Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1959

А. Г. СВЕШНИКОВ, М. М. ХАПАЕВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ АЭРОЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ

За последнее время значительное развитие получили различные методы аэроэлектроразведки, в частности основанные на измерении изменения сопротивления излучения установленного на самолете излучающего устройства [1, 2]. При этом весьма важен детальный учет различных факторов, влияющих на данный эффект.

В настоящей работе рассматривается влияние на сопротивление излучения приземного слоя тумана.

Пусть над плоской поверхностью идеально проводящей земли расположен слой тумана толщиной H. Определим изменение сопротивления излучения вертикального электрического диполя, находящегося на расстоянии $H_1 = H + h$ от поверхности земли.

Введем вначале эффективные характеристики тумана.

§ 1. Эффективные характеристики отражающей области

Рассмотрим некоторую область, заполненную множеством идеально проводящих капелек, находящихся на равном расстоянии друг от друга. Радиус капелек много меньше расстояния между ними. Чтобы описать процесс распространения радиоволн в этой области, будем рассматривать это облако капель как диэлектрик, которому припишем некоторую эффективную диэлектрическую проницаемость ε. Займемся ее определением.

Пусть на данную совокупность капель падает плоская волна. В пространстве между каплями отраженное поле будет накладываться на плоскую волну. Результирующее поле и дает эффективную диэлектрическую проницаемость*.

Облако будем рассматривать как совокупность элементарных ячеек, имеющих вид тетраэдра с ребром R. В вершинах тетраэдра находятся капельки. Отраженное поле внутри ячейки в основном определяется четырьмя частицами, лежащими в вершинах. Поэтому сред-

* Подобные методы определения эффективных диэлектрических постоянных используются в ряде работ, в частности [3].

нее диффрагированное поле можно определить как результат усреднения отраженного поля от данных четырех частиц. Рассмотрим сначала плоскую волну, падающую на одну частицу. Падающая волна поляризована по оси x, $E_{x0} = E_0$.

В случае, если радиус частицы очень мал по сравнению с длиной падающей волны λ, то в известных формулах для E_x, E_y и E_z диффрагированного поля можно ограничиться только первыми членами:

$$E_x \simeq E_0 \frac{a^3}{r^3}\left[\frac{1}{2}(1 - 2\cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta) + \right.$$

$$\left. + \cos 2\varphi\left(1 - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\right],$$

$$E_y \simeq E_0 \frac{a^3}{r^3}\frac{1}{2}\sin 2\varphi\left(2\sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + 1\right),$$

$$E_z \simeq E_0 \frac{a^3}{r^3}\cos\varphi(\sin 2\theta - \cos^2\theta).$$

В результате усреднения по объему шара радиуса R получим

$$\overline{E}_x = \frac{E_0 a^3}{2\frac{4}{3}\pi R^3}\int\limits_a^R \frac{dr}{r}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi}(1 - 2\cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta)\sin\theta d\theta =$$

$$= E_0 \frac{3}{4}\frac{a^3}{R^3}\ln\frac{R}{a}\left(-\cos\theta + \frac{2}{3}\cos^3\theta + \frac{1}{3}\sin^3\theta\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{E_0}{2}\frac{a^3}{R^3}\ln\frac{R}{a},$$

$$\overline{E}_y = 0, \quad \overline{E}_z = 0.$$

Ячейку образуют 4 частицы, поэтому суммарное диффрагированное поле равно

$$\widetilde{E}_x = 2E_0\frac{a^3}{R^3}\ln\frac{R}{a}.$$

Тем самым „индукция“ в нашем „диэлектрике“ равна

$$\widetilde{D}_x = E_{x0} + \widetilde{E}_x = \varepsilon E_{x0}.$$

Легко показать, что поправка на двукратное рассеяние имеет порядок a^6/R^6.

Итак:

$$\varepsilon = 1 + 2\frac{a^3}{R^3}\ln\frac{R}{a}. \tag{1}$$

Например, в случае $a/R = 1/5$

$$\varepsilon = 1 + \frac{2}{125}\ln 5 = 1{,}026.$$

Если капли не идеально проводящие, а диэлектрические (например, вода $\varepsilon = 80$ для метрового диапазона), то нужно умножить $\widetilde{E}_x$ на множитель $(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2)$, который для воды $79/82 \approx 1$.

Полученные результаты позволяют характеризовать слой тумана эффективной диэлектрической постоянной ε, мало отличающейся от единицы и определяемой формулой (1).

§ 2. Изменение сопротивления излучения диполя при наличии отражающего слоя

Рассмотрим вертикальный электрический диполь, находящийся на расстоянии $H_1 = H + h$ от поверхности идеально проводящей плоской земли, над которой находится отражающий слой H с диэлектрической постоянной $\varepsilon = 1 + \delta$, где $\delta \ll 1$.

Для определения поля такого диполя введем вектор Герца $\vec{\Pi}$ с одной отличной от нуля составляющей, направленной по оси диполя.

В цилиндрической системе координат с осью z, совпадающей с осью диполя, и плоскостью $z = 0$, совпадающей с плоскостью раздела воздуха и отражающего слоя, задача сводится к определению функции $\Pi(r, z)$, удовлетворяющей уравнениям:

$$\Delta\Pi_b + k_0^2 \Pi_b = 0 \quad z > 0,$$

$$\Delta\Pi_T + k^2 \Pi_T = 0 \quad -H < z < 0, \quad k^2 = k_0^2 (1 + \delta)$$

и дополнительным условиям:

$$\Pi_b \big|_{z=0} = (1 + \delta) \Pi_T \big|_{z=0}, \quad \frac{\partial \Pi_b}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial \Pi_T}{\partial z}\Big|_{z=0},$$

$$\frac{\partial \Pi_T}{\partial z}\Big|_{z=-H} = 0.$$

Так как $\delta \ll 1$, будем искать приближенное решение задачи в виде:

$$\Pi_b = \Pi_0 \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) + \delta \Pi_1 = \left(\frac{e^{ik_0 R}}{R} + \frac{e^{ik_0 R_1}}{R_1}\right)\left(1 + \frac{\delta}{2}\right) + \delta \Pi_1^{*}, \tag{2}$$

$$\Pi_T = \Pi_0 \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) + \delta \Pi_2 = \left(\frac{e^{ik_0 R}}{R} + \frac{e^{ik_0 R_1}}{R_1}\right)\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) + \delta \Pi_2. \quad ($$

Здесь

$$R^2 = z^2 + (z - h)^2, \quad R_1^2 = r^2 + (z + h + 2H)^2,$$

где R_1 — расстояние до зеркального отражения источника в плоскости $z = -H$.

Граничные условия для потенциалов Π_1 и Π_2 примут вид:

$$\Pi_1 \big|_{z=0} = \Pi_2 \big|_{z=0},$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial \Pi_2}{\partial z}\Big|_{z=0} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial z}\Big|_{z=0}, \quad \frac{\partial \Pi_2}{\partial z}\Big|_{z=-H} = 0. \tag{4}$$

Уравнения

$$\Delta\Pi_b + k_0^2 \Pi_b = 0, \qquad \Delta\Pi_T + k_0^2 (1 + \delta) \Pi_T = 0$$

$$z > 0 \qquad\qquad -H < z < 0$$

запишутся для Π_1 и Π_2 в виде:

$$\Delta\Pi_1 + k_0^2 \Pi_1 = 0, \qquad \Delta\Pi_2 + k_0^2 \Pi_2 = -k_0^2 \Pi_0. \tag{5}$$

Пусть

$$\Pi_2 = U_1 + U_2,$$

---

* Такой выбор коэффициентов у Π_0 в формулах (2) и (3) определяется требованием отсутствия особенности у функций Π_1 и Π_2 [4].

где U_2 — частное решение неоднородного уравнения

$$\Delta U_2 + k_0^2 U_2 = - k_0^2 \Pi_0, \tag{6}$$

а для функции Π_0 выбрано представление

$$\Pi_0 = \int_0^\infty Y_0(\lambda r)\{e^{-\mu_0 |z-h|} + e^{-\mu_0 |z+h+2H|}\} \frac{\lambda d\lambda}{\mu_0}. \quad \mu_0^2 = \lambda^2 - k_0^2.$$

Будем искать решение U_2 уравнения (6) в виде

$$U_2 = \int_0^\infty Y_0(\lambda r) Z(z, \lambda) \frac{\lambda d\lambda}{\mu_0}.$$

Подставляя искомый вид решения в уравнение (6), получим

$$\int Y_0(\lambda r)\{Z''(z, \lambda) - \lambda^2 Z + k_0^2 Z\} \frac{\lambda d\lambda}{\mu_0} =$$

$$= -k_0^2 \int_0^\infty Y_0(\lambda r)\{e^{-\mu_0 |z-h|} + e^{-\mu_0 |z+h+2H|}\} \frac{\lambda d\lambda}{\mu_0}.$$

Это равенство будет выполняться, если потребовать:

$$Z'' - \mu_0^2 Z = -k_0^2 \{e^{\mu_0 (z-h)} + e^{-\mu_0 (z+h+2H)}\},$$

откуда

$$Z(z, \lambda) = -\frac{k_0^2}{2\mu_0} z \{e^{\mu_0 (z-h)} - e^{-\mu_0 (z+h+2H}\},$$

тем самым

$$U_2 = -\frac{k_0^2}{2} z \int_0^\infty Y_0(\lambda r)\{e^{\mu_0 (z-h)} - e^{-\mu_0 (z+h+2H)}\} \frac{\lambda d\lambda}{\mu_0^2}. \tag{7}$$

Функции Π_1 и U_1 представим в виде суперпозиции частных решений однородных уравнений:

$$\Delta \Pi_1 + k_0^2 \Pi_1 = 0, \qquad \Delta U_1 + k_0^2 U_1 = 0.$$

Тогда для потенциалов Π_1 и Π_2 получим выражения:

$$\Pi_1 = \int_0^\infty Y_0(\lambda r) f_1(\lambda) e^{-\mu_0 (z+h)} \cdot \frac{\lambda d\lambda}{\mu_0},$$

$$\Pi_2 = U_2 + \int_0^\infty Y_0(\lambda r)\{f_2(\lambda) e^{-\mu_0 (z+h)} + f_3(\lambda) e^{\mu_0 (z-h)}\} \frac{\lambda d\lambda}{\mu_0},$$

в которые входят пока неопределенные функции $f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda)$. Подставляя Π_1 и Π_2 в граничные условия (4), получим три уравнения для определения $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ и $f_3(\lambda)$:

$$\left.\begin{aligned} & f_1(\lambda) = f_2'(\lambda) + f_3'(\lambda), \\ & f_1(\lambda) = f_2(\lambda) - f_3(\lambda) + (1 - e^{-\mu_0 2H})\left(1 + \frac{k_0^2}{2\mu_0^2}\right), \\ & f_3(\lambda) = f_2(\lambda) e^{2\mu_0 H} - \frac{k_0^2}{\mu_0} H. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Отсюда находим

$$f_1(\lambda)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{k_0^2}{2\mu_0^2}\right)+\frac{k_0^2 H}{\mu_0}e^{-2\mu_0 H}+\frac{1}{2}e^{-4H\mu_0}-\frac{k_0^2}{4\mu_0^2}e^{-4H\mu_0}$$

и

$$\Pi_1=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty Y_0(\lambda r)\,e^{-\mu_0(z+h)}\frac{\lambda d\lambda}{\mu_0}+\frac{k_0^2}{4}\int\limits_0^\infty Y_0(\lambda r)e^{-\mu_0(z+h)}\frac{\lambda d\lambda}{\mu_0^3}+$$

$$+k_0^2 H\int\limits_0^\infty Y_0(\lambda r)\,e^{-\mu_0(z+h+2H)}\frac{\lambda d\lambda}{\mu_0^2}+\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty Y_0(\lambda r)\,e^{-\mu_0(z+h+4H)}\frac{\lambda d\lambda}{\mu_0}-$$

$$-\frac{k_0^2}{4}\int\limits_0^\infty Y_0(\lambda r)\,e^{-\mu_0(z+h+4H)}\frac{\lambda d\lambda}{\mu_0^3}. \tag{9}$$

Введем обозначения:

$$R_2^2=r^2+(z+h)^2,\qquad R_3^2=r^2+(z+h+4H)^2.$$

Рассмотрим выражение

$$F(z+l)=\int\limits_0^\infty Y_0(\lambda r)\,e^{-\mu_0(z+l)}\frac{\lambda d\lambda}{\mu_0^3}.$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=\frac{e^{ik_0 R}}{R}.$$

Отсюда

$$F(z+l)=\int\limits_z^\infty d\zeta\int\limits_\zeta^\infty \frac{e^{ik_0\sqrt{r^2+(\eta+l)^2}}}{\sqrt{r^2+(\eta+l)^2}}\,d\eta.$$

Переменив порядок интегрирования и проинтегрировав один раз, получим:

$$F(z+l)=\int\limits_z^\infty e^{ik_0\sqrt{r^2+(\eta+l)^2}}\frac{(\eta+l)-(l+z)}{\sqrt{r^2+(\eta+l)^2}}\,d(\eta+l)=$$

$$=-\frac{1}{ik_0}e^{ik_0\sqrt{r^2+(z+l)^2}}-(l+z)\int\limits_z^\infty\frac{e^{ik_0\sqrt{r^2+(l+\eta)^2}}}{\sqrt{r^2+(\eta+l^2)^2}}\,d(\eta+l)\,^*.$$

Поскольку нас интересует поле в точке расположения диполя, сразу положим $r=0$, тогда

$$F(z+l)=\frac{i}{k_0}e^{ik_0(z+l)}-(l+z)\int\limits_z^\infty\frac{\cos k_0(\eta+l)+i\sin k_0(\eta+l)}{k_0(\eta+l)}\,dk_0(\eta+l)=$$

$$=i\left\{\frac{\cos k_0(z+l)}{k_0}+(l+z)\,\mathrm{Si}\,[k_0(z+l)]\right\}+\mathrm{Re}F. \tag{10}$$

Для больших значений l, интегрируя по частям (10), можно получить асимптотическое разложение (10) по степеням $1/(l+z)$.

---

* При этом мы считали k_0 комплексным с малой положительной мнимой частью.

Ограничимся первым членом разложения

$$F(z+l) = -\frac{e^{ik_0(z+l)}}{k_0^2(z+l)} + 0\left(\frac{1}{(z+l)^2}\right). \qquad (11)$$

Рассмотрим выражение

$$\Phi(z+l) = \int_0^\infty Y_0(\lambda r)\, e^{-\mu_0(z+l)\lambda d\lambda/\mu_0^2},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{e^{ik_0\sqrt{r^2+(z+l)^2}}}{\sqrt{r^2+(z+l)^2}},$$

$$\Phi(z+l) = -\int_z^\infty \frac{e^{ik_0\sqrt{r^2+(\eta+l)^2}}}{\sqrt{r^2+(\eta+l)^2}}\, d(\eta+l) =$$

$$= i\,\mathrm{Si}\,[k_0(z+l)] + \mathrm{Re}\,\Phi \cong -\frac{ie^{ik_0(z+l)}}{k_0(z+l)}. \qquad (12)$$

Выражение (9) теперь можно записать так:

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\frac{e^{ik_0R_2}}{R_2} + \frac{1}{2}\frac{e^{ik_0R_3}}{R_3} + \frac{k_0^2}{4}F(z+h) - \frac{k_0^2}{4}F(z+h+4H) +$$

$$+ k_0^2 H\Phi(z+h+2H).$$

Для больших H и $r=0$, используя асимптотические разложения, получим

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\frac{e^{ik_0(z+h)}}{(z+h)} + \frac{1}{2}\frac{e^{ik_0(z+h+4H)}}{z+h+4H} + \frac{k_0^2}{4}i\left\{\frac{\cos k_0(z+h)}{k_0} +\right.$$

$$\left. + (z+h)\,\mathrm{Si}\,[k_0(z+h)]\right\} + \frac{k_0^2}{4}\mathrm{Re}\,F(z+h) +$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{e^{ik_0(z+h+4H)}}{z+h+4H} - ik_0H\frac{e^{ik_0(z+h+2H)}}{z+h+2H}. \qquad (13$$

Сопротивление излучения диполя вычисляется по формуле [5]:

$$R = 30(k_0l)^2\, Im\,\frac{E_e}{k_0^3}\ (\text{ом}), \qquad (14)$$

где E_e — поле в точке диполя и направленное вдоль него, Im — мнимая часть.

При этом

$$E_e = E_z = \{\partial^2\Pi/\partial z^2 + k_0^2\,\Pi\}.$$

Тогда

$$E_z = E_{z0} + \delta E_{z1},$$

где E_{z0} — поле в свободном полупространстве, δE_{z1} — изменение поля за счет влияния границы раздела.

Так как нас интересует изменение сопротивления излучения за счет влияния границы раздела, подсчитаем $Im\,\delta E_{z1}$:

$$\delta Im\,E_{z1} = \delta Im\left\{\frac{\partial^2\Pi_1}{\partial z^2} + k_0^2\Pi_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial z^2} + \frac{k_0^2}{2}\Pi_0\right\} = \delta\left\{\frac{\sin k_0(z+h)}{(z+h)^3} - \right.$$

$$-\frac{k_0\cos k_0(z+h)}{(z+h)^2}+\frac{k_0^3}{4}\cos k_0(z+h)+\frac{k_0^3}{4}k(z+h)\,\mathrm{Si}\,[k_0(z+h)]+$$

$$+\frac{\sin k_0(z+h)}{(z+h)^3}+\frac{k_0^3}{4}\,\frac{\sin k_0(z+h)}{k_0(z+h)}-Hk_0^2\,\frac{\sin k_0(z+h+2H)}{(z+h+2H)^2}-$$

$$\left.-k_0^3\frac{\cos k_0(z-h)}{k_0^2(z-h)}+k_0^3\frac{\sin k_0(z-h)}{k_0^2(z-h)^2}\right\}.$$

Пусть теперь $z\to h$, то есть перейдем в точку расположения диполя, тогда

$$Im\,E_{z1}=k_0^3\left\{\frac{1}{3}+\frac{\sin 2k_0h}{(2k_0h)^3}-\frac{\cos 2k_0h}{(2k_0h)^2}+\frac{1}{4}\cos 2k_0h+\right.$$

$$\left.+\frac{2k_0h}{4}\,\mathrm{Si}\,2kh+\frac{1}{4}\,\frac{\sin 2k_0h}{2k_0h}-\frac{\sin k_0(2h+2H)}{2(1+h/H)(2h+2H)k_0}\right\}. \qquad (15)$$

Здесь учтены члены порядка $1/H$. Для случая $h/H\ll 1$, если обозначить $2k_0h=x$, то последнее выражение запишется в виде

$$Im\,E_{z1}=k_0^3\left\{\frac{1}{3}-\frac{\sin(x+2k_0H)}{(4k_0H+2x)}+\frac{\sin x}{x^3}-\frac{\cos x}{x^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\cos x+\frac{x}{4}\,\mathrm{Si}\,x+\frac{\sin x}{4x}\right\}. \qquad (16)$$

Таким образом,

$$\Delta R=30\delta\,(k_0l)\left\{\frac{1}{3}-\frac{\sin(x+2k_0H)}{4k_0H+2x}+\frac{\sin x}{x^3}-\frac{\cos x}{x^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\cos x+\frac{x}{4}\,\mathrm{Si}\,x+\frac{\sin x}{4x}\right\}. \qquad (17)$$

При прохождении через границу раздела $x\to 0$

$$\Delta R=30\,\delta\,(k_0l)\left\{\frac{7}{6}-\frac{\sin(2k_0H)}{4k_0H}\right\}\ (\text{ом}).$$

Эта величина может принять, например, значение $\Delta R=\delta 30\,(k_0l)$, а сопротивление излучения в свободном полупространстве с точностью до $1/H^2$:

$$R_2=20\,(k_0l)-60\,(k_0l)\,\frac{\cos k_0 2\,(h+H)}{[2k_0(h+H)]^2}.$$

Второй член есть отраженный сигнал от земли, для достаточно больших H он может быть соизмерим с ΔR.

Для отрицательных значений h, то есть когда излучающий диполь находится внутри отражающего слоя, изменение сопротивления излучения выражается формулой

$$\Delta R=30\delta\,(k_0l)\left[\frac{1}{3}-\frac{\sin x}{x^3}+\frac{\cos x}{x^2}-\frac{1}{4}\cos x-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin x}{4x}-\frac{x}{4}\,\mathrm{Si}\,x\right]. \qquad (18)$$

Аналогичное рассмотрение легко можно провести и для случая горизонтального диполя.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность А. Н. Тихонову за весьма полезное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. и Четаев Д. Н. Изв. АН СССР, сер. геофизическая, № 3, 1956.
2. Семенов А. А. и Карпеев Г. А. Вестн. МГУ, № 2, 1958.
3. Мойжес Б. Я. ЖТФ, **20**, 716, 1950; **25**, 158, 167, 1950.
4. Франк Ф. и Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, М—Л., 1937.
5. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики ИЛ, М., 1950.

Поступила в редакцию
12.11 1958 г.

Кафедра
математики