Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1959

Н. А. СЛЕЗКИН

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ОЗЕЕНА К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ИСТЕЧЕНИЯ НАГРЕТОГО ГАЗА

Если взять полные дифференциальные уравнения движения вязкого и теплопроводного газа [1, стр. 55 и 254], положить в них

$$
\begin{gathered}
u = U + u',\ v = v'\ w = w',\ p = p_0 + p', \\
\rho = \rho_0 + \rho',\ T = T_0 + T',\ \mu = \mu_0 + \mu',\ \lambda = \lambda_0 + \lambda', \\
C_p = C_{p_0} + C'_p,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

затем пренебречь всеми нелинейными слагаемыми по отношению u', v', w', ρ' и др. и снова вернуться к первоначальным переменным u, v, w, p и др., то получим следующие приближенные линеаризированные дифференциальные уравнения движения вязкого теплопроводного газа типа уравнений Озеена, учитывающие слагаемые от конвективных производных по времени частично, а линейные слагаемые от вязкости — полностью:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} + U\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu_0\,\Delta u - \frac{\nu_0}{3\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + U\frac{\partial \rho}{\partial x}\right), \\
\frac{\partial v}{\partial t} + U\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu_0\,\Delta v - \frac{\nu_0}{3\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + U\frac{\partial \rho}{\partial x}\right), \\
\frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} = \nu_0\,\Delta w - \frac{\nu_0}{3\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + U\frac{\partial \rho}{\partial x}\right), \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + U\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0, \\
\rho_0 g C_{p_0}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + U\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + U\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda_0\,\Delta T, \\
\frac{p}{p_0} + 1 = \frac{T}{T_0} + \frac{\rho}{\rho_0}.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Уравнения (2) для несжимаемой жидкости с частичным учетом слагаемых от вязкости использовались для задач о развитии течения [2] и некоторых задач о пограничном слое [3]; в ряде случаев решения удовлетворительно согласовывались с результатами опытов. Решения аналогичных задач для газа на основе уравнений (2) также могут представлять интерес и можно полагать, что в отдельных случаях эти решения будут описывать правильно не только качественно, но и количественно развитие явления течения.

Применим уравнения (2) к задаче об истечении нагретого газа. Представим себе, что из щели шириной $2h$ в безграничной стенке вытекает нагретый газ в полубесконечное пространство, заполненное тем же газом, но находящимся на бесконечности в состоянии покоя с давлением p_a и температурой T_a. Если считать, что процесс истечения продолжался достаточно длительное время, то движение газа, обусловленное втеканием струи, можно будет полагать установившимся. Рассмотрим случай, когда давление в выходном отверстии равно давлению p_a среды на бесконечности; в этом случае можно положить давление p всюду постоянным:

$$p = p_a = \text{const}.$$

При всех этих предположениях из (2) получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = a\,\Delta T, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = b\,\Delta u + c\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{U}{T_0}\frac{\partial T}{\partial x}; \tag{3}$$

$$R = \frac{Uh}{\nu_0}, \quad a = \frac{\lambda_0}{\rho_0 g C_{p_0} U} = \frac{h}{PR}, \quad b = \frac{\nu_0}{U} = \frac{h}{R}, \quad c = \frac{\nu_0}{3T_0}. \tag{4}$$

Поместим начало координат в середину отверстия, а положительное направление оси x выберем в сторону течения струи. В силу симметрии течения будем рассматривать только сторону положительного направления оси y. На этой оси симметрии должно выполняться следующее граничное условие:

$$\text{при } y = 0 \text{ и } x > 0 \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \ v = 0. \tag{5}$$

Условие на бесконечности будет иметь вид

$$\begin{aligned} &\text{при } y \to \infty \text{ и } x > 0 \ T \to T_a, \ u \to 0, \ v \to 0, \\ &\text{при } x \to \infty \text{ и } y > 0 \ T \to T_a, \ u \to 0, \ v \to 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Для простоты предположим, что в выходном отверстии температура T и скорость u распределены равномерно; тогда будем иметь следующее граничное (начальное) условие:

$$\begin{aligned} &\text{при } x = 0 \text{ и } 0 < y < h \ T = T_0 = \text{const}, \ u = U = \text{const}; \\ &\text{при } x = 0 \text{ и } y > h \ T = T_a, \ u = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Частное решение первого уравнения (3), удовлетворяющее условию (5) и ограниченное на бесконечности, представляется в виде

$$T_m = e^{-\alpha x}\cos my, \tag{8}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2a}\left(\sqrt{1 + 4a^2m^2} - 1\right). \tag{9}$$

Применяя интеграл Фурье к (8) и используя граничное условие (7), получим следующее полное решение уравнения (3) для температуры:

$$\frac{T - T_a}{T_0 - T_a} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos my \sin mh \frac{dm}{m}. \tag{10}$$

Уравнение (3) для скорости u будет неоднородным. Решение однородного уравнения для u, удовлетворяющее условиям (5), (6) и (7), будет иметь вид

$$\frac{u_1}{U} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\beta x}\cos my \sin mh \frac{dm}{m}, \tag{11}$$

где

$$\beta = \frac{1}{2b}\left(\sqrt{1 + 4b^2 m} - 1\right). \tag{12}$$

Частное решение неоднородного уравнения для u будем искать в виде

$$u_2 = \int_0^\infty f(x, m)\cos my\, dm. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (3), получим неоднородное уравнение для неизвестной функции f;

$$f'' - \frac{1}{b}f' - m^2 f = -\frac{2}{\pi}\frac{c}{b}(T_0 - T_a)\sin mh \frac{\alpha^2}{m}e^{-\alpha x}, \tag{14}$$

Решение уравнения (14), обращающееся в нуль при $x = 0$ и $x = \infty$ будет иметь вид

$$f(x, m) = -\frac{2}{\pi}\frac{c}{b}(T_0 - T_a)\frac{\alpha^2}{m(\alpha^2 + \alpha/b - m^2)}\sin mh\left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right), \tag{15}$$

Решение (15) будет иметь место, если число Прандтля P не равно единице. Если же $P = 1$, то есть $a = b$, то решение уравнения (14) примет вид

$$f(x, m) = \frac{2}{\pi}\frac{c}{b}(T_0 - T_a)\frac{\alpha^2}{m(2\alpha + 1/a)}\sin mh x e^{-\alpha x}. \tag{16}$$

Из первых двух уравнений (3) следует, что даже при числе $P = 1$ распределение температуры в струе не будет подобным распределению скорости u.

Если число Рейнольдса будет достаточно большим, то из (9) и (12) приближенно можно положить

$$\alpha = am^2 = \frac{hm^2}{PR}, \quad \beta = bm^2 = \frac{hm^2}{R}. \tag{17}$$

В этом случае температура вдоль оси струи будет представляться в виде

$$\left(\frac{T - T_a}{T_0 - T_a}\right)_{y=0} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x\tau^2}{hPR}\right)\sin\tau\frac{d\tau}{\tau} = \frac{2}{\pi}\int^{\sqrt{PRh/4x}} e^{-\tau^2}d\tau. \tag{18}$$

Если за условную границу ядра почти постоянных температур струи принять, например, линию, для которой

$$\frac{T - T_a}{T_0 - T_a} = 0{,}99,$$

то протяженность этого ядра вдоль оси симметрии будет определяться равенством

$$L = 0{,}075hPR. \qquad (19)$$

Аналогичным образом можно найти и внешнюю условную границу тепловой струи, положив, например,

$$\frac{T - T_a}{T_0 - T_a} = 0{,}01.$$

Для проведения расчетов с помощью (11), (13) и (15) распределения скорости u потребуются отдельные таблицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. ИЛ, 1956.
2. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. ГИТТЛ, 1951.
3. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. ГИТТЛ, 1955.

Поступила в редакцию
6.1 1958 г.

Кафедра
аэромеханики
и газовой динамики