ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1959

А. Я. САГОМОНЯН

ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКИ НА ПОВЕРХНОСТЬ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ*

В качестве примера применения исследования, проведенного в работе [1], рассматривается задача о падении плоской пластинки на свободную поверхность жидкости. Угол падения, величина и направление скорости пластинки таковы, что необходимо учитывать сжимаемость жидкости. Можно надеяться, что полученные в этой работе результаты дают качественную картину рассматриваемого движения жидкости.

§ 1

Пусть на свободную поверхность жидкости, занимающей полупространство, опускается жесткая пластинка, образующая с ней угол β. Скорость пластинки v_0 постоянная и направлена под углом α к свободной поверхности, которая предполагается горизонтальной. Требуется определить силу и момент, действующие на пластинку со стороны жидкости в том случае, когда точка пересечения пластинки со свободной поверхностью движется со скоростью, большей скорости звука c в жидкости.

Приводимым ниже методом можно решить задачу и при дозвуковом значении указанной выше скорости, однако в этом случае эффект сжимаемости невелик и им можно пренебречь [2].

Задача решается в линейной постановке, что для воды является хорошим приближением. Массовые силы не учитываются и рассматривается период движения, когда передний срез пластинки находится над свободной поверхностью. В такой постановке задача будет автомодельной.

Начало координат поместим в точке касания заднего ребра пластинки со свободной поверхностью. Ось x_0 направим по свободной поверхности вправо, ось y_0 — вертикально вниз. Угол β полагаем малым и граничное условие на пластинке переносим на горизонтальную

* Работа выполнена в 1952 г. и доложена на семинаре кафедры волновой и газовой динамики.

поверхность. Свободную поверхность также полагаем мало меняющейся. Предполагается, что задняя кромка обтекается плавно и нет перетекания на верхнюю поверхность пластинки (рис. 1).

За время t после соприкосновения заднее ребро пластинки продвинется по горизонтали и по вертикали соответственно на величины

$$x_{OB} = v_0 \cos\alpha \cdot t, \quad y_{OB} = v_0 \sin\alpha \cdot t. \tag{1,1}$$

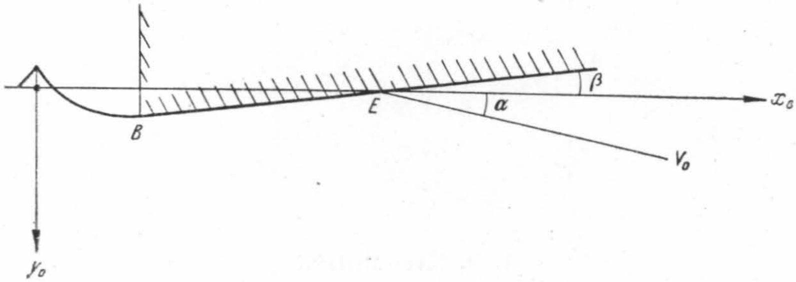

Рис. 1

Поэтому проекция смоченной части пластинки на ось x_0 определится формулой

$$BE = \frac{v_0 \sin\alpha \cdot t}{\operatorname{tg}\beta}. \tag{1,2}$$

Определим координату точки пересечения E пластинки со свободной поверхностью:

$$x_{OE} = v_0 t \left(\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right). \tag{1,3}$$

В принятой линейной постановке область возмущенного движения жидкости показана на рис. 2. Отрезок BE оси x_0 соответствует смоченной части поверхности пластинки. Внутри области DCE не сказы-

Рис. 2

вается влияние свободной поверхности. Параметры жидкости в этой области определяются по известным формулам установившегося сверхзвукового обтекания тонкой пластинки. Для определения течения внутри окружности радиуса ct (рис. 2) воспользуемся хорошо известным преобразованием:

$$x=\frac{x_0}{ct},\quad x=r\cos\theta \qquad r=\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2},\quad 0\leqslant r\leqslant 1, \qquad (1,4)$$
$$y=\frac{y_0}{ct},\quad y=r\sin\theta$$

которое переводит волновое уравнение для компонент скорости в плоскости x_0, y_0, t в уравнение Лапласа в плоскости ε, θ. Например, для v_y получим

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\varepsilon\frac{\partial v_y}{\partial\varepsilon}\right)+\frac{\partial^2 v_y}{\partial\theta^2}=0. \qquad (1,5)$$

В новых переменных гармоническую функцию v_y можно представить как действительную часть некоторой аналитической функции

$$w(\tau)=v_y(\varepsilon,\theta)+if(\varepsilon,\theta),\quad \tau=\varepsilon e^{i\theta}. \qquad (1,6)$$

При этом, как показано в работе [1], имеет место равенство

$$dv_x=\frac{1}{1-x^2}\left\{xydv_y+\frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}df\right\}. \qquad (1,7)$$

Это преобразование переводит полуокружность радиуса ct в плоскости x_0, y_0, t и полуокружность единичного радиуса в плоскости τ. Для определения функции (1,6) имеем следующие граничные условия. На участке AB (рис. 2), соответствующем свободной поверхности, в силу постоянства давления имеем $df=0$, и так как искомые функции (1,7) связаны с дифференциалом f, то можно положить на участке AB $f=0$.

На участке BC — части смоченной поверхности пластинки и на дуге CD имеем граничное условие $v_y=v_0\sin\alpha$.

На остальной части полуокружности (дуга AD) компонента v_y, так же как v_x, равна нулю. Для определения комплексной функции (1,6) получили смешанную задачу. Эту задачу легко решить с помощью формулы Келдыша—Седова, если отобразить область на верхнюю полуплоскость переменного z с помощью функции

$$z=\left(\frac{\tau+1}{\tau-1}\right)^2.$$

В результате для функции (1,6) находим выражение:

$$w(\tau)=v_y+if=v_0\sin\alpha\left\{1-\frac{1}{\pi i}\ln\frac{\sqrt{1+\mu/\lambda}+\sqrt{1-\mu/z}}{\sqrt{1+\mu/\lambda}-\sqrt{1-\mu/z}}\right\}, \qquad (1,8)$$

$$\lambda=\frac{M+1}{M-1},\quad \mu=\frac{1+\nu}{1-\nu},\quad \nu=\frac{v_0}{c}\cos a,$$

$$M=\frac{v_0}{c}\left(\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right);\quad \operatorname{tg}\beta\approx\beta.$$

С помощью (1,8) и (1,7) находится квадратурой компонента v_x и потенциал скорости.

§ 2

На участке BC (рис. 2) смоченной части пластинки давление, определенное с помощью интеграла Лагранжа, выражается формулой

$$P - P_a = \frac{\rho_0 c v_0}{\pi} \sin\alpha \sqrt{\frac{\lambda+\mu}{\lambda}} \left\{ \frac{\lambda+1}{\sqrt{\lambda+\mu}} \times \right.$$

$$\times \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{(1+x)/(1-x)-\mu}}{\sqrt{\lambda+\mu}} - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{(1+x)/(1-x)-\mu}}{\sqrt{\mu}} +$$

$$\left. + \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}} \right\}. \qquad (2,1)$$

Согласно этой формуле, давление возрастает от задней кромки пластинки $\left(x = \frac{v_0}{c}\right) \cos\alpha$ до точки $C\,(x=1)$, дальше до точки E: $\left(x = \frac{v_0}{c}\left(\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)\right)$ давление постоянно и равно

$$P - P_a = \frac{\rho_0 c v_0 M \sin\alpha}{\sqrt{M^2-1}}. \qquad (2,2)$$

Сила, действующая со стороны жидкости на пластинку, равна*

$$F = \rho_0 c^3 \beta t\,(M-\nu) \sqrt{\frac{M-\nu}{M+\nu}} \left(M + 1 - \sqrt{\frac{1+\nu}{2}} \right) \qquad (2,3)$$

Момент сил давления на пластинку относительно начала координат выражается формулой

$$M_0 = \frac{\rho_0 c^3 v_0 t^2 \sin\alpha}{2} \sqrt{\frac{M-\nu}{M+\nu}} \left\{ (M+1)\left(M - \frac{1-\nu}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + (1-\nu)\sqrt{\frac{1+\nu}{2}} \right\}. \qquad (2,4)$$

Для точки приложения силы F имеем

$$x_ц = \frac{ct}{2} \frac{(M+1)\left(M - \frac{1-\nu}{2}\right) + (1-\nu)\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}}{M + 1 - \sqrt{\frac{1-\nu}{2}}}. \qquad (2,5)$$

Если точка E пластинки (рис. 1) движется по поверхности со скоростью звука ($M=1$), то (2,3) и (2,5) соответственно дают:

$$F = \rho_0 c^3 \beta t\,(1-\nu)\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\left(2 - \sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\right),$$

$$x_ц = \frac{(1+\nu) + (1-\nu)\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}}{2 - \sqrt{\frac{1+\nu}{2}}} \frac{ct}{2}. \qquad (2,6)$$

---

* Эти вычисления произведены В. Максимовым.

При вертикальном падении пластинки ($\alpha = \pi/2$) (2,3) и (2,5) запишутся так:

$$F = \rho_0 c^3 \beta M \sqrt{M/(1+M)} \left(1 + M - \sqrt{2}/2\right),$$

$$x_ц = \frac{ct}{2} \, \frac{(M+1)(M-1/2) + \sqrt{2}/2}{M+1-\sqrt{2}/2}, \qquad M = \frac{v_0}{\beta c}. \qquad (2,7)$$

При $M = 1$ имеем

$$F = \frac{\rho_0 c^3 \beta t (2\sqrt{2}-1)}{2}, \quad x_ц = \frac{ct(\sqrt{2}+1)}{2(2\sqrt{2}-1)}. \qquad (2,8)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомонян А. Я. Вестн. МГУ, № 9, 1952.
2. Сагомонян А. Я. Вестн. МГУ, № 2, 1956.
3. Wagner H. Z. angew. Math. und Mech., 12, 197, 1933; Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, М., 1950.

Поступила в редакцию
11.2 1958 г.

Кафедра
волновой и газовой динамики