Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1959

Ю. И. РЕМНЕВ

СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ШАРА ПРИ НАЛИЧИИ ОБЪЕМНОГО РАСШИРЕНИЯ

Полый металлический шар наружного радиуса b и внутреннего a находится под действием наружного P_b и внутреннего P_a равномерного давления. Кроме этого, материал стенки испытывает объемное расширение, вызываемое внешними причинами, например облучением нейтронами. Специальный пример такого рода будет обсужден в § 2.

Указанное объемное расширение $\Theta(r, t)$ является функцией радиуса r и времени облучения t, которое будем считать известным. Предположим, что изотропия материала шара не нарушается и механические свойства последнего не зависят от радиальной координаты r.

По условию симметрии главными осями напряжений и деформаций будут направление центрального радиуса r и два любых перпендикулярных к нему направления на сфере $r = \text{const}$. Эти последние обозначим индексами 1 и 2, а радиальное направление — индексом 8. Тогда в силу симметрии

$$e_1 = e_2, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \tag{1}$$

имеем также

$$e = {}^1/_3 (2e_1 + e_3), \quad e_i = {}^2/_3 (e_1 - e_3) \operatorname{sign} (e_1 - e_3), \tag{2}$$

$$\sigma = {}^1/_3 (2\sigma_1 + \sigma), \quad \sigma_i = (\sigma_1 - \sigma_3) \operatorname{sign} (\sigma_1 - \sigma_3).$$

Так как в указанных условиях нагружение будет простым [5], то для решения поставленной задачи воспользуемся теорией малых упруго-пластических деформаций [5], основные законы которой на основании обобщения гипотезы Неймана имеют вид:

$$D_S = \frac{2\sigma_i}{3e_i} D_e, \tag{3}$$

$$\sigma_i = \Phi(e_i), \tag{3'}$$

$$e = \frac{\sigma}{3K} + \frac{1}{3}\theta. \tag{3''}$$

Здесь $\theta=\theta(r, t)$ — объемное расширение, вызванное облучением. Если принять, что материал обладает линейным упрочнением, то уравнение (3′) запишется в виде [5]

$$\sigma_i = E[(1-\lambda)e_i + \lambda e_s] \left(\lambda = 1 - \frac{1}{E}\frac{d\sigma_i}{de_i} = \text{const}\right). \tag{4}$$

В дальнейших рассуждениях будем исходить из предположения, что материал шара обладает линейным упрочнением.

Радиальное перемещение обозначим через $w=w(r, t)$; тангенциальное перемещение в силу симметрии будет равно нулю. В выражении w время t является параметром; следовательно,

$$e_1 = e_2 = w/r, \quad e_3 = dw/dr. \tag{5}$$

Уравнение (3) приводит к соотношению

$$\operatorname{sign}(\sigma_1 - \sigma_3) = \operatorname{sign}(e_1 - e_3) = \delta. \tag{6}$$

Уравнение равновесия

$$d\sigma_3/dr + 2/r(\sigma_3 - \sigma_1) = 0 \tag{7}$$

на основании (2) и (6) перепишем в виде

$$\frac{d\sigma_1}{dr} = \left[\frac{d(\delta\sigma_i)}{dr} + \frac{2\delta}{r}\sigma_i\right]. \tag{8}$$

Из (3) на основании (2) имеем

$$2\sigma_1 + \sigma_3 + 3K\theta = 3K(2e_1 + e_3).$$

Отсюда, используя (5) и (2), имеем

$$\sigma_1 - \frac{\delta}{3}\sigma_i + K\theta = 3K\frac{w}{r} - \frac{3\delta}{2}Ke_i. \tag{9}$$

Дифференцируя последнее соотношение по r, принимая K постоянной и учитывая, что

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{w}{r}\right) = -\frac{3\delta}{2r}e_i,$$

получим

$$\frac{d\sigma_1}{dr} = \frac{1}{3}\frac{d(\delta\sigma_i)}{dr} - \frac{3K}{2}\left[\frac{d(\delta e_i)}{dr} + \frac{3\delta}{r}e_i\right] - K\frac{d\theta}{dr}. \tag{10}$$

Исключая из (8) и (10) величину $d\sigma_1/dr$, приходим к уравнению

$$\frac{d}{dr}\left[r^3\delta\left(\sigma_i + \frac{9K}{4}e_i\right)\right] = -\frac{3K}{2}r^3\frac{d\theta}{dr}, \tag{11}$$

интегрируя которое, найдем

$$e_i + \frac{4\sigma_i}{9K} = -\frac{2\delta}{3r^3}\int_a^r r^3\frac{d\theta}{dr}dr + \frac{4\delta}{9Kr^3}C_1(t). \tag{12}$$

Произведя интегрирование по частям, представим уравнение (12) в виде

$$e_i + \frac{4\sigma_i}{9K} = \frac{2\delta}{3}\left[\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\bar\theta_a(r, t) + \frac{a^3}{r^3}\theta(a, t) + \frac{2C_1(t)}{3Kr^3}\right], \tag{13}$$

где $\bar\theta_a(r, t)$ — среднее значение функции $\theta(r, t)$ в области (a, r)

$$\bar\theta_a(r, t) = \frac{3}{r^3 - a^3}\int_a^r r^2\theta dr. \tag{14}$$

Уравнение (13) вместе с законом (3′) определяют σ_i с точностью до функции C_1.

Если шар находится в упруго-пластическом состоянии, то границу упругой и пластической областей обозначим через $r=\beta$. Значение величины β определится из условия

$$\sigma_i \Big|_{r=\beta} = \sigma_s. \tag{15}$$

Итак, в момент времени t в шаре могут быть упругая ($a \leqslant r \leqslant \beta$) и пластическая ($\beta \leqslant r \leqslant b$) области. В упругой области уравнение (3′) имеет вид

$$\sigma_i' = E e_i' \tag{16}$$

(одним штрихом отмечены искомые величины, соответствующие упругой деформации, двумя штрихами — пластической).

На основании (16) из (13) получаем

$$\gamma' \sigma_i' = \delta \left[\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \bar{\theta}_a(r, t) - \theta(r, t) + \frac{a^3}{r^3}\theta(a, t) + \frac{2C_1}{3Kr^3} \right], \quad (r \leqslant \beta). \tag{17}$$

На основании (4) и (15) получаем из (12)

$$\gamma'' \sigma_i'' = \lambda \sigma_s - \frac{2\sigma}{3}\left[\left(1 - \frac{\beta^3}{r^3}\right) \bar{\theta}_\beta(r, t) - \theta(r, t) + \frac{\beta^3}{r^3}\theta(\beta, t) + \frac{2C_1}{3Kr^2} \right], \quad (r \geqslant \beta) \tag{18}$$

где

$$\gamma' = 9K + 4E/6KE, \quad \gamma'' = 9K + 4E(1-\lambda)/9KE(1-\lambda).$$

Таким образом,

$$\sigma_i = \begin{cases} \sigma_i' & \text{при } r \leqslant \beta \\ \sigma_i'' & \text{при } r \geqslant \beta. \end{cases} \tag{19}$$

Интегрируя уравнение равновесия (7) и используя (2) при условии $\sigma_3|_{r=a} = -P_a$, находим

$$\sigma_3 = \begin{cases} \sigma_3' = 2\displaystyle\int_a^r \frac{\delta\sigma_i}{r}\,dr - P_a & \text{для } r \leqslant \beta_1 \\[2ex] \sigma_3'' = 2\displaystyle\int_a^\beta \frac{\delta\sigma_i}{r}\,dr + 2\int_\beta^r \frac{\delta\sigma_i}{r}\,dr - P_a & \text{для } r \geqslant \beta. \end{cases} \tag{20}$$

Из условия $\sigma_3|_{r=b} = -P_b$ получаем

$$2\int_a^b \frac{\delta\sigma_i}{r}\,dr = P_a - P_b. \tag{21}$$

Это уравнение определяет функцию C_1, входящую в выражение σ_i.

На основании (2) и (20) находим

$$\sigma_1 = \begin{cases} \delta\sigma_i' + \sigma_3' & \text{для } r \leqslant \beta \\ \delta\sigma_i'' + \sigma_3'' & \text{для } r \geqslant \beta. \end{cases} \tag{22}$$

Подставляя (17) и (18) в (15), получим уравнение для определения β:

$$\sigma_i'\big|_{r=\beta} = \sigma_i''\big|_{r=\beta}. \qquad (23)$$

Знак δ определяется из (17) и (18) условиями $\sigma_i' > 0$, $\sigma_i'' > \sigma_S$. Радиальное перемещение w определим из (9), учитывая (2) и (13):

$$w = \frac{r}{3}\left[2\theta(r, t) - \frac{a^3}{r^3}\theta(a, t) - \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\theta_a(r, t) - \frac{P_a}{K} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{K}\int\limits_a^r \frac{\delta\sigma_i}{r}\,dr + \frac{2C_1}{3Kr^3}\right].$$

Кроме наружного и внутреннего давлений, извне шар облучается быстрыми нейтронами. Предполагается, что поток бомбардирующих нейтронов одинаков во всех радиальных направлениях и интенсивность его постоянна во времени. Известно, что в металле, бомбардируемом быстрыми нейтронами, возникает объемное расширение, объясняемое главным образом образованием смещенных атомов и повышением температуры облучаемого вещества [1—4].

Кирстед изучал объемное расширение в меди, облучаемой при температуре жидкого азота дейтронами с энергией 19 Мэв [1].

Суммарный поток nvt достигал $1{,}15 \cdot 10^{17}$ дейтрон/см^2. Подсчитывая число смещенных атомов по теории Зейтца, Кирстед установил, что расширение росло пропорционально потоку nvt, и величина его, отнесенная к одному смещенному атому, составляла около 0,1 атомного объема (при температуре жидкого азота).

Принимая, что падающий на поверхность шара нейтронный поток изменяется при движении внутрь шара вдоль радиуса r по закону $e^{-\mu r}$ ($\mu = \text{const}$) [6] и выбирая b достаточно большим при достаточно большой величине разности $b - a$, на основании данных Кирстеда в нашем случае примем

$$\theta(r, t) = A_1(t)\,e^{-\mu(b-r)} \quad (a \leqslant r \leqslant b), \qquad (24)$$

где $A_1(t)$ является функцией, зависящей от суммарного потока nvt, включающей число смещенных атомов и атомный объем V_a и не зависимой от r. Обозначим через t_0 время облучения, соответствующее суммарному потоку $nvt = 10^{18}$ нейтрон/см^2, и введем безразмерные величины:

$$\rho = r/b, \quad \alpha = a/b, \quad \beta^\circ = \beta/b, \quad \mu^\circ = \mu b, \quad \tau = t/t_0. \qquad (25)$$

Тогда (24) перепишется

$$\vartheta(\rho, \tau) = A(\tau)\,e^{\mu^\circ(\rho - 1)}.$$

Если принять $A_1 = 0{,}1 V_a \mu B nvt$, где B — число смещенных атомов, отнесенных к одному бомбардирующему нейтрону, то при $nvt = 10^{18}$ нейтрон/см^2, $B \sim 10^4$ дефект/нейтрон, $V_a = 10^{-24}$ см^3, $\mu^\circ = 15$, имеем $A \sim 10^{-3}$.

В безразмерных величинах выражения (17), (18), (20) и (22) примут вид:

$$\gamma'\sigma_i' = \delta\left[\left(1 - \frac{\alpha^3}{\rho^3}\right)\overline{\vartheta}_\alpha(\rho, \tau) + \frac{\alpha^3}{\rho}\vartheta(\alpha, \tau) + \frac{2C}{3K\rho^3}\right], \quad (\rho \leqslant \beta^\circ),$$

$$\gamma''\sigma_i'' = \lambda\sigma_S - \frac{2\delta}{3}\left[\left(1 - \frac{\beta^{\circ 3}}{\rho^3}\right)\overline{\vartheta}_{\beta^\circ}(\rho, \tau) - \vartheta(\rho, t) + \frac{\beta^{\circ 3}}{\rho^3}\vartheta(\beta^\circ, \tau) + \frac{2C}{3K\rho^3}\right],$$

$$(\rho \geqslant \beta^\circ),$$

$$\sigma_3 = \begin{cases} \sigma_3' = 2\int\limits_{\alpha}^{\rho} \frac{\delta\sigma_i}{\rho} d\rho - P_a & \text{для } \rho \leqslant \beta^\circ, \\ \sigma_3'' = 2\int\limits_{\alpha}^{\beta^\circ} \frac{\delta\sigma_i}{\rho} d\rho + 2\int\limits_{\beta^\circ}^{\rho} \frac{\delta\sigma_i''}{\rho} d\rho - P_a & \text{для } \rho \geqslant \beta^\circ, \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \begin{cases} \delta\sigma_i' + \sigma_3 & \text{для } \rho \leqslant \beta^\circ \\ \delta\sigma_i'' + \sigma_3 & \text{для } \rho \leqslant \beta^\circ. \end{cases}$$

Для случая $P_a = P_b = 0$, $\alpha = 0{,}1$ и $\vartheta(\rho, \tau) = 2\cdot 10^{-3}\tau e^{15(\rho-1)}$, если упругие постоянные суть $\nu = 1/3$, $K = E = 2\cdot 10^6$ кг/см², $\sigma_S = 4000$ кг/см² (сталь), значения интенсивности напряжений σ_i и напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ и σ_3 для разных ρ при $\tau = 1$ приведены в таблице.

ρ	$\delta\sigma_i$	σ_1 кг/см²	σ_3 кг/см²
01	479	479	0
02	59,5	199	140
03	17,8	172	154
04	8,78	165	156
05	3,06	163	159
06	— 1,73	161	163
07	— 2,02	159	161
08	— 9,11	141	150
09	— 442	— 323	119
1,0	—2000	—2000	0

При $\rho = 0{,}564$ знак δ меняется.

Так как в пределах рассматриваемой экспозиции nvt модуль Юнга меняется незначительно [7], его можно считать постоянным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kierstead. Bull. Amer. Phys. Soc., **29**, 7, 3**0**, 1954.
2. Захаров А. И. УФН, **47**, 4, 1955.
3. Dienes. Ann. Rev. Nuclear Sci., v. 2, 187, 1953.
4. Slater. J. Appl. Phys., **22**, 237, 1951.
5. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
6. Шпольский Э. В. Атомная физика, т. II. Гостехиздат, 1950.
7. Tompson, Holmes. J. Appl. Phys., **27**, 7, 913, 195**6**.

Поступила в редакцию
20.1 1958 г.

Кафедра
теории упругости