tag{3}$$

где l, m, n — заданные целые числа, $m > 0$, $n \geqslant 0$ и α_i, β_i — заданные действительные числа, не зависящие от h, α_0, β_0, α_m, β_n, отличны от нуля ($\alpha_0 = 1$), при начальных условиях

$$y_0 = g(x_0, h), \quad y_i = g(x_i, h), \quad i = -1, \ldots, -(p-q-1), \tag{4}$$

где $p = \max(k, k+l)$, $q = \min(k-m, k+l-n)$, а $g(x, h)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая, вычислимая функция x, выбираемая, вообще говоря, для каждого значения h и называемая начальной. Шаг h и функцию $g(x, h)$ нужно выбирать так, чтобы выполнялись включения:

$$(x_i, g(x_i, h)) \in \Pi, \quad i = -1, \ldots, -(p-q-1). \tag{4'}$$

Пусть существуют числа $\overline{x}$, $0 < \overline{x} - x_0 \leqslant A$, и h_0 такие, что задача (3), (4) разрешима для каждого h, $0 < h \leqslant h_0$ при всяком $k = 1, \ldots, S_h = 1 + (\overline{x} - x_0) h$.

Рассматривая какой-либо класс K допустимых функций f и для каждой функции f из этого класса — определенный как-либо класс G_f допустимых начальных функций g, обозначим через y_k^*, $k = 1, \ldots, S_h$, $y_0^* = y_0$ — приближенное решение задачи (3), (4), получаемое вполне определенным способом $R(K)$, $0 < h \leqslant h' \leqslant h_0$, одинаковым для всех функций f из класса K и для всех соответствующих начальных функций g. При этом счет ведется с $r + \sigma$ знаками после запятой и требуемые значения f и g вычисляются с $r + \sigma$ верными знаками после запятой, а функция y_k^* получается в результате округления построенной таким образом дроби до r-го знака после запятой (r и σ — целые числа, $\sigma \geqslant 0$). Предельную погрешность округления при счете с $r + \sigma$ знаками после запятой будем обозначать через θ', а при счете с r знаками после запятой — через θ, $\theta' \leqslant \theta$.

Чтобы упомянутые выше вычисления можно было производить при всяких r, σ, h, $0 < h \leqslant h'$ и для всех $k = 1, \ldots, S_h$, будем каждый раз функцию $f(x, y)$ доопределять при помощи соотношений

$$f(x, y) = \begin{cases} f(x, y_0 + B) & \text{при } y \geqslant y_0 + B, \\ f(x, y_0 - B) & \text{при } y \leqslant y_0 - B. \end{cases}$$

В результате этого уравнение (1) будет продолжено на полосу $|x - x_0| \leqslant A$, $-\infty < y < +\infty$ с сохранением всех свойств его правой части, которые перечислены выше.

Совокупность (3), (4), $R(K)$, где h меняется в полуотрезке $0 < h \leqslant h'$, будем называть вычислительным процессом, возникающим при решении задачи (1), (2) разностным методом (3), (4), или, короче, — вычислительным процессом (3), (4), $R(K)$.

Таким образом, в качестве приближенного решения задачи (1), (2) в узлах x_k принимается функция $y = y_k^*$, $k = 0, 1, \ldots, S_h$. В связи с этим разность

$$D_k = y(x_k) - y_k^* \tag{5}$$

будем называть полной погрешностью y_k^*, разность

$$d_k = y_k - y_k^* \tag{6}$$

— вычислительной погрешностью y_k^*, а разность

$$\delta_k = y(x_k) - y_k \tag{7}$$

— погрешностью метода (3), (4). Имеет место равенство

$$D_k = d_k + \delta_k. \tag{8}$$

Мы скажем, что вычислительный процесс (3), (4), $R(K)$ сходится, если при любых допустимых фиксированных f и g для всякого h, $0 < h \leqslant h'$ существует положительное число θ_h^*, стремящееся к нулю вместе с h не быстрее некоторой конечной степени h, и такое, что

$$\lim_{h \to 0} \sup_{\substack{0 < k \leqslant S_h \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_h^*}} |D_k| = 0. \tag{9}$$

Ясно, что для сходимости вычислительного процесса (3), (4), $R(K)$ необходимо и достаточно, чтобы при любых допустимых фиксированных f и g для всякого h, $0 < h \leqslant h'$ существовали положительные числа ε_h^* и θ_h^*, стремящиеся к нулю вместе с h причем θ_h^* стремится к нулю не быстрее некоторой степени h, и такие, что неравенство

$$|D_k| \leqslant \varepsilon_h^* \tag{9'}$$

выполняется равномерно по $k = 0, 1, \ldots, S_h$ и по θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_h^*$.

Вычислительный процесс (3), (4), $R(K)$ мы назовем устойчивым ν-го порядка, $\nu = 0$, 1, если при любых допустимых фиксированных f и g для всякого h, $0 < h \leqslant h'$ существуют положительные числа ε'_h и θ_h такие, что неравенство

$$|\Delta^\nu d_{k-1}| \leqslant h^\nu \varepsilon'_h \tag{10}$$

выполняется равномерно по $k = 1, \ldots, S_h + (1 - \nu)$ и по θ, $\theta \leqslant \theta \leqslant \theta'_h$, причем ε'_h и θ'_h стремятся к нулю при $h \to 0$; θ_h стремится к нулю не быстрее некоторой конечной степени h.

При помощи равенства (8) легко показать, что если конечно-разностный процесс (3), (4) сходится, то для сходимости вычислительного процесса (3), (4), $R(K)$ необходимо и достаточно нулевого порядка, чтобы он был устойчивым.

Отметим также, что из устойчивости первого порядка вычислительного процесса (3), (4), $R(K)$ вытекает его устойчивость нулевого порядка.

§ 2

Положим

$$\gamma_k = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i y_{k-i}^* - h \sum_{i=0}^{n} \beta_i f(x_{k+l-i}, y_{k+l-i}^*), \tag{11}$$

$$\rho_k = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i y(x_{k-i}) - h \sum_{i=0}^{n} \beta_i f(x_{k+l-i}, y(x_{k+l-i})) \tag{12}$$

и будем называть γ_k характеристикой вычислительной погрешности y_k^*, а ρ_k — характеристикой погрешности метода (3), (4).

Рассматривая величины

$$\bar{y}(x) = y^*_{k-1} + \frac{\Delta y^*_{k-1}}{h}(x - x_{k-1}) \text{ при } x_{k-1} < x \leqslant x_k, \tag{13}$$

$$\tilde{y}(x) = y_{k-1} + \frac{\Delta y_{k-1}}{h}(x - x_{k-1}) \text{ при } x_{k-1} < x \leqslant x_k, \tag{14}$$

положим

$$D(x) = y(x) - \bar{y}(x), \quad d(x) = \tilde{y}(x) - \bar{y}(x), \quad \delta(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$$

и будем полученные функции называть соответственно так же, как и D_k, d_k, δ_k, с добавлением определения „непрерывная".

Величины

$$\bar{\Theta}(x) = \bar{y}'(x) - f(x, \bar{y}(x)), \tag{15}$$

$$\tilde{\Theta}(x) = \tilde{y}'(x) - f(x, \tilde{y}(x)) \tag{16}$$

будем называть соответственно непрерывной характеристикой полной погрешности y^*_k и непрерывной характеристикой погрешности метода (3), (4).

Вычитая из (16) тождество (15) и интегрируя полученное в пределах от x_0 до x, в результате простых преобразований будем иметь

$$d(x) = \int_{x_0}^{x} F^{(d)}(\xi)\, d(\xi)\, d\xi + \tilde{\eta}(x) - \bar{\eta}(x), \tag{17}$$

где

$$\tilde{\eta}(x) = \int_{x_0}^{x} \tilde{\Theta}(\xi)\, d\xi, \quad \bar{\eta}(x) = \int_{x_0}^{x} \bar{\Theta}(\xi)\, d\xi,$$

$$F^{(d)}(x) = \begin{cases} \left[f\left(x, \tilde{y}(x)\right) - f\left(x, \bar{y}(x)\right)\right] : d(x) \text{ при } d(x) \neq 0, \\ 0 \text{ при } d(x) = 0 \end{cases} \tag{18}$$

Лемма. Пусть дан сходящийся конечно-разностный процесс (3), (4). Чтобы вычислительный процесс (3), (4), $R(K)$ был устойчивым нулевого порядка, необходимо и достаточно, чтобы при произвольных допустимых фиксированных f и g для всякого h, $0 < h \leqslant h'$ существовали такие числа $\bar{\varepsilon}_h$ и $\bar{\theta}_h$, что неравенство

$$|\bar{\eta}(x)| \leqslant \bar{\varepsilon}_h \tag{19}$$

выполняется равномерно по x, $x_0 \leqslant x \leqslant hS_h$ и по θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \bar{\theta}_h$, причем $\bar{\varepsilon}_h \to 0$ и $\bar{\theta}_h \to 0$ при $h \to 0$; $\bar{\theta}_h$ стремится к нулю не быстрее некоторой конечной степени h.

Необходимость. Разрешая тождество (17) относительно $\bar{\eta}(x)$ и переходя к модулям, получим неравенство, из которого при учете сходимости конечно-разностного процесса (3), (4) и устойчивости вычислительного процесса (3), (4), $R(K)$ вытекает нужное утверждение.

Достаточность. Переходя в равенство (17) к модулям и полагая $\tilde{\varepsilon}_h = \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant hS_h} |\bar{\eta}(x)|$, получим с учетом (18)

$$|d(x)| \leqslant L \int\limits_{x_0}^{x} |d(\xi)|\, d\xi + \bar{\varepsilon}_h + \tilde{\varepsilon}_h, \quad x_0 \leqslant x \leqslant hS_h.$$

Отсюда, в силу леммы из статьи [4], получается оценка

$$|d(x)| \leqslant \left(\bar{\varepsilon}_h + \tilde{\varepsilon}_h\right) \exp\left[L\left(\bar{x} - x_0 + h\right)\right] = \varepsilon_h', \tag{20}$$

равномерно по x, $x_0 \leqslant x \leqslant hS_h$ и по θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_h' = \bar{\theta}_h$.

Лемма доказана (см. лемму из статьи [5]).

Учитывая необходимые условия сходимости [5], преобразуем равенство (11) к виду

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{i} \alpha_j \bar{\Theta}(x - ih) = \bar{Q}(x) + \frac{1}{h} \eta(x), \tag{21}$$

где положено

$$\bar{Q}(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i f_{k+l-i} - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{i} \alpha_j f\left[x - ih, \bar{y}(x - ih)\right]$$

$$\text{при } x_{k-1} < x \leqslant x_k; \tag{22}$$

$$\gamma(x) = \gamma_k \text{ при } x_{k-1} < x \leqslant x_k. \tag{23}$$

Интегрируя тождество (21) в пределах от x_0 до x, найдем с учетом (18):

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{i} \alpha_j \left[\bar{\eta}(x - ih) - \bar{\eta}(x_0 - ih)\right] = \int\limits_{x_0}^{x} \bar{Q}(\xi)\, d\xi + \frac{1}{n} \int\limits_{x_0}^{x} \gamma(\xi)\, d\xi. \tag{24}$$

Теорема 1*. Пусть конечно-разностный процесс (3), (4) сходится. Чтобы вычислительный процесс (3), (4), $R(K)$ был устойчивым нулевого порядка, необходимо и достаточно, чтобы при произвольных допустимых фиксированных f и g для любых h, $0 < h \leqslant h'$ существовали такие числа $\hat{\varepsilon}_h$ и $\hat{\theta}_h$, что неравенство

$$\frac{1}{n} \left| \int\limits_{x_0}^{x} \gamma(\xi)\, d\xi \right| \leqslant \hat{\varepsilon}_h \tag{25}$$

выполняется равномерно по x, $x_0 \leqslant x \leqslant hT_h$, $T_h = S_h - \frac{l}{2} \times \operatorname{sgn} l \times (1 + \operatorname{sgn} l)$ и по θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_h$, причем $\hat{\varepsilon}_k \to 0$ и $\hat{\theta}_h \to 0$ при $h \to 0$; $\hat{\theta}_h$ стремится к нулю не быстрее некоторой конечной степени h.

Необходимость. Разрешая (24) относительно выражения $(1 : h) \times \int\limits_{x_0}^{x} \gamma(\xi)\, d\xi$, переходя к модулям и производя оценку правой части полученного неравенства, убедимся в необходимости условия (25).

---

* Ср. с [2].

Достаточность. Разрешая (24) относительно $\bar{\eta}(x)$ (см. [5]) и производя нужные оценки, получим доказательство достаточности условия (25).

Теорема 2. Пусть конечно-разностный процесс (3), (4) равномерно сходится [5], а вычислительный процесс (3), (4), $R(K)$ является устойчивым первого порядка. Тогда при произвольных допустимых фиксированных f и g для любых h, $0 < h \leqslant h'$ существуют такие числа ε''_h и θ''_h, что неравенство

$$|\gamma_k| \leqslant h\varepsilon''_h \tag{26}$$

выполняется равномерно по $k = 0, 1, \ldots, T_h$ и по θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta''_h$, причем $\varepsilon''_h \to 0$ и $\theta''_h \to 0$ при $h \to 0$; θ''_h стремится к нулю не быстрее некоторой конечной степени h.

Доказательство. Из тождеств (3) и (11) с учетом необходимых условий сходимости получаем

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{i} \alpha_j \Delta d_{k-1-i} = h \sum_{i=0}^{n} \beta_i F^{(d)}_{k+l-i} d_{k+l-i} - \gamma_k, \tag{27}$$

где

$$F^{(d)}_{k+l-i} = \begin{cases} [f_{k+l-i} - f(x_{k+l-i}, y^*_{k+l-i})] : d_{k+l-i} & \text{при } d_{k+l-i} \neq 0 \\ 0 \text{ при } d_{k+l-i} = 0. \end{cases}$$

Разрешая (27) относительно γ_k, переходя к модулям и производя необходимые оценки, убедимся в справедливости теоремы.

Теорема 3. Пусть конечно-разностный процесс (3), (4) является равномерно сходящимся, а вычислительный процесс (3), (4) $R(K)$ удовлетворяет условию (26). Тогда:

1. Этот вычислительный процесс будет устойчивым первого порядка, если $\theta''_h = o(h)$.

2. Этот вычислительный процесс будет устойчивым первого порядка, если корни уравнения

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{i} \alpha_j \lambda^{m-1-i} = 0, \quad m > 1,$$

все по модулю меньше единицы.

Доказательство. Разрешая (27) относительно Δd_{k-1} (см. [5]). переходя к модулям и производя необходимые оценки, убедимся в справедливости теоремы.

§ 3

Остановимся на более конкретных предложениях.

А. Обозначим через K_0 совокупность всевозможных функций $f(x, y)$, удовлетворяющих условиям, перечисленным в § 1, а через $\mathring{G}_f$ — класс всевозможных допустимых начальных функций $g(x, h)$, $g(x_0, h) = y_0$ и рассмотрим конечно-разностный процесс (3), (4) при

$l<0$. Способ $R_0(K_0)$ построения приближенного решения задачи (3), (4) определим формулой

$$y_k^* = \left(h \sum_{i=0}^{n} (\beta_i (f_{k+l-i}^*)^{\Delta})^{\circ} \right)^{\circ} - \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i y_{k-1}^*)^{\circ},$$

$$f \in K_0, \ G_f = \mathring{G}_f, \tag{28}$$

где $(f_j^*)^{\Delta}$ обозначает приближенное значение величины $f_j^* = f(x_j, y_j^*)$, вычисленное с r верными знаками после запятой, символов $(a \ast b)^{\circ}$ обозначим результат выполнения арифметической операции $(a \ast b)$ с r знаками после запятой.

Обозначим через $O^*(h)$ функцию h, которая стремится к нулю вместе с h не быстрее некоторой конечной степени h.

Теорема 4. Если конечно-разностный процесс (3), (4) при $l<0$ равномерно сходится и выполнено условие $0 \leqslant \theta \leqslant h \cdot O^*(h)$, то вычислительный процесс (3), (4), $R_0(K_0)$ является устойчивым первого порядка.

Доказательство. Из (28) с учетом (11) получается

$$\eta_k = h \sum_{i=0}^{n} (\beta_i \pi_{k+l-i} + O''_{k+l-i}) - \sum_{i=1}^{m} O'_i + O_k, \tag{29}$$

где O_k, O'_i и O''_{k+l-i} обозначают погрешности округления, возникающие при вычислении соответственно величин $h \sum_{i=0}^{n} (\beta_i (f_{k+l-i}^*)^{\Delta})^{\circ}$, $\alpha_i y_{k-1}^*$ и $\beta_i (f_{k+l-i}^*)^{\Delta}$ с r знаками после запятой, а π_{k+l-i} — полная вычислительная погрешность $(f_{k+l-i}^*)^{\Delta}$. Отсюда получается оценка

$$|\eta_k| \leqslant \theta \left[h \sum_{i=0}^{n} (2|\beta_i| + 1) + m + 1 \right], \tag{30}$$

равномерная по $k = 0, 1, \ldots, S_h$. Теорема доказана (см. теорему 3).

Б. Рассмотрим конечно-разностный процесс (3), (4) при $l = 0$. Полагая $\overset{\circ}{y}{}'_k = y_{k-1}^*$, рассмотрим последовательность дробей

$$\overset{s}{y}{}'_k = (h(\beta_0 (\overset{s-1}{f'})^{\blacktriangle})^{\bullet})^{\bullet} + \left(h \sum_{i=1}^{n} (\beta_i (f_{k-i}^*)^{\blacktriangle})^{\bullet} \right)^{\bullet} -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i y_{k-i}^*)^{\bullet}, \ s = 1, 2, \ldots, f \in K_0, \ G_f = \mathring{G}_f, \tag{31}$$

где $\overset{s}{f}{}'_k = f\left(x_k, \overset{s}{y}{}'_k\right)$, символ $(a \ast b)^{\bullet}$ обозначает результат выполнения арифметической операции $(a \ast b)$ с $r+\sigma$ знаками после запятой, а $(\overset{s}{f}{}'_k)^{\blacktriangle}$ обозначает результат вычисления величины $\overset{s}{f}{}'_k$ с $r+\sigma$ верными знаками после запятой. Выберем h, s и σ так, чтобы метод последовательных приближений, на базе которого написаны формулы (31), сходился и чтобы дроби $\overset{s}{y'_k}$ и $\overset{s-1}{y'_k}$ были r-эквивалентными* и положим $y^*_k = \left(\overset{s}{y'_k}\right)^{\circ}$. Описанный способ построения y^*_k обозначим через $R'_2(K_0)$.

Теорема 5. Если конечно-разностный процесс (3), (4) при $l=0$ равномерно сходится и выполнено условие $0 < h \leqslant h \cdot O^*(h)$, то вычислительный процесс (3), (4), $R(K)$ является устойчивым первого порядка.

Доказательство. Способом, аналогичным тому, который описан в доказательстве теоремы 4, получается оценка

$$|\eta_k| \leqslant \theta(1 + 3h|\beta_0|L) + \theta'\left[h\left(n + 1 + 2\sum_{i=0}^{n}|\beta_i|\right) + m + 2\right], \tag{32}$$

равномерная по $k = 0,1,\ldots, S_h$. Теорема доказана (см. теорему 3).

В. Обозначим через K_1 класс всевозможных линейных функций $f(x, y) = a(x)y + b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ — непрерывные функции x, $|x - x_0| \leqslant A$, $|y - y_0| \leqslant B$, $a(x) \neq 0$, и рассмотрим уравнение

$$y_k - y_{k-1} = hf_{k+1} \tag{33}$$

с начальными условиями

$$y_0 = g(x_0, h),\ y_{-1} = g(x_{-1}, h). \tag{34}$$

Пусть $R_1(K_1)$ обозначает способ построения приближенного решения задачи (33), (34), определяемый формулой

$$y^*_{k+1} = \left(\left(\frac{1}{(ha^{\Delta}_{k+1})^{\circ}}\right)^{\circ}[y^*_k - y^*_{k-1}]\right)^{\circ},\ f \in K_1,\ G_f \in \overset{\circ}{G}_f. \tag{35}$$

Вычислительный процесс (33), (34), $R_1(K_1)$ является неустойчивым. В этом можно убедится, например, в результате непосредственных вычислений по формуле (35).

Г. Определим теперь для той же самой конечно-разностной задачи (33), (34) другой способ построения y^*_k. Положим $\overset{\circ}{y'_k} = y_0$, $k = 0,1,\ldots$ и рассмотрим последовательность дробей

$$\overset{s}{y'_k} = y_0 + \left[h\sum_{i=1}^{k}\left(\overset{s-1}{f'_{i+1}}\right)^{\blacktriangle}\right]^{\bullet},\ s = 1,2,\ldots$$

$$k = 0,1,\ldots\ f \in K_0.$$

Числа $\overline{x}$, s и h выберем так, чтобы метод последовательных приближений, на базе которого написаны формулы (35), сходился равномерно по k и чтобы $\overset{s}{y'_k}$ и $\overset{s-1}{y'_k}$ были r-эквивалентными для всех допустимых k сразу. Положим $y^*_k = \left(\overset{s}{y'_k}\right)^{\circ}$ и примем y^*_k в качестве приближенного решения задачи (33), (34), причем начальная функция подби-

---

* Две десятичные дроби называются r-эквивалентными, если они имеют одинаковые целые части и одинаковые первые r десятичных знаков.

рается должным образом. Описанный способ построения y_k^* обозначим через $R_3(K_0)$.

При $0 \leqslant \theta \leqslant hO^*(h)$ вычислительный процесс (33), (34), $R_3(K_0)$ является устойчивым первого порядка.

Последнее доказывается аналогично теореме 5. Ниже приводится таблица полных погрешностей приближенного решения задачи Коши $y' = -y$, $y(0) = 1$, полученного описанным способом, $r=5$, $\sigma=0$.

x_i \ h	0,10	0,05	0,01
0,10	—0,01183	—0,00613	—0,00133
0,20	—0,01460	—0,00943	—0,00233

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Изв. АН СССР, **20**, № 4, 1956.
2. Dahlqvist G. Math. Skand., **4**, № 1, 1956.
3. Рябенький В. С., Филиппов А. Ф. Об устойчивости разностных уравнений ГИТТЛ, 1956, стр. 74—76.
4. Будак Б. М. и Горбунов А. Д. Вестн. МГУ, сер. мат., мех., астрон., физ., химии, № 5, 7, 1958.
5. Горбунов А. Д. и Будак Б. М. ДАН СССР, **119**, № 4, 1958.

Кафедры
вычислительной математики механико-математического факультета и математики физического факультета

Поступила в редакцию
7. 12 1958 г.