Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2—1959

МЕХАНИКА

А. М. КАТАСОНОВ

ОБ ОДНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Из динамических задач термоупругости известны решения одномерных задач [1, 2] для полупространства и [3] для пространства с выключенной сферой. В настоящей работе методом неполного разделения переменных с последующим применением метода операционного исчисления дается решение одной из осесимметрических динамических задач термоупругости.

1. Постановка задачи

К границе упругого полупространства, находящегося в покое, в момент времени $t = 0$ мгновенно прикладывается осесимметрически распределенная температура вида

$$T = T_0 n^2 / 2\pi (1 + n^2 r^2)^{3/2}.$$

Заданное распределение температуры обладает следующими особенностями: при возрастании параметра n температура в начале координат растет пропорционально n^2 и быстро падает при удалении от начала координат, при $n \to \infty$ получается случай сосредоточенного теплового воздействия.

В полупространстве от неравномерного распределения температуры, описываемого уравнением теплопроводности, возникнут термоупругие напряжения, которые требуется определить.

Уравнения движения в случае осевой симметрии имеют следующий вид

$$\frac{\partial (r\sigma_r)}{\partial_r} + \frac{\partial (r\tau)}{\partial z} - \sigma_\theta = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1,1}$$

$$\frac{\partial (r\sigma z)}{\partial z} + \frac{\partial (r\tau)}{\partial r} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1,2}$$

где $\sigma_r(r, z, t)$, $\sigma_z(r, z, t)$ и $\sigma_\theta(r, z, t)$ — нормальные напряжения, $\tau(r, z, t)$ — касательное напряжение, $u(r, z, t)$ и $w(r, z, t)$ — перемещения в направлении осей r и z соответственно, ρ — плотность среды.

Согласно гипотезе Ф. Неймана, напряжения и деформации связаны соотношениями:

$$\sigma_r = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} - \beta T, \tag{1,3}$$

$$\sigma_z = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \beta T, \tag{1,4}$$

$$\sigma_\theta = \lambda\theta + 2\mu \frac{u}{r} - \beta T, \tag{1,5}$$

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \tag{1,6}$$

где $\theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r}$, λ и μ — постоянные Ламе, $\beta = (\lambda + {}^2/_3\mu)\,\gamma$, γ — коэффициент температурного кубического расширения, $T(r, z, t)$ — температура.

Вводя в рассмотрение продольный и поперечный термоупругие потенциалы $\varphi(r, z, t)$ и $\psi(r, z, t)$, будем иметь:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{1,7}$$

$$w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r}, \tag{1,8}$$

Потенциалы φ и ψ, согласно (1,1) — (1,6), удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = a^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + mT, \tag{1,9}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = b^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{1,10}$$

Здесь $a^2 = \rho/(\lambda + 2\mu)$, $b^2 = \rho/\mu$, $m = (\lambda + {}^2/_3\mu)\,\gamma/(\lambda + 2\mu)$.

В начальный момент времени полупространство находилось в покое, следовательно

$$\varphi\Big|_{t=0} = \psi\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{1,11}$$

Так как граница полупространства свободна от напряжений, то

$$\left[(b^2 - 2a^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} + (\lambda m - \beta)\,T \right]\Bigg|_{z=0} = 0, \tag{1,12}$$

$$\left[b^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r \partial z} - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right]\Bigg|_{z=0} = 0. \tag{1,13}$$

Потребуем далее, чтобы φ и ψ были ограниченными при $z \to \infty$, то есть

$$\lim_{z\to\infty} \varphi < M, \qquad \lim_{z\to\infty} \psi < N. \tag{1,14}$$

Температура $T(r, z, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1,15}$$

начальному условию

$$T\Big|_{t=0} = 0 \tag{1,16}$$

и граничному условию

$$T\Big|_{z=0} = \frac{T_0 n^2}{2\pi\,(1 + n^2 r^2)^{3/2}}. \tag{1,17}$$

Потребуем также, чтобы температура оставалась ограниченной пр $z \to \infty$, то есть

$$\lim_{z \to \infty} T < L. \tag{1,18}$$

Таким образом, задача свелась к определению термоупругих потенциалов φ и ψ, удовлетворяющих уравнениям (1,9), (1,10) и условиям (1,11) — (1,14). Температура при этом удовлетворяет уравнению (1,15) и условиям (1,16) — (1,18).

2. Распределение температуры

Граничное условие (1,17) можно представить в таком виде:

$$\frac{T_0 n^2}{2\pi (1 + n^2 r^2)^{3/2}} = \frac{T_0}{2\pi} \int_0^\infty \xi e^{-\xi/n} I_0(\xi r)\, d\xi\,, \tag{2,1}$$

где $I_0(\xi r)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Соотношение (2,1) позволяет применить к решению уравнения (1,15) метод неполного разделения переменных.

Решение ищем в виде интеграла Фурье—Бесселя

$$T = \frac{T_0}{2\pi} \int_0^\infty X(z, t, \xi) I_0(\xi r) e^{-\xi/n} d\xi\,. \tag{2,2}$$

Для определения $X(z, t, \xi)$ имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \xi^2 X = \frac{1}{k} \frac{\partial X}{\partial t} \tag{2,3}$$

при следующих условиях:

$$X \Big|_{t=0} = 0, \tag{2,4}$$

$$X \Big|_{z=0} = \xi^2, \tag{2,5}$$

$$\lim_{z \to \infty} X < L. \tag{2,6}$$

Полученное уравнение (2,3) при условиях (2,4) — (2,6) решаем операционным методом. В изображениях с учетом начального условия имеем

$$\frac{d^2 X^*}{dz^2} - (\xi^2 + p/k) X^* = 0, \tag{2,7}$$

$$X^* \Big|_{z=0} = \xi^2, \tag{2,8}$$

$$\lim_{z \to \infty} X^* < L, \tag{2,9}$$

где

$$X^* = p \int_0^\infty X(z, t, \xi) e^{-pt} dt\,.$$

Решение уравнения (2,7), удовлетворяющее условиям (2,8) и (2,9), имеет вид:

$$X^* = \xi^2 e^{-\sqrt{\xi^2 + p/k}\, z}\,. \tag{2,10}$$

Переходя к оригиналу, получим

$$X=\frac{1}{2}\left[e^{-z\xi}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{z^2/kt}-\xi\sqrt{kt}\right)+\right.$$

$$\left.+e^{z\xi}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{z^2/kt}+\xi\sqrt{kt}\right)\right]. \quad (2,11)$$

Здесь

$$\operatorname{erfc} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-y^2}dy.$$

3. Распределение напряжений

Уравнения (1,9) и (1,10) решаем также методом неполного разделения переменных. Потенциалы φ и ψ ищем в виде:

$$\varphi=\frac{T_0}{2\pi\mu}\cdot\int_0^{\infty}\Phi(z,\ t,\ \xi)\,e^{-\xi/n}I_0(\xi r)\frac{d\xi}{\xi}, \quad (3,1)$$

$$\psi=\frac{T^0}{2\pi\mu}\cdot\int_0^{\infty}\Psi(z,\ t,\ \xi)\,e^{-\frac{\xi}{n}}I_1(\xi\ r)\,\frac{d\xi}{\xi}, \quad (3,2)$$

где $I_1(\xi r)$ — функция Бесселя первого порядка.

Изображения Φ^* и Ψ^* удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial z^2}-(\xi^2+a^2p^2)\,\Phi^*=\mu m\xi^2e^{-\sqrt{\xi^2+p/k}z}, \quad (3,3)$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}-(\xi^2+b^2p^2)\,\Psi^*=0 \quad (3,4)$$

и следующим условиям на границе и на бесконечности:

$$\left[\ (b^2-2a^2)\,p^2\Phi^*+2\ \frac{\partial^2\Phi^*}{\partial z^2}+2\xi\frac{\partial\Psi^*}{\partial z}+(\lambda m-\beta)\,X^*\ \right]\Big|_{z=0}=0, \quad (3,5)$$

$$\left(b^2p^2\Psi^*-2\xi\ \frac{\partial\Phi^*}{\partial z}-2\ \frac{\partial^2\Psi^*}{\partial z^2}\right)\Big|_{z=0}=0, \quad (3,6)$$

$$\lim_{z\to\infty}\Phi^*<M,\quad \lim_{z\to\infty}\Psi^*<N. \quad (3,7)$$

Решение уравнений (3,3) и (3,4) при условиях (3,5) и (3,6) имеет следующий вид:

$$\Phi^*=c_1e^{-\sqrt{\xi^2+p^2a^2}z}+\frac{\mu m\xi^2}{p\,(1/k-pa^2)}\,e^{-\sqrt{\xi^2+p/k}z}, \quad (3,8)$$

$$\Psi^*=c_2e^{-\sqrt{\xi^2+p^2b^2}\,z}, \quad (3,9)$$

де

$$c_1=\left[\ (\lambda m-\beta)\,\xi^2+\frac{(b^2-2a^2)\,\mu m\xi^2p}{1/k-a^2p}+\frac{2\mu m\xi^2\,(\xi^2+p/k)}{p\,(1/k-a^2p)}\right]\times$$

$$\times\frac{p^2b^2+2\xi^2}{4\xi^2\sqrt{\xi^2+p^2a^2}\sqrt{\xi^2+p^2b^2}-(p^2b^2+2\xi^2)^2}-\frac{4\xi^4\mu m\sqrt{\xi^2+p/k}}{p\,(1/k-a^2p)}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{\xi^2+p^2b^2}}{4\xi^2\sqrt{\xi^2+p^2a^2}\cdot\sqrt{\xi^2+p^2b^2}-(p^2b^2+2\xi^2)^2}, \quad (3,10)$$

$$c_2=\frac{4\mu m\xi^4\,(\xi^2+p/k)}{p\,(1/k-a^2p)}\cdot\frac{\sqrt{\xi^2+p^2b^2}}{4\xi^2\sqrt{\xi^2+p^2a^2}\sqrt{\xi^2+p^2b^2}-(p^2b^2+2\xi^2)^2}-$$

$$-\left[(\lambda m-\beta)\xi^2+\frac{(b^2-2a^2)\mu m\xi^2 p}{1/k-a^2p}+\frac{2\mu m\xi^2(\xi^2+p/k)}{p(1/k-a^2p)}\right]\times$$
$$\times\frac{2\xi\sqrt{\xi^2+p^2b^2}}{4\xi^2\sqrt{\xi^2+p^2b^2}\sqrt{\xi^2+p^2a^2}-(p^2b^2+2\xi^2)^2}. \qquad (3,11)$$

Подставляя (3,10) и (3,11) в (3,8), (3,9) и переходя к оригиналам, получим:

$$\Phi(z,\ t,\ \xi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_0-i\infty}^{S_0+i\infty} f_1(\xi,p)\frac{2\xi^2+p^2b^2}{R(\xi,p)}e^{pt-z\sqrt{\xi^2+p^2a^2}}\frac{dp}{p}-$$
$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{S_0-i\infty}^{S_0+i\infty} g_1(\xi,p)\frac{\xi\sqrt{\xi^2+p^2b^2}}{R(\xi,p)}e^{pt-z\sqrt{\xi^2+p^2a^2}}\frac{dp}{p}+$$
$$+\frac{\mu m\xi^2}{2\pi i}\int\limits_{S_0-i\infty}^{S_0+i\infty}\frac{e^{pt-z\sqrt{\xi^2+p/k}}}{p(1/k-a^2p)}\frac{dp}{p}, \qquad (3,12)$$

$$\Psi(z,\ t,\ \xi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_0-i\infty}^{S_0+i\infty} g_1(\xi,p)\frac{2\xi^2+p^2b^2}{R(\xi,p)}e^{pt-z\sqrt{\xi^2+b^2p}}\frac{dp}{p}-$$
$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{S_0-i\infty}^{S_0+i\infty} f_1(\xi,p)\frac{\xi\sqrt{\xi^2+b^2p}}{R(\xi,p)}e^{pt-z\sqrt{\xi^2+b^2p}}\frac{dp}{p}, \qquad (3,13)$$

где

$$f_1(\xi,\ p)=[(\lambda m-\beta)\xi^2+p^2(b^2-2a^2)\mu m\xi^2p/p(1/k-a^2p)+$$
$$+2\mu m\xi^2(\xi^2+p/k)/p(1/k-a^2p),$$
$$g_1(\xi,\ p)=2\xi^3\mu m\sqrt{\xi^2+p/k}\,/p(1/k-a^2p),$$
$$R(\xi,\ p)=4\xi^2\sqrt{\xi^2+a^2p^2}\sqrt{\xi^2+b^2p^2}-(p^2b^2+2\xi^2)^2,$$

S_0 — абсцисса сходимости.

Подставляя (3,12), (3,13) в (3,1), (3,2) и меняя порядок интегрирования, будем иметь:

$$\varphi(z,\ r,\ t)=\frac{T_0}{4\pi^2\mu i}\int\limits_0^\infty I_0(\xi r)\int\limits_{S_0-i\infty}^{S_0+i\infty} f_1(\xi,\ p)\frac{2\xi^2+p^2b^2}{R(\xi,p)}e^{pt-z\sqrt{\xi^2+a^2p^2}-\frac{\xi}{n}}\frac{dp}{p}\frac{d\xi}{\xi}-$$
$$-\frac{T_0}{2\pi^2\mu i}\int\limits_0^\infty I_0(\xi r)\int\limits_{S_0-i\infty}^{S_0+i\infty} g_1(\xi,\ p)\frac{\sqrt{\xi^2+p^2b^2}}{R(\xi,p)}e^{pt-z\sqrt{\xi^2+a^2p}-\frac{\xi}{n}}\frac{dp}{p}d\xi+$$
$$+\frac{mT_0}{4\pi^2 i}\int\limits_0^\infty I_0(\xi r)\int\limits_{S_0-i\infty}^{S_0+i\infty}\frac{e^{pt-z\sqrt{\xi^2+p/k}-\frac{\xi}{n}}}{p(1/k-a^2p)}\frac{dp}{p}\xi d\xi, \qquad (3,14)$$

$$\Psi(z,r,t)=\frac{T_0}{4\pi^2\mu i}\int\limits_0^\infty I_1(\xi r)\int\limits_{S_0-i\infty}^{S_0+i\infty} g_1(\xi,p)\frac{2\xi^2+p^2b^2}{R(\xi,p)}e^{pt-z\sqrt{\xi^2+p^2b^2}-\frac{\xi}{n}}\frac{dp}{p}\frac{d\xi}{\xi}-$$
$$-\frac{T_0}{2\pi^2\mu i}\int\limits_0^\infty I_1(\xi r)\int\limits_{S_0-i\infty}^{S_0+i\infty} f_1(\xi,p)\frac{\sqrt{\xi^2+p^2b^2}}{R(\xi,\ p)}e^{pt-z\sqrt{\xi^2+p^2b^2}-\frac{\xi}{n}}\frac{dp}{p}d\xi. \qquad (3,15)$$

Исследование и вычисление интегралов, входящих в формулы (3,14) и (3,15), производятся аналогично тому, как сделано в работах [4, 5], в которых рассматриваются подобные интегралы.

В акустическом случае, то есть при $\mu = 0$, имеем:

$$\sigma_r = \sigma_z = \sigma_\theta = \sigma, \quad \tau = 0,$$

$$\Phi^* = -\frac{\gamma c^2 \xi^2}{p(c^2/k - p)} e^{-z\sqrt{\xi^2 + p^2/c^2}} + \frac{\gamma c^2 \xi^2}{p(c^2/k - p)} e^{-z\sqrt{\xi^2 + p/k}}$$

$$\left(c = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}\right), \tag{3,16}$$

$$\Psi^* = 0.$$

Переходя к оригиналам, получим для напряжения при $t < z/c$

$$\sigma = -\frac{T_0 \lambda \gamma}{4\pi} e^{c^2 t/k} \int_0^\infty \left\{ e^{-\sqrt{z^2(\xi^2 + c^2/k^2)}} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z^2}{kt}} - \sqrt{[\xi^2 k - c^2/k]t}\right) + \right.$$

$$\left. + e^{\sqrt{z^2(\xi^2 + c^2/k^2)}} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z^2}{kt}} + \sqrt{\left[\xi^2 k - \frac{c^2}{k}\right]t}\right)\right\} \xi e^{-\xi/n} I_0(\xi r)\, d\xi \tag{3,17}$$

и при $t > z/c$

$$\sigma = \frac{T_0 \lambda \gamma z}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ e^{c^2(t - z/c)/k} - \xi \int_{z/c}^{t} \frac{I_1\left(\xi c\sqrt{\tau^2 - z^2/c^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - z^2/c^2}} e^{(t-\tau)c^2/k}\, d\tau - \right.$$

$$- \frac{1}{2} e^{c^2 t/k} \left[e^{-\sqrt{z^2(\xi^2 + c^2/k^2)}} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z^2}{kt}} - \sqrt{\xi^2 kt + \frac{c^2 t}{k}}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + e^{\sqrt{z^2(\xi^2 + c^2/k^2)}} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z^2}{kt}} + \sqrt{\xi^2 kt + \frac{c^2 t}{k}}\right)\right]\right\} \xi e^{-\xi/n} I_0(\xi r)\, d\xi. \tag{3,18}$$

Переходя к пределу при $t \to z/c$ в выражении (3,18), получим, что напряжение на фронте волны терпит разрыв на величину

$$\Delta\sigma = T_0 \gamma \lambda n^2 / 2\pi (1 + n^2 r^2)^{3/2}. \tag{3,19}$$

Из теоремы о конечном значении оригинала следует, что при $t \to \infty$ $\sigma \to 0$, что соответствует решению статической задачи. Таким образом, напряжение с течением времени изменяется так: в начальный момент времени напряжение отсутствует, в промежуток времени $0 < t < z/c$ напряжение возрастает, в момент $t = z/c$ оно терпит разрыв на величину $\Delta\sigma$ и при $t \to \infty$ стремится к нулю.

Если температура на границе изменяется со временем, то решение получается из данного посредством интеграла Дюгамеля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Даниловская В. И. ПММ, 14, 3, 1950.
2. Даниловская В. И. ПММ, 16, 3, 1952.
3. Катасонов А. М. Вестн. МГУ, сер. мат., мех., астрон., физ., химии, № 3, 1957.
4. Огурцов К. И., Петрашень Г. И. Уч. зап. ЛГУ, вып. 24, 1951.
5. Огурцов К. И. Уч. зап. ЛГУ, вып. 30, 1956.
6. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. Гостехиздат, 1951.

Поступила в редакцию
27. 11 1957 г.

Кафедра
теории упругости