Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2—1959

А. Ф. ФИЛИППОВ

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Существование решения задачи оптимального регулирования в классе ограниченных измеримых функций

Дана система n уравнений (в векторной записи)

$$d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{f}$ — n-мерные векторы, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t)$ — управляющий параметр (r-мерный вектор), который при любых заданных t и $\boldsymbol{x}$ может принимать значения из заданного множества $Q(t, \boldsymbol{x})$ (в [1] рассмотрен случай, когда множество Q не зависит от t, $\boldsymbol{x}$). Задача оптимального регулирования состоит в том, чтобы для данных $\boldsymbol{x}^{(0)}$ и $\boldsymbol{x}^*$ найти такую функцию $\boldsymbol{u}(t)$, что при $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t)$ решение $\boldsymbol{x}(t)$ уравнения (1) с начальным условием $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}^{(0)}$ попадает в точку $\boldsymbol{x}^*$ за наименьшее возможное время, и при этом $\boldsymbol{u}(t)\in Q(t, \boldsymbol{x}(t))$.

Будем предполагать, что вектор-функция $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ непрерывна по совокупности переменных t, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$ и непрерывно дифференцируема по $\boldsymbol{x}$ и что при всех t, $\boldsymbol{x}$ и всех $\boldsymbol{u}\in Q(t, \boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \leqslant C(|\boldsymbol{x}|^2+1), \tag{2}$$

где точка означает скалярное умножение, а $|\boldsymbol{x}|$ — длина вектора $\boldsymbol{x}$. Пусть множество $Q(t, \boldsymbol{x})$ замкнуто и ограничено. Когда $\boldsymbol{u}$ пробегает множество $Q(t, \boldsymbol{x})$, то $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ пробегает множество, которое обозначим $R(t, \boldsymbol{x})$. Будем предполагать, что множество $Q(t, \boldsymbol{x})$ полунепрерывно сверху относительно включения (по t и $\boldsymbol{x}$), то есть что для любых t, $\boldsymbol{x}$ и любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon, t, \boldsymbol{x})>0$, что при $|t'-t|<\delta$, $|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|<\delta$ множество $Q(t', \boldsymbol{x}')$ содержится в ε-окрестности множества $Q(t, \boldsymbol{x})$. Тогда множество $R(t, \boldsymbol{x})$ будет обладать тем же свойством полунепрерывности (вследствие непрерывности функции $\boldsymbol{f}$).

Теорема 1. Пусть выполнены сформулированные выше условия и пусть при любых t и $\boldsymbol{x}$ множество $R(t, \boldsymbol{x})$ выпукло. Пусть существует хотя бы одна измеримая функция $\tilde{\boldsymbol{u}}(t)\in Q(t, \tilde{\boldsymbol{x}}(t))$ такая, что при $\boldsymbol{u}=\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$ решение* $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ уравнения (1) с начальным условием $\tilde{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{x}^{(0)}$ попадает в точку $\boldsymbol{x}^*$ при некотором $t^*>0$. Тогда существует и оптимальное управление, то есть измеримая функция $\boldsymbol{u}(t)\in Q(t, \boldsymbol{x}(t))$, при которой решение $\boldsymbol{x}(t)$ уравнения (1) с начальным условием $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}^{(0)}$ попадает в точку $\boldsymbol{x}^*$ в наименьшее возможное время.

Доказательство. Из соотношений (1), (2) и $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}^{(0)}$ следует, что при почти всех t

$$dX/dt\leqslant 2CX, \quad X(0)=|\boldsymbol{x}^{(0)}|^2+1=A,$$

где $X(t)=|\boldsymbol{x}(t)|^2+1$. Следовательно, $X(t)\leqslant Ae^{2Ct}$ при $t\geqslant 0$. Значит, при всех допустимых $\boldsymbol{u}(t)$ решения уравнения (1) с начальным условием $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}^{(0)}$ на отрезке $0\leqslant t\leqslant t^*$ удовлетворяют неравенству $|\boldsymbol{x}(t)|\leqslant \sqrt{A}e^{Ct^*}$ (считая, что $C\geqslant 0$).

Покажем, что при $0\leqslant t\leqslant t^*$, $|\boldsymbol{x}|\leqslant\sqrt{A}e^{Ct^*}$ множество $Q(t, \boldsymbol{x})$ равномерно ограничено, то есть существует такое N, что при всех указанных t, $\boldsymbol{x}$ для любого $\boldsymbol{u}\in Q(t, \boldsymbol{x})$ имеем $|\boldsymbol{u}|\leqslant N$. В самом деле, в противном случае нашлись бы такие последовательности $t_n\to t$, $\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}_n\in Q(t_n, \boldsymbol{x}_n)$, что $|\boldsymbol{u}_n|\to\infty$. Но при сделанных предположениях множество $Q(t_n, \boldsymbol{x}_n)$ для достаточно больших n содержится в ε-окрестности ограниченного множества $Q(t, \boldsymbol{x})$. Полученное противоречие показывает, что при указанных выше t, $\boldsymbol{x}$ множество $Q(t, \boldsymbol{x})$ равномерно ограничено. Так как функция $\boldsymbol{f}$ непрерывна, то при $0\leqslant t\leqslant t^*$, $|\boldsymbol{x}|\leqslant\sqrt{A}e^{Ct^*}$, $\boldsymbol{u}\in Q(t, \boldsymbol{x})$ имеем $|f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|\leqslant M$.

Рассмотрим теперь множество всех решений $\boldsymbol{x}(t)$ уравнения (1) [при различных $\boldsymbol{u}(t)\in Q(t, \boldsymbol{x}(t))$], для которых $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}^{(0)}$, $\boldsymbol{x}(t')=\boldsymbol{x}^*$, $0<t'\leqslant t^*$; числа t' могут быть различными для разных решений. Это множество не пусто, так как по условию одно такое решение существует. Если это множество конечно, то утверждение теоремы очевидно. Если же оно бесконечно, то выберем из него последовательность, для которой последовательность соответствующих чисел t' сходится к t_1 — нижней грани всех таких t'. Решения этой последовательности при $0\leqslant t\leqslant t^*$ равномерно ограничены, так как $|\boldsymbol{x}(t)|\leqslant\leqslant\sqrt{A}e^{Ct^*}$, и равностепенно непрерывны, так как они абсолютно непрерывны и почти всюду $|d\boldsymbol{x}/dt|=|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})|\leqslant M$. Выберем из этой последовательности равномерно сходящуюся подпоследовательность $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t),\ldots$, и ее предел обозначим $\boldsymbol{x}(t)$. Покажем, что $\boldsymbol{x}(t)$ — решение, соответствующее оптимальному управлению $\boldsymbol{u}(t)$.

Пользуясь равностепенной непрерывностью решений $\boldsymbol{x}_1(t)$, $\boldsymbol{x}_2(t),\ldots$, получаем, что $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}^{(0)}$, $\boldsymbol{x}(t_1)=\boldsymbol{x}^*$; при этом не существует решения, для которого $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}^{(0)}$, $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}^*$, где $0<t<t_1$. Далее, так как все $\boldsymbol{x}_i(t)$ удовлетворяют условию Липшица с одной и той же постоянной M, то их предел $\boldsymbol{x}(t)$ обладает этим же свойством. Следовательно, функция $\boldsymbol{x}(t)$ абсолютно непрерывна и $|d\boldsymbol{x}(t)/dt|\leqslant M$. Пусть

$$d\boldsymbol{x}(t)/dt=\boldsymbol{y}(t),\ d\boldsymbol{x}_i(t)/dt=\boldsymbol{y}_i(t),\ i=1,2,\ldots$$

Функции $\boldsymbol{y}(t)$ и $\boldsymbol{y}_i(t)$ определены почти всюду на отрезке $[0, t_1]$, измеримы и ограничены. Пусть $t_0\in[0, t_1]$ и $d\boldsymbol{x}(t_0)/dt$ существует. Покажем, что тогда $d\boldsymbol{x}(t_0)/dt\in R(t_0, \boldsymbol{x}(t_0))$.

* Решением называется абсолютно непрерывная вектор-функция, почти всюду удовлетворяющая уравнению (1). При сделанных предположениях такое решение существует по теореме Каратеодори ([2], стр. 120 — 124).

Множество $R(t, \boldsymbol{x})$ полунепрерывно сверху относительно включения; следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|t - t_0| < \delta$, $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}(t_0)| < 2M\delta$ имеем $R(t, \boldsymbol{x}) \subseteq U_\varepsilon$, где U_ε — замкнутая ε-окрестность множества $R(t_0, \boldsymbol{x}(t_0))$. Уменьшив, если надо, число δ, можно считать, что при $|t - t_0| < \delta$ имеем

$$\left| \frac{\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_0)}{t - t_0} - \frac{d\boldsymbol{x}(t_0)}{dt} \right| < \varepsilon. \tag{3}$$

Но

$$\frac{\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{i \to \infty} \frac{\boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{x}_i(t_0)}{t - t_0} = \lim_{i \to \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{y}_i(\tau)\, d\tau =$$

$$= \lim_{i \to \infty} \int_0^1 \boldsymbol{y}_i(t_0 + (t - t_0)s)\, ds. \tag{4}$$

Далее, при почти всех τ

$$\boldsymbol{y}_i(\tau) = d\boldsymbol{x}_i(\tau)/dt = \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}_i(\tau), \boldsymbol{u}_i(\tau)) \in R(\tau, \boldsymbol{x}_i(\tau)).$$

При $|\tau - t_0| < \delta$ и всех достаточно больших i имеем

$$|\boldsymbol{x}_i(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)| < M\delta, \quad |\boldsymbol{x}_i(\tau) - \boldsymbol{x}_i(t_0)| < M\delta;$$

следовательно, $|\boldsymbol{x}_i(\tau) - \boldsymbol{x}(t_0)| < 2M\delta$. А тогда, в силу ранее сделанных оценок, $R(\tau, \boldsymbol{x}_i(\tau)) \subseteq U_\varepsilon$. Итак, при $|t - t_0| < \delta$ и всех достаточно больших i подынтегральная функция в (4) содержится (при почти всех s) в U_ε. Значит, весь интеграл (4) также содержится в U_ε (U_ε — выпуклое множество). Следовательно, левая часть формулы (4) также содержится в U_ε. Теперь из (3) следует, что $d\boldsymbol{x}(t_0)/dt$ содержится в 2ε-окрестности множества $R(t_0, \boldsymbol{x}(t_0))$. Так как ε сколь угодно мало, а это множество замкнуто, то

$$d\boldsymbol{x}(t_0)/dt \in R(t_0, \boldsymbol{x}(t_0)).$$

Значит, существует такое $\boldsymbol{u} \in Q(t_0, \boldsymbol{x}(t_0))$, что $d\boldsymbol{x}(t_0)/dt = \boldsymbol{f}(t_0, \boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{u})$. Итак, при всех t, при которых вектор-функция $\boldsymbol{x}(t)$ имеет производную, то есть при почти всех $t \in [0, t_1]$, она удовлетворяет уравнению (1), где $\boldsymbol{u}(t) \in Q(t, \boldsymbol{x}(t))$. Из доказанной ниже леммы следует, что функцию $\boldsymbol{u}(t)$ можно считать измеримой.

Лемма. Пусть вектор-функция $\boldsymbol{f}(t, u_1, \ldots, u_r)$, или короче $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u})$, непрерывна; множество $Q(t)$ замкнуто, ограничено, полунепрерывно сверху относительно включения (по t); пусть, когда вектор $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_r)$ пробегает множество $Q(t)$, вектор $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u})$ пробегает множество $R(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$ — измеримая вектор-функция, $\boldsymbol{y}(t) \in R(t)$. Тогда существуют такие измеримые функции $u_1(t), \ldots, u_r(t)$, что при почти всех t $\boldsymbol{f}(t, u_1(t), \ldots, u_r(t)) \equiv \boldsymbol{y}(t)$.

Доказательство. Для данного значения $\boldsymbol{y} \in R(t)$ из всех значений вектора $\boldsymbol{u} \in Q(t)$, удовлетворяющих уравнению $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{y}$, будем всегда брать то $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_r)$, у которого координата u_1 имеет наименьшее значение; если таких значений $\boldsymbol{u}$ много, то будем брать то из них, у которого координата u_2 имеет наименьшее значение и т. д. (наименьшее значение существует, так как вследствие непрерывности функции $\boldsymbol{f}$ множество значений $\boldsymbol{u}$, удовлетворяющих уравнению $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{y}$, замкнуто). Измеримость функций $u_1(t), \ldots, u_r(t)$ докажем по индукции. Предположим, что $u_1(t), \ldots, u_{s-1}(t)$ измеримы (при $s = 1$ ничего не надо предполагать), и докажем, что $u_s(t)$ измерима.

Существует такое замкнутое множество $E \subseteq [0, t_1]$ меры $> t_1 - \varepsilon$, что на множестве E функции $\boldsymbol{y}(t)$, $u_1(t), \ldots, u_{s-1}(t)$ непрерывны по этому множеству (C — свойство измеримых функций). Покажем, что для любого числа a множество тех $t \in E$, при которых $u_s(t) \leqslant a$, является замкнутым. Предположим противное. Тогда найдется такая последовательность $t_n \in E$, $n = 1, 2, \ldots$, что

$$t_n \to \tilde{t}, \quad u_s(t_n) \leqslant u_s(\tilde{t}) - \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0. \tag{5}$$

Так как $|u_i(t)| \leqslant \mathrm{const}$ при всех i и t, из последовательности t_n можно выбрать такую подпоследовательность, по которой значения всех функций $u_i(t)$ сходятся к некоторым предельным значениям $\tilde{u}_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Так как $\boldsymbol{u}(t_n) \in Q(t_n)$, а $Q(t)$ замкнуто и полунепрерывно сверху относительно включения, то $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_r) = \tilde{\boldsymbol{u}} \in Q(\tilde{t})$. Из непрерывности на множестве E функций $u_i(t)$, $t = 1, 2, \ldots, s-1$, и формулы (5) следует, что

$$\tilde{u}_i = u_i(\tilde{t}), \ i = 1, \ldots, s-1, \ \tilde{u}_s \leqslant u_s(\tilde{t}) - \varepsilon_1. \tag{6}$$

Переходя в тождестве $\boldsymbol{f}(t, u_1(t), \ldots, u_r(t)) \equiv \boldsymbol{y}(t)$ к пределу по выбранной подпоследовательности и пользуясь непрерывностью функции $\boldsymbol{f}$, получим

$$\boldsymbol{f}(\tilde{t}, u_1(\tilde{t}), \ldots, u_{s-1}(\tilde{t}), \tilde{u}_s, \ldots, \tilde{u}_r) = \boldsymbol{y}(\tilde{t}). \tag{7}$$

Согласно (6) и (7), $u_s(\tilde{t})$ является не наименьшим значением u_s, удовлетворяющим уравнению

$$\boldsymbol{f}(\tilde{t}, u_1(\tilde{t}), \ldots, u_{s-1}(\tilde{t}), u_s, \ldots, u_r) = \boldsymbol{y}(\tilde{t}).$$

Это противоречит определению функции $u_s(t)$. Следовательно, наше предположение неверно, и множество тех $t \in E$, при которых $u_s(t) \leqslant a$, замкнуто.

Значит, функция $u_s(t)$ измерима на E, а так как $E \subseteq [0, t_1]$, мера E больше $t_1 - \varepsilon$, где ε сколь угодно мало, то функция $u_s(t)$ измерима на $[0, t_1]$. Отсюда по индукции получаем, что все $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, r$, измеримы.

Замечание. В реальных механических системах, конечно, нельзя осуществить управление, задаваемое функцией $\boldsymbol{u}(t)$, если она только измерима, но не кусочно непрерывна. Несмотря на это, теорема 1 не утрачивает интереса, так как любую измеримую функцию $\boldsymbol{u}(t)$ можно приблизить такой непрерывной функцией $\boldsymbol{v}(t)$, что

$$\int_{t_0}^{t_1} |u(t) - v(t)| \, dt < \delta, \tag{8}$$

где δ сколь угодно мало*. Если заменить в уравнении (1) оптимальное управление $\boldsymbol{u}(t)$ непрерывным управлением $\boldsymbol{v}(t)$, удовлетворяющим неравенству (8), то в силу теоремы [3] о непрерывной зависимости решения от параметра решение $\boldsymbol{x}(t)$ попадет при $t = t_1$, хо-

---

* Если предположить, что $\boldsymbol{u}(t) \in Q$, где множество Q связно, локально связно и не зависит от $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{x}$, то можно сделать, чтобы в формуле (8) $\boldsymbol{v}(t) \in Q$.

тя и не в заданную точку $\boldsymbol{x}^*$, но сколь угодно близко к ней, если число δ в (8) достаточно мало. Таким образом, во многих случаях можно обойтись даже непрерывными управлениями.

Условие кусочной гладкости управляющих функций $\boldsymbol{u}_s(t)$

Пусть система (1) имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(t, x_1, \ldots, x_n) + \sum_{s=1}^{r} b_{is}(t)\, u_s(t), \quad i = 1, \ \ldots, \ n, \tag{9}$$

где g_i, $\partial g_i / \partial x_k$, b_{is} непрерывны, и на $u_s(t)$ наложены условия

$$|u_s(t)| \leqslant 1, \quad s = 1, \ \ldots, \ r. \tag{10}$$

По теореме 1 существуют измеримые ограниченные функции $u_s(t)$, удовлетворяющие условиям (10), при которых решение системы (9) с начальными условиями $x_i(0) = x_{i0}$, $i = 1, \ \ldots, \ n$, быстрее всего попадает в точку $(x_1^*, \ \ldots, \ x_n^*)$. Согласно [4], функции $u_s(t)$ удовлетворяют „принципу максимума“

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\psi}(t) = \max, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{f} = (f_1, \ \ldots, \ f_n)$ — вся правая часть системы (9) в векторной записи, $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ \ldots, \ \psi_n)$ — решение системы

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \psi_k, \quad i = 1, \ \ldots, \ n, \tag{12}$$

максимум берется по всем u_s, удовлетворяющим условию (10).

Для системы (9), (10) максимум выражения (11) достигается при

$$u_s(t) = \operatorname{sgn} \boldsymbol{b}_s(t) \cdot \boldsymbol{\psi}(t), \quad s = 1, \ \ldots, \ r, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{b}_s = (b_{1s}, \ \ldots, \ b_{ns})$; предполагается, что $\boldsymbol{b}_s(t) \cdot \boldsymbol{\psi}(t) = 0$ только для значений t, образующих множество меры нуль. Если значения t, при которых $\boldsymbol{b}_s(t) \cdot \boldsymbol{\psi}(t) = 0$, не имеют точек накопления, то функция $u_s(t)$ в (13) кусочно непрерывна. Точками накопления могут быть лишь те t, где одновременно $\boldsymbol{b}_s(t) \cdot \boldsymbol{\psi}(t) = 0$, $d/dt \cdot (\boldsymbol{b}_s(t) \cdot \boldsymbol{\psi}(t)) = 0$ (здесь предполагается, что $d\boldsymbol{b}_s/dt$ непрерывно). Отсюда можно заключить, что, вообще говоря, для большинства решений $\boldsymbol{\psi}(t)$ системы (12) таких точек накопления не будет, и значит для большинства оптимальных траекторий $\boldsymbol{x}(t)$ управления $u_s(t)$ будут кусочно непрерывными.

Если система линейная с аналитическими коэффициентами и аналитическими b_{is} (в частности, постоянными, как в [5]), и если $\boldsymbol{b}_s(t) \cdot \boldsymbol{\psi}(t) \not\equiv 0$, то $\boldsymbol{b}_s(t) \cdot \boldsymbol{\psi}(t)$ может обращаться в нуль лишь в изолированных точках, и, следовательно, оптимальное управление кусочно непрерывно. Проверка выполнения условий $\boldsymbol{b}_s(t) \cdot \boldsymbol{\psi}(t) \not\equiv 0$, $s = 1, \ \ldots, \ r$ проводится сравнительно просто, так как достаточно проверить их выполнение лишь в окрестности точки $t = 0$.

Аналогичные результаты для линейных систем получили ранее другими методами Н. Н. Красовский [6] и Р. В. Гамкрелидзе; первоначальное доказательство Гамкрелидзе заменено [5, стр. 472—474] заменено доказательством автора этой статьи.

Случай, когда оптимальное управление непрерывно

Пусть выполнены условия параграфа 1 и, кроме того, множество $R(t, \boldsymbol{x})$ строго выпукло* и непрерывно зависит от t и $\boldsymbol{x}$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $|t_1 - t_2| < \delta$, $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| < \delta$ расстояние любой точки множества $R(t_i, \boldsymbol{x}_i)$ от множества $R(t_j, \boldsymbol{x}_j)$ меньше δ (для $i = 1$, $j = 2$ и для $i = 2$, $j = 1$). Пусть каждому значению $\boldsymbol{v} \in R(t, \boldsymbol{x})$ соответствует лишь одно $\boldsymbol{u} \in Q(t, \boldsymbol{x})$, при котором $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$. Тогда значение $\boldsymbol{u}$, при котором достигается максимум в (11), будет непрерывно зависеть от t.

В самом деле, максимум достигается при таком $\boldsymbol{u}$, при котором точка $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} \in R(t, \boldsymbol{x})$ лежит на опорной плоскости к множеству $R(t, \boldsymbol{x})$, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{\psi}$. В силу строгой выпуклости $R(t, \boldsymbol{x})$ эта точка $\boldsymbol{v}$ непрерывно зависит от $\boldsymbol{\psi}$. При сделанных предположениях $\boldsymbol{u}$ непрерывно зависит от $\boldsymbol{v}$. Отсюда легко получить, что оптимальное управление $\boldsymbol{u}(t)$ будет непрерывным.

Общая постановка задачи оптимального регулирования

Даны система уравнений (1) в обозначениях § 1, замкнутое множество A в гиперплоскости $t = t_0$, замкнутые множества B и D в полупространстве $t \geqslant t_0$ и замкнутое множество $Q(t, \boldsymbol{x})$ в пространстве $\boldsymbol{x}$, зависящее от t и $\boldsymbol{x}$. Требуется найти точку $\boldsymbol{x}_0 \in A$ и вектор-функции $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{u}(t)$, удовлетворяющие уравнению (1) и условиям $\boldsymbol{x}(t_0) = x_0$, $(t, \boldsymbol{x}(t)) \in D$, $\boldsymbol{u}(t) \in Q(t, \boldsymbol{x}(t))$, $(t_0 + T, x(t_0 + T)) \in B$, чтобы число T было минимальным.

Эта постановка отличается от постановки задачи в [1] тем, что множество допустимых значений $\boldsymbol{u}$, то есть $Q(t, \boldsymbol{x})$, может зависеть от t и $\boldsymbol{x}$, что решение $\boldsymbol{x}(t)$ не должно выходить из заданной области D и должно попасть за кратчайшее время не из одной точки в другую, а из одного заданного множества A в другое — B.

Если множество A ограничено и выполнены условия § 1, то имеет место утверждение, аналогичное утверждению теоремы 1 о существовании оптимального управления в классе ограниченных измеримых функций. Это доказывается так же, как теорема 1; следует лишь добавить, что предел минимизирующей последовательности кривых $\boldsymbol{x}_n(t)$, принадлежащих замкнутой области D, есть кривая, принадлежащая той же области.

Сформулированная выше постановка задачи содержит в себе, как частные случаи, постановки задач оптимального регулирования в работах [1, 5—7]. Постановка задачи в [1] изложена выше в § 1; в [7] добавлено требование, чтобы решение $x(t)$ не выходило из заданной области D.

В одной из задач, сформулированных в [5], дополнительно требуется, чтобы некоторые из управляющих функций, например $u_{p+1}(t), \ldots, u_r(t)$, имели производные, ограниченные заданной постоянной. Покажем, что этот случай также содержится в приведенной выше общей постановке задачи. Добавим к данной системе (1) еще $r - p$ уравнений

$$\frac{du_s}{dt} = v_s, \quad s = p + 1, \ \ldots, \ r.$$

---

* То есть любая опорная плоскость к этому множеству имеет с ним только одну общую точку.

Теперь в системе будет $n+r-p$ искомых функций $x_1, \ldots, x_n$, $u_{p+1}, \ldots, u_r$, из которых последние $r-p$ подчинены определенным ограничениям (например, ограничениям вида $|u_s(t)| \leqslant N$, если таковые накладывались на u_s, когда u_s считались управляющими параметрами), и r управляющих параметров $u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_r$; на первые p из них накладываются те же ограничения, что раньше, а на последние $r-p$ — ограничения $|v_s(t)| \leqslant L$, $s=p+1, \ldots, r$. Начальные условия для искомых функций будут таковы: $x_i(t_0)=x_{i0}$ $(i=1, \ldots, n)$, $u_s(t_0)$ $(s=p+1, \ldots, r)$ — любые, удовлетворяющие наложенным ограничениям (например, $|u_s(t_0)| \leqslant N$). Таким образом, множество A (см. начало § 4) будет уже не точкой. Аналогично определяется множество B.

Тем же способом можно свести к постановке начала § 4 задачу, в которой дополнительно налагается требование ограниченности производных (до любого заданного порядка) от функций $u_s(t)$.

В [6] на управляющие параметры накладываются ограничения вида $\int\limits_{t_0}^{t_0+T} u_s^2(t)\,dt \leqslant C$. В таком случае к искомым функциям системы (1) можно добавить функции

$$x_{n+s}(t)=\int\limits_{t_0}^{t} u_s^2(\tau)\,d\tau, \quad s=1, \ldots, r,$$

подчиненные ограничениям $0 \leqslant x_{n+s}(t) \leqslant C$ и удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{dx_{n+s}}{dt}=u_s^2(t), \quad x_{n+s}(t_0)=0, \quad s=1, \ldots, r.$$

Управляющими параметрами остаются $u_s(t)$, но они уже не будут подчинены никаким ограничениям, то есть множество $Q(t, \boldsymbol{x})$ будет всем пространством. Множество $R(t, \boldsymbol{x})$ может быть также неограниченным, но, если оно замкнуто, выпукло и полунепрерывно сверху относительно включения (см. § 1), то изложенное в § 1 доказательство существования оптимального управления сохраняет силу (с небольшими изменениями). Однако таким путем доказывается лишь суммируемость с квадратом функций $u_s(t)$, при которых управление является оптимальным, а в [6] иным путем доказана их непрерывность.

О скользящих режимах

Покажем, что оптимальное управление может не существовать, если множество $R(t, \boldsymbol{x})$ в теореме 1 не выпукло. Рассмотрим задачу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=-y^2+u^2, \quad \frac{dy}{dt}=u; \ |u(t)| \leqslant 1; \\ &x(0)=y(0)=0; \ x(T)=1, \ y(T)=0, \ T>0; \\ &T=\min. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Так как $dx/dt \leqslant 1$, то $T \geqslant 1$. Легко видеть, что для любого решения системы (14) имеем $T>1$, и что любая последовательность решений, для которой $|u_n(t)| \leqslant 1$, $|y_n(t)| \leqslant 1/n$, является минимизирующей, так как для нее $x_n(t_n)=1$ при $1<t_n<1+1/(n^2-1)$. Далее, любая минимизирующая последовательность сходится к функциям $x(t)=t$, $y(t)=0$, которые не являются решением системы (14) ни при каком $u(t)$. Таким образом, здесь оптимального управления не существует.

В случаях, подобных рассмотренному, говорят, что минимизирующая последовательность сходится к скользящему режиму, вкладывая в это следующий смысл. Рассмотрим задачу (14). Чтобы получить решение, для которого время T сколь угодно близко к минимальному (но недостижимому) $T=1$, надо, чтобы $u(t)$ достаточно часто переходило от значений, близких к $+1$, к значениям, близким к -1. Точнее, пусть $\varepsilon_n \to 0$, $\delta_n \to 0$, и для любого промежутка времени длины $>\delta_n$ доля тех значений t, при которых $|u_n(t)-1|<\varepsilon_n$, отличается от $1/2$ меньше, чем на ε_n, и пусть то же имеет место для $|u_n(t)+1|<\varepsilon_n$; тогда такая последовательность $u_n(t)$ является минимизирующей.

Как в рассмотренном примере, так и в случае более общих уравнений вида (1) скользящие режимы возникают из-за невыпуклости множества $R(t, \boldsymbol{x})$. Из доказательства теоремы 1 ясно, что скользящий режим появляется тогда, когда на некотором интервале $\alpha<t<\beta$ вектор $d\boldsymbol{x}(t)/dt$ не принадлежит множеству $R(t, \boldsymbol{x})$; тогда он принадлежит его дополнению до выпуклого множества. Здесь $\boldsymbol{x}(t)$ — предел сходящейся подпоследовательности из минимизирующей последовательности, как в § 1.

Отметим, что в работе [8, стр. 103] получены результаты, близкие к теореме 1 этой статьи, но в несколько иных предположениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. ДАН СССР **110**, 1, 7—10, 1956.
2. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 2. ИЛ, М., 1954
3. Курцвейль Я., Ворел З. Чехосл. матем. журн., **7**, № 4, 568—583, 1957.
4. Гамкрелидзе Р. В. ДАН СССР, **123**, № 2, 223—226, 1958.
5. Гамкрелидзе Р. В. Изв. АН СССР, **22**, № 4, 449—474, 1958.
6. Красовский Н. Н. Автоматика и телемеханика, **18**, № 11, 960—970, 1957.
7. Лернер А. Я. Автоматика и телемеханика, **15**, № 6, 461—477, 1954.
8. Bellman R., Glicksberg J., Gross O. Some aspects of the mathematical theory of control processes. Copyright, 1958. The Rand corporation. Santa Monica, California.

Поступила в редакцию
16. 12 1958 г.

Кафедра
дифференциальных уравнений