

Г. А. ЮГОВА

К ЗАДАЧЕ О ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА СИСТЕМАХ ЧАСТИЦ

Введение

В настоящее время для целого ряда физических проблем перво-степенное значение приобретает решение задачи о дифракции волн на различных системах частиц. Имеется большое число работ, посвященных дифракции волн на одной частице.

Дифракция плоской электромагнитной волны на частице сферической формы рассмотрена Ми [1] еще в 1908 г. Точное решение задачи имеет вид плохо сходящихся рядов, мало пригодных для практических расчетов. Могут быть рассмотрены лишь случаи, когда радиус сферы и проводимость ее очень малы, или, наоборот, достаточно велики.

Для частиц более сложной формы точное решение также представляется в виде плохо сходящихся рядов.

В большинстве работ, посвященных дифракции на одной частице, строится приближенное решение при определенных ограничениях, касающихся размеров, формы, а также физических свойств частиц [2—4].

Дифракция волн на системах частиц изучена недостаточно. Наиболее полно исследована задача о дифракции волн на упорядоченной системе частиц в работе Н. П. Кастерина [5], где рассматривается дифракция акустических волн на слое из периодически распределенных в среде сферических частиц. Решение общей задачи для потенциалов поля записано в виде пяти-шестикратных рядов, коэффициенты которых должны быть определены из бесконечной системы алгебраических уравнений. Сходимость рядов в работе не исследуется. Подробно рассмотрен случай, когда длина падающей волны больше периода структуры слоя.

Задача о распространении в неоднородной среде электромагнитных волн в общей постановке значительно труднее задачи о распространении акустических волн, так как она не сводится к скалярным волновым функциям. Поэтому в работах Эвальда [6], Борна и Гёпперт — Майер [7], С. Г. Христова [8] вместо решетки, в узлах которой расположены частицы, рассматривается решетка из точечных диполей,

ибо, как следует из работ Релея и Ми, влияние малого сферического препятствия на плоскую волну может быть описано в первом приближении дипольной волной, излучаемой этим препятствием. Методы, предложенные в этих работах, крайне трудны для практического применения.

В настоящей работе предлагается метод, пригодный для решения задач дифракции как акустических, так и электромагнитных волн на отдельных частицах различной формы и на системах частиц как проводящих, так и непроводящих.

Получены выражения для волновых функций задачи дифракции акустических и электромагнитных волн на периодических системах сферических частиц. Этим же методом могут быть рассмотрены задачи о дифракции волн на системах частиц несферической формы, ограниченных достаточно гладкими поверхностями и различных по физическим свойствам.

Проведено вычисление первого и второго приближений. На примере бесконечной цепочки очень маленьких шариков показано, что учет второго приближения необходим лишь в „резонансных“ случаях; в остальных случаях при выполнении достаточного условия сходимости вторым приближением можно пренебречь.

При дифракции волн на частице, цепочке частиц и на конечном объеме („кристалл“) с помощью метода перевала получены приближенные выражения решения на достаточно больших расстояниях от системы частиц.

В задаче о дифракции на слое из периодически распределенных в среде частиц поля определяются не только на любом расстоянии от слоя, но и внутри слоя, причем решение записывается в виде двойных сходящихся рядов Фурье. Отметим при этом, что ряды, используемые в работах Эвальда, расходятся.

Показано, что при любом соотношении длины падающей волны и периодов структуры решетки для практического определения волновой функции поля достаточно конечного числа членов ряда. В качестве примера рассмотрен так называемый „оптический“ случай, для которого определялась дисперсия акустических и электромагнитных волн. Показано, что в акустическом случае может быть получена и уточнена формула Н. П. Кастерина, в электромагнитном случае уже из первого приближения получена формула Дарвина для показателя преломления.

Для „конечного кристалла“ уже в первом приближении получена поправка к результатам Лауэ.

Получены также первое и второе приближения решения задачи о дифракции сферической волны на слое частиц в достаточно удаленных от слоя точках.

Показано, что метод, примененный нами к периодической структуре, может быть распространен на „не совсем упорядоченные“ системы.

§ 1. Скалярные задачи теории дифракции

Постановка задачи. Ряд физических задач о дифракции волн на различных неоднородностях может быть приведен к задаче математической теории дифракции [9].

Рассмотрим постановку задачи математической теории дифракции.

Пусть неограниченное пространство состоит из ряда областей T_i ($i = 1, 2, \dots$), характеризуемых постоянными параметрами q_i , p_i и внеш-

ней по отношению к T_i части пространства T_e , свойства которой характеризуются постоянными q_e, p_e . Из какого-то источника, находящегося в T_e , распространяется волна, характеризующаяся волновой функцией v^0 . Требуется определить волновую функцию v в T_i и T_e . Внутри каждой области T_j функция v удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta v + k_j^2 v = f_j \quad (j = e, 1, 2, \dots), \quad (1)$$

где

$$k_j^2 = \frac{q_j \omega^2}{p_j}, \quad f_j = \begin{cases} 0 & j = 1, 2, \dots \\ f_e & j = e. \end{cases} \quad (2)$$

Функция f_e задает распределение источников в области T_e . На поверхностях σ_i , ограничивающих области T_i , должны выполняться условия сопряжения:

$$v_i|_{\sigma_i} = v_e|_{\sigma_i}, \quad (3)$$

$$p_i \frac{\partial v_i}{\partial n} \Big|_{\sigma_i} = p_e \frac{\partial v_e}{\partial n} \Big|_{\sigma_i}. \quad (4)$$

Для выделения единственного решения, соответствующего расходящимся волнам, может быть использован принцип предельного поглощения.

Интегральное уравнение задачи. Метод последовательных приближений. В данной работе исследуется интегральное уравнение для волновой функции задачи математической теории дифракции. Выведем интегральное уравнение поставленной задачи. Представим волновую функцию v в виде

$$v = v^0 + \psi, \quad (5)$$

где v^0 является частным решением волнового уравнения с волновым числом k_e , а функция ψ удовлетворяет уравнениям:

$$\Delta \psi + k_e^2 \psi = 0 \quad \text{в } T_e, \quad (6)$$

$$\Delta \psi + k_i^2 \psi = (k_e^2 - k_i^2) v^0 \quad \text{в } T_i \quad (7)$$

и условиям сопряжения на поверхностях σ_i :

$$\psi_i|_{\sigma_i} = \psi_e|_{\sigma_i}, \quad (8)$$

$$p_i \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \Big|_{\sigma_i} - p_e \frac{\partial \psi_e}{\partial n} \Big|_{\sigma_i} = (p_e - p_i) \frac{\partial v^0}{\partial n} \Big|_{\sigma_i}. \quad (9)$$

Решение ищется в виде суммы объемных потенциалов и потенциалов простого слоя на σ_i :

$$\begin{aligned} \psi(P) = & \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{k_i^2 - k_e^2}{4\pi} \int_{T_i} \frac{e^{-ik_e r(M_i, P)}}{r(M_i, P)} v(M_i) d\tau + \right. \\ & \left. + C \int_{\sigma_i} \frac{e^{-ik_e r(S_i, P)}}{r(S_i, P)} \cdot \frac{\partial v_i(S)}{\partial n} d\sigma_s \right\}, \quad (10) \end{aligned}$$

N — число областей T_i , P — любая точка пространства.

Из условий сопряжения на поверхностях σ_i и условия скачка нормальных производных простого слоя на σ_i определим C :

$$C = \frac{p_e - p_i}{4\pi p_e}. \quad (11)$$

Выражение (10), где C определяется формулой (11), удовлетворяет волновым уравнениям (6) и (7) и условиям сопряжения (8), (9).

В дальнейшем будем предполагать, что области T_i ограничены поверхностями типа Ляпунова. Тогда, преобразовав в (10) поверхностный интеграл с помощью второй формулы Грина, получим интегральное уравнение рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned} v(P) = v^0(P) + \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{k_i^2 - k_e^2}{4\pi} \left(1 - \frac{p_i - p_e}{p_e} \right) \iint_{V_i} \frac{e^{-ik_e r(M,P)}}{r(M,P)} v(M) d\tau + \right. \\ \left. + \frac{p_e - p_i}{4\pi p_e} \int_{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial n_s} \left[\frac{e^{-ik_e r(S,P)}}{r(S,P)} \right] v(S) d\sigma_s \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

Решение уравнения будем искать в виде ряда последовательных приближений:

$$v = v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n. \quad (13)$$

В качестве нулевого приближения выбирается поле падающей волны. Определим n -е приближение с помощью соотношения

$$\begin{aligned} \psi_n(Q) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{k_i^2 - k_e^2}{4\pi} \left(1 - \frac{p_i - p_e}{p_e} \right) \int \frac{e^{-ik_e r(M_i,Q)}}{r(M_i,Q)} \psi_{n-1}(M_i) d\tau + \right. \\ \left. + \frac{p_e - p_i}{4\pi p_e} \int_{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial n_s} \left[\frac{e^{-ik_e r(S,Q)}}{r(S,Q)} \right] \psi_{n-1}(S) d\sigma_s \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

Каждое из приближений имеет простой физический смысл. Так, первое приближение определяет волновую функцию в T_e при предположениях, что: 1) размеры частиц T_i достаточно малы и свойства их мало отличаются от свойств среды, так что поле внутри частиц можно считать совпадающим с полем падающей волны; 2) расстояния между частицами настолько велики, что можно пренебрегать многократностью рассеяния.

Второе приближение дает поправку, учитывающую вторичное рассеяние, а также отклонение поля внутри частицы от поля падающей волны.

Метод последовательных приближений позволяет оценить ошибку, которая допускается при учете конечного числа приближений. В некоторых случаях для удовлетворительного определения волновой функции достаточно одного первого приближения.

Достаточное условие сходимости ряда последовательных приближений можно записать в виде

$$\left| \frac{\psi_n(Q)}{\psi_{n-1}(Q)} \right| < 1. \quad (15)$$

В случае дифракции на отдельной частице сферической формы это условие дает

$$\left| \frac{k_i^2 - k_e^2}{2} \right| R^2 \left| 1 - \frac{p_i - p_e}{p_e} \right| + \left| \frac{p_e - p_i}{p_e} \right| (1 + k_e R) < 1. \quad (16)$$

Неравенство (16) будет выполнено, если

$$\left| \frac{p_e - p_i}{p_e} \right| < 1, \quad (17)$$

а значение радиуса R не превышает максимально допустимого значения, определяемого из (16).

В случае дифракции акустических волн

$$\left| \frac{p_e - p_i}{p_e} \right| = \left| \frac{\rho_i - \rho_e}{\rho_i} \right| < 1, \quad (18)$$

так как

$$p_e = 1/\rho_e, \quad p_i = 1/\rho_i.$$

Для задачи о дифракции волн на системах частиц достаточное условие является слишком жестким, так как не учитывается осцилляция ядра уравнения. Точное определение радиуса сходимости сводится к определению первого собственного значения λ_1 рассматриваемой задачи.

Метод последовательных приближений может быть применен к задаче о дифракции на частицах любой формы, ограниченных поверхностью Ляпунова. В настоящей работе в целях упрощения интегрирования по объему и поверхности рассматривается дифракция на частицах сферической формы.

Применим предлагаемый метод к задаче о дифракции плоской волны на сферической частице.

Пусть $v^0 = e^{ik_e z}$, $p_i = p_e$ (аналогично рассматривается общий случай $p_i \neq p_e$). Используя разложение ядра по плоским волнам [10] и проинтегрировав по объему, получим следующее представление для $\psi_1(P)$:

$$\begin{aligned} \psi_1(P) = \alpha \int_{0 - i\infty}^{2\pi + i\infty} \frac{I_{3/2} \left(\sqrt{2} k_e R \cos \frac{\beta}{2} \right)}{\left(\sqrt{2} k_e R \cos \frac{\beta}{2} \right)^{3/2}} \times \\ \times \sin \beta d\beta \int_0^{2\pi} dx e^{-ik_e (x_P \sin \beta \cos \alpha + y_P \sin \beta \sin \alpha + z_P \cos \beta)}, \end{aligned} \quad (19)$$

где α — константа.

Предположим, что расстояние от центра сферы до точки наблюдения ρP :

$$\rho P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}$$

велико по сравнению с радиусом сферы: $\rho(P) \gg R$. Тогда интегралы могут быть вычислены приближенно по методу перевала. В результате вычислений получим

$$\begin{aligned} \psi_1(P) = \alpha_1 \frac{I_{3/2} \left(\sqrt{2} k_e R \cos \frac{\vartheta_P}{2} \right)}{\left(\sqrt{2} k_e R \cos \frac{\vartheta_P}{2} \right)^{3/2}} \cdot \frac{e^{-ik_e \rho P}}{\rho P} + \\ + \alpha_2 W \left(k_e R, \frac{\vartheta_P}{2} \right) \frac{e^{-ik_e \rho P}}{\rho P} + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

где α_1, α_2 — коэффициенты, зависящие от k_i, k_e, R , а функция W имеет вид

$$W(k_e R, \vartheta_p) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{I_{3/2} \left(\sqrt{2} k_e R \cos \frac{\vartheta_p}{2} \right)}{\left(\sqrt{2} k_e R \cos \frac{\vartheta_p}{2} \right)^{3/2}} \right] \cos^2 \frac{\vartheta_p}{2} - \left[\frac{I_{3/2} \left(\sqrt{2} k_e R \cos \frac{\vartheta_p}{2} \right)}{\left(\sqrt{2} k_e R \cos \frac{\vartheta_p}{2} \right)^{3/2}} \right] \sin \frac{\vartheta_p}{2} \right\}. \quad (21)$$

Аналогично (19) можно представить $\psi_2(p)$:

$$\psi_2(P) = \alpha_3 \int_{0-i\infty}^{\pi+i\infty} \frac{I_{3/2} \left(\sqrt{2} k_e R \cos \frac{\beta}{2} \right)}{\left(\sqrt{2} k_e R \cos \frac{\beta}{2} \right)^{3/2}} \sin \beta d\beta \int_0^{2\pi} dx \int_{0-i\infty}^{\pi+i\infty} \sin \beta_1 d\beta_1 \times \int_0^{2\pi} dx_1 F(x_1, x, \beta_1, \beta) e^{-ik_e(x_P \sin \beta_1 \cos x_1 + y_P \sin \beta_1 \sin x_1 + z_P \cos \beta_1)} \quad (22)$$

где α_3 — некоторый коэффициент, зависящий от k_e, k_i, R .

$$F = \frac{I_{3/2} [k_e R \sqrt{2} (1 + \cos \chi)]}{[k_e R \sqrt{2} (1 + \cos \chi)]^{3/2}}, \quad \cos \chi = \cos \beta_1 \cos \beta + \sin \beta_1 \sin \beta \cos(x_1 - x). \quad (23)$$

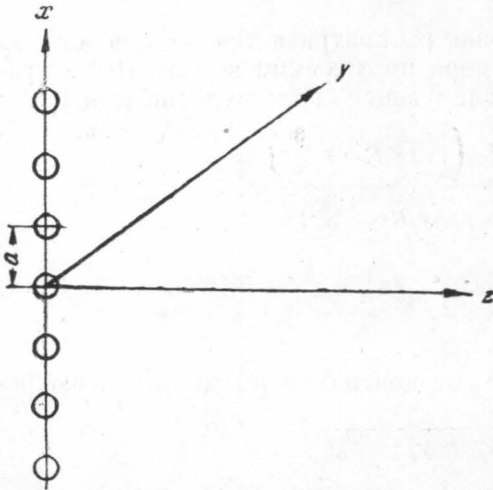


Рис. 1

Используя метод перевала, можно вычислять $\psi_2(P)$ по формуле (22) без вычислений $\psi(M)$ (M — внутренняя точка сферы).

Приближенные решения задач о дифракции на „цепочке“ и на „конечном кристалле“. Рассмотрим задачу о дифракции плоской волны на бесконечной цепочке, состоящей из одинаковых шариков радиуса R , „нанитанных“ на ось x . Расстояние между центрами шариков — a . Предположим, что: 1) радиус сфер настолько мал, что волновую функцию внутри них можно считать постоянной и равной значению поля в центре сферы 2); $p_e = p_i$

(аналогично может быть рассчитан общий случай); 3) среда обладает слабой проводимостью.

Вычислим $\psi_1(P)$:

$$\psi_1(P) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{k_i^2 - k_e^2}{4\pi} \int_{V_e} \frac{e^{-ik_e r(M, p)}}{r(M, p)} v^0(M) d\tau. \quad (24)$$

Используем для вычислений разложение ядра по плоским волнам [6]

$$\frac{e^{-ik_e r(M,P)}}{r(M,P)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\lambda}^{-\infty} \int_{\mu}^{\dots} \int_{\nu}^{\infty} \frac{e^{\pm i\lambda(x_P - x_M) \pm i\mu(y_P - y_M) \pm i\nu(z_P - z_M)}}{k_e^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2} \quad (25)$$

Введем „местную“ систему координат x', y', z' , связанную с центром сферы, которой принадлежит точка M : $x_M = x'_M + la$, $y_M = y'_M$, $z_M = z'_M$. Знаки в показателях в (25) выбираются так, чтобы сумма по l сходилась. Просуммировав по l под знаками интегралов, интегралы по λ и μ вычислим с помощью теории вычетов; интегрирование по ν проведем приближенно для больших z_P по методу перевала. Аналогично проводится вычисление $\psi_2(P)$.

В результате получим:

$$\psi_1(P) = \frac{k_i^2 - k_e^2}{3a} R^3 \sum_n^{-\infty \dots \infty} \frac{e^{-z_P \sqrt{\lambda_n - k_e^2}}}{4 \sqrt{z_P} \sqrt{\lambda_n - k_e^2}} e^{-i\lambda_n x_P} \times \left\{ 1 + \frac{f(y^2, \sqrt{\lambda_n - k_e^2})}{4z_P} \right\}, \quad (26)$$

$$\psi_2(P) = \frac{k_i^2 - k_e^2}{3a} R^3 \left\{ \ln \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \cos k_e a} + i(\pi - \Delta) \right\} \psi_1(P), \quad (27)$$

где $f(y^2, \sqrt{\lambda_n^2 - k_e^2})$ — некоторая функция, выражение для которой мы за недостатком места не приводим;

$$\lambda_n = 2\pi n/a, \quad \Delta = k_e a - 2\pi k \quad (k - \text{целое}).$$

При определенных числовых данных для k_e , a достаточно учесть лишь конечное число членов ряда, так как, если $|n| > k_e a / 2\pi$, то n -й член ряда экспоненциально убывает.

Отметим, что при $k_e a \approx 2\pi k$ имеет место „резонанс“. Происхождение его вполне ясно. В рассматриваемом приближении частицы трактуются, как осцилляторы. Когда $k_e a = 2\pi k$, то расстояние между осцилляторами кратно длине возбуждающей волны и они колеблются в одной фазе.

В „нерезонансных“ случаях $\left| \frac{\psi_2}{\psi_1} \right| \ll 1$. Поэтому с большой точностью можно ограничиться первым приближением.

Аналогично рассчитывается дифракция на „конечном кристалле“, то есть конечном объеме, заполненном периодически распределенными частицами.

Рассматриваемый метод даже в первом приближении позволяет улучшить результат теории Лауэ, который является первым членом разложения решения по степеням l/ρ_P , где l — максимальные линейные размеры кристалла; ρ_P — расстояние от кристалла до точки наблюдения. Вычисления двух членов разложения ψ_1 для одномерного кристалла длины l дают следующее выражение для интенсивности рассеяния в направлениях максимального рассеяния:

$$I = |\psi_1 \psi_1^*| \approx \left(\frac{k_i^2 - k_e^2}{3} R^3 \right)^2 \frac{1}{\rho_P^2} \left(\frac{l}{a} + 1 \right)^2 \left(1 - \frac{l}{\rho_P} \cos \nu \right), \quad (28)$$

где a — расстояние между центрами соседних частиц.
Формула Лауэ для малых кристаллов имеет вид

$$I = \left(\frac{k_i^2 - k_e^2}{3} R^3 \right)^2 \frac{1}{\rho_p^2} \left(\frac{l}{a} + 1 \right)^2. \quad (29)$$

Отсюда следует, что учет членов порядка l/ρ ведет к уменьшению интенсивности максимумов.

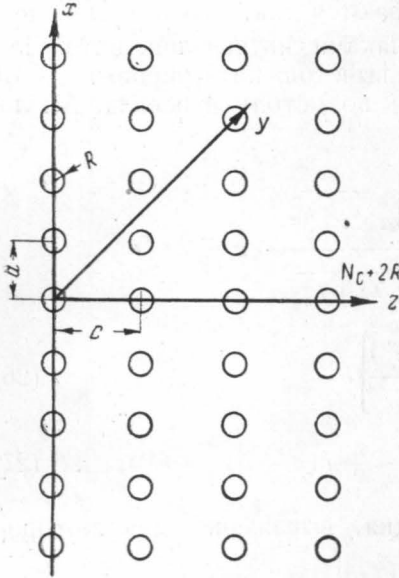


Рис. 2

Дифракция на слое периодически распределенных в среде частиц. Рассмотрим прохождение плоской акустической волны через бесконечный по x и y неоднородный слой, состоящий из периодически распределенных в среде сфер радиуса R . Расстояния между центрами сфер равны: a — вдоль оси x , b — вдоль оси y , c — вдоль оси z . Толщина слоя вдоль z равна $Nc + 2R$. Определим приближенное значение волновой функции v . Ищем решение задачи в виде ряда

$$v = v^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n. \quad (30)$$

Определим ψ_1 — первый член ряда последовательных приближений (30). В отличие от рассмотренных ранее задач в этом случае ψ_1 может быть вычислено точно в любой точке про-

странства с помощью теории вычетов. Первое приближение для волны, рассеянной l , m , n -й сферой, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi_{1lmn}(P) = & \left(1 - \frac{p_i - p_e}{p_e} \right) \frac{k_i^2 - k_e^2}{4\pi} \int_V \frac{e^{-ik_e r(M_{lmn}, P)}}{r(M_{lmn}, P)} v^0(M_{lmn}) d\tau_{lmn} + \\ & + \frac{p_e - p_i}{4\pi p_e} \int_{\sigma_i} \frac{\partial}{\partial n_s} \left[\frac{e^{-ik_e r(S_{lmn}, P)}}{r(S_{lmn}, P)} \right] v^0(S_{lmn}) d\sigma_s, \end{aligned} \quad (31)$$

где M_{lmn} — внутренняя точка l , m , n -й сферы, то есть сферы, расстояние от центра которой O_{lmn} до начала координат определяется выражением

$$\rho(O_{lmn}, O) = \sqrt{l^2 a^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2}. \quad (32)$$

Вычислим сначала первое слагаемое, предположив, что $p_e = p_i$. Пользуясь разложением $\frac{e^{-ik_e r(M, P)}}{r(M, P)}$ по плоским волнам будем иметь:

$$\begin{aligned} \psi_{1lmn}(P) = & \frac{k_i^2 - k_e^2}{8\pi^3} e^{ik_e (la \cos \delta + mb \cos \beta + nc \cos \gamma)} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-l(\lambda x_P + \mu y_P + \nu z_P) \mp (\lambda la + \mu mb + \nu nc)}}{k_e^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2} d\lambda d\mu d\nu \times \end{aligned}$$

$$\times \int e^{-i(\lambda'_M \cos \delta + \mu'_M \cos \beta + \nu'_M \cos \gamma) \pm (\lambda x'_M + \mu y'_M + \nu z'_M)} d\tau. \quad (33)$$

Полное „первичное“ рассеяние слоя есть сумма „первичных“ рассеяний всех сфер:

$$\psi_1(P) = \sum_{l, m}^{-\infty \dots \infty} \sum_{n=0}^N \psi_{1lmn}(P). \quad (34)$$

Для суммирования рядов воспользуемся методом Эвальда [6], полагая k_e комплексной величиной с малым значением мнимой части, то есть будем считать, что в пространстве имеется слабое поглощение. Пути интегрирования по λ и μ — прямые, параллельные действительным осям. Просуммировав по l, m , заменой $\lambda \rightarrow -\lambda$, приходим к замыкающемуся на бесконечности контуру, что дает возможность проинтегрировать по λ с помощью теории вычетов. Аналогично интегрируем по μ и ν . Точно так же рассчитывается и второе слагаемое, когда $p_e \neq p_i$.

В результате вычислений получаем окончательное выражение для ψ_1 :

$$\begin{aligned} \psi_1(P) = & \frac{R^2}{ab} \sum_{s, k}^{-\infty \dots \infty} \frac{e^{-i(\lambda_s x_P + \mu_k y_P) - \nu_{sk} z_P}}{\nu_{sk}} \times \\ & \times \frac{1 - e^{(N+1)(\nu_{sk} - ik_e \cos \gamma) c}}{1 - e^{(\nu_{sk} - ik_e \cos \gamma) c}} \left\{ \frac{d}{dR} \left(\frac{\sin pR}{pR} \right) \frac{p_i - p_e}{2p_e} + \right. \\ & \left. + \frac{k_i^2 - k_e^2}{\sqrt{2}} R \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{p_i - p_e}{p_e} \right) \frac{I_{3/2}(pR)}{(pR)^{3/2}} \right\}, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_s^* = \frac{2\pi s}{a} + k_e \cos \delta, \quad \mu_k = \frac{2\pi k}{b} + k_e \cos \beta, \quad (36) \\ \nu_{sk} = \sqrt{\lambda_s^2 + \mu_k^2 - k_e^2}, \quad p = \sqrt{\lambda_s^2 + \mu_k^2 + (i\nu_{sk} + k_e \cos \gamma)^2}. \end{aligned}$$

Вычисление $\psi_2(P)$ приводит к выражению, которое может быть записано аналогично:

$$\psi_2(P) = \sum_{s, k}^{-\infty \dots \infty} d_{sk} e^{-i(\lambda_s x_P + \mu_k y_P)} \frac{e^{-\nu_{sk} z_P}}{\nu_{sk}}, \quad (37)$$

d_{sk} — коэффициенты, представляющие сумму хорошо сходящегося ряда.

Таким образом, решение представляется в виде двойного ряда Фурье. Если $\nu_{sk}^2 < 0$, то s, k -й член ряда представляет плоскую волну. Когда $\nu_{s'k}^2 > 0$, s', k' -й член экспоненциально затухает. Пусть, например, падающая волна распространяется вдоль оси z . Тогда условие $\nu_{sk}^2 < 0$ можно записать в виде

$$\nu_{sk} = \sqrt{\frac{4\pi^2 s^2}{a^2} + \frac{4\pi^2 k^2}{b^2} - k_e^2}. \quad (38)$$

Здесь можно установить некоторую аналогию с задачей о распространении волн в волноводах. Там решение также представляется в виде ряда плоских волн $A_n e^{i\gamma_n z}$, причем γ_n определяется аналогично $i\nu_{sk}$: если рассматривается волновод прямоугольного сечения со сторонами a , b , то

$$\gamma_n = \sqrt{k_e^2 - \lambda_n^2} = \sqrt{k_e^2 - \pi^2 \left(\frac{s^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)}, \quad s, k = 1, 2, \dots$$

Можно сказать, что в общем случае за слоем будут существовать волны двух типов: 1) преломленная волна, распространяющаяся за слоем с той же фазовой скоростью и в том же направлении, что и падающая волна; 2) волны „волноводного“ типа, которые распространялись бы в прямоугольном волноводе со сторонами $a/2$ и $b/2$, а также между двумя плоскостями, параллельными плоскости xz , расстояние между которыми равно $a/2$, и между двумя плоскостями, параллельными плоскости yz , расстояние между которыми $b/2$.

Из выражений для $\psi_1(P)$ и $\psi_2(P)$ следует, что при $\nu_{sk} \approx 0$ имеет место „резонанс“: амплитуды $\psi_1(P)$ и $\psi_2(P)$ резко возрастают, а также возрастает отношение $|\psi_2/\psi_1|$. Если выполнено достаточное условие сходимости, то в нерезонансном случае $|\psi_2|$ много меньше, чем $|\psi_1|$; в резонансном случае отношение $|\psi_2|$ к $|\psi_1|$ порядка единицы.

Чтобы сравнить полученные результаты с ранее известными, рассмотрим дисперсию волн в данной структуре.

В общем случае в слое возникает сложное волновое поле, причем каждая волна распространяется со скоростью, отличной от скоростей других волн.

Определенным показателем преломления рассматриваемый слой будет обладать лишь в том случае, когда через него проходит одна (преломленная) волна. Это осуществляется при условии $\lambda > a, b, c$.

Проведем сравнение волны, „преломленной“ рассматриваемым неоднородным слоем, с волной, преломленной однородным слоем толщины L с постоянной распространения k_0 .

Пусть падающая волна распространяется вдоль оси z . Тогда связь k_0 и L с параметрами рассматриваемого слоя определяется соотношением.

$$e^{ik_e L} \left\{ \cos k_0 L + \frac{i}{2} \left[\frac{k_0}{k_e} + \frac{k_e}{k_0} \right] \sin k_0 L \right\} \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1, \quad (39)$$

где

$$a_n = e^{ik_e z} \psi_n. \quad (40)$$

Дисперсию слоя, состоящего из периодически распределенных в среде сферических частиц, определял Н. П. Кастерин; он получил формулу, которая при $p_e = p_i$ имеет вид:

$$k_0^2 / k_e^2 = n_0^2 = 1 + \mu + \mu^2, \quad (41)$$

$$\mu = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{R^3}{a^3} \cdot \frac{k_i^2 - k_e^2}{k_e^2}, \quad (42)$$

если

$$k_e R \ll 1, \quad R/a \ll 1, \quad k_e a \ll 1, \quad a = b = c. \quad (43)$$

Пусть $k_0 L \ll 1$. Тогда из формул (39) и (40) следует

$$n_0^2 = 1 + \mu + \mu^2 - i k_e L \mu^2. \quad (44)$$

Последний член характеризует малое поглощение, которое у Н. П. Кастера отсутствует.

Пусть $p_e \neq p_i$. Тогда получим

$$n_0^2 = 1 + \frac{4\pi R^3}{abc} \left[(k_i^2 - k_e^2) \frac{1}{3k_e^2} + \frac{p_i - p_e}{3p_e} \right]. \quad (45)$$

Формула Н. П. Кастера для этого случая имеет вид

$$n_0^2 = 1 + \frac{4\pi R^3}{a^3} \left[\frac{k_i^2 - k_e^2}{3k_e^2} + \frac{p_i - p_e}{2p_i + p_e - \frac{8\pi^3}{a^3} (p_i - p_e)} \right]. \quad (46)$$

Так как мы рассматриваем случай $\frac{p_i - p_e}{p_e} \ll 1$, то эти формулы снова совпадают.

Мы рассмотрели случай дифракции плоской волны на бесконечном слое. В действительности часто приходится иметь дело с рассеянием сферической волны, источник которой находится на конечном расстоянии от слоя. В этом случае в условиях задачи изменится лишь выражение для волновой функции падающей волны:

$$v^0(M) = \frac{e^{-i e R_0(M)}}{R_0(M)}, \quad (47)$$

где

$$R_0(M) = \sqrt{(x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2 + (z_M - z_0)^2}, \quad (48)$$

x_0, y_0, z_0 — координаты источника.

В предположении, что

$$\rho_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2} \gg 1,$$

получим следующее выражение для $\psi_1(p)$:

$$\begin{aligned} \psi_1(P) = & \frac{R^2}{ab} \sqrt{2\pi} \frac{e^{-ik_e \rho_p}}{\rho_p} \sum_{s, k}^{-\infty \dots \infty} \left\{ (k_i^2 - k_e^2) \left(1 - \frac{p_i - p_e}{p_e} \right) \frac{I_{3/2}(pR)}{(pR)^{3/2}} + \right. \\ & \left. + \frac{p_e - p_i}{4p_e} \cdot \frac{d \sin pR}{dR} \frac{\sin pR}{pR} \right\} \frac{e^{i \nu_{sk} z_0}}{\nu_{sk}} e^{i \left(\frac{2\pi s}{a} x_0 + \frac{2\pi k}{b} y_0 \right)} \times \\ & \times \frac{1 - e^{(N+1)(ik_e \cos \vartheta - \nu_{sk}) c}}{1 - e^{(ik_e \cos \vartheta - \nu_{sk}) c}}, \quad (49) \end{aligned}$$

где

$$xP - x_0 = \rho_{p_0} \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \rho_{p_0} = \sqrt{(x_p - x_0)^2 + (y_p - y_0)^2 + z_p^2},$$

$$y_p - y_0 = \rho_{p_0} \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z_p - z_0 = \rho_{p_0} \cos \vartheta,$$

$$p = \sqrt{\left(\frac{2\pi s}{a} \right)^2 + \left(\frac{2\pi k}{b} \right)^2 + k_e \cos \vartheta + i \nu_{sk}}. \quad (50)$$

Ряды практически обрываются, когда v_{1sk} становится положительным и, следовательно, члены ряда экспоненциально убывающими.

Дифракция на „не совсем упорядоченном“ слое. Выше рассматривалось рассеяние на периодических структурах. Тот же метод может быть использован и для решения задач на неупорядоченных системах. В качестве примера рассмотрим задачу о рассеянии на „не совсем упорядоченном слое“. Пусть координаты центров сфер, заполняющих слой, определяются следующим образом:

$$x_{lmn} = la + \Delta x_{lmn}, \quad y_{lmn} = ma + \Delta y_{lmn} = na + \Delta z_{lmn} \quad (51)$$

Рассмотрим пример.

Пусть a — среднее расстояние между центрами частиц вдоль осей, но частицы все время беспорядочно колеблются; пусть это, например, тепловые колебания или броуновское движение. Предположим, что колебания частиц независимы, но средняя энергия колебаний для всех частиц одинакова и мала. Тогда усредняя по времени получим

$$\overline{\Delta x} = \overline{\Delta y} = \overline{\Delta z} = 0, \quad \overline{\Delta x^2} = \overline{\Delta y^2} = \overline{\Delta z^2} = \delta^2. \quad (52)$$

Если падающая волна плоская $v^0 = e^{-ikcz}$ то при $z = N_c + R$ для первого приближения усредненного значения рассеянной волны получим

$$\bar{\psi}_1 = e^{-\frac{k_e^2 \delta^2}{2}} \psi_{10}, \quad (53)$$

где ψ_{10} — волновая функция задачи о рассеянии „упорядоченным“ слоем с периодом структуры $a = b = c$. Уменьшение амплитуд происходит за счет потерь на некогерентное рассеяние. Решая задачу о рассеянии плоской волны на конечном объеме, состоящем из LMN сфер, образующих „не совсем упорядоченную“ решетку, получим следующее выражение для интенсивности рассеяния:

$$I = \left(\frac{k_i^2 - k_e^2}{3} R^3 \right)^2 \frac{1}{\rho_p^2} LMN \left[1 - e^{-2k_e^2 \delta^2 (1 + |\cos \vartheta_p|)} \right] + I_0, \quad (54)$$

где I_0 — интенсивность когерентного рассеяния соответствующей „упорядоченной“ решетки; ρ_p , ϑ_p , φ_p — координаты точки наблюдения. Первое слагаемое определяет интенсивность некогерентного, второе слагаемое — интенсивность когерентного рассеяния от системы. При $\vartheta = \pi + \Delta\vartheta$ ($\Delta\vartheta$ — малое), то есть при малых углах рассеяния, рассеяние некогерентное. Это совпадает с известным результатом рассеяния в газе, полученным экспериментально [11].

В общем случае, чтобы решить задачу о рассеянии в „мутной среде“ надо рассматривать усредненную функцию вероятности распределения частиц.

§ 2. Дифракция электромагнитных волн

Мы рассматривали задачу математической теории дифракции. К такой задаче приводят, например, задачи о дифракции звуковых, упругих волн. Задача о дифракции электромагнитных волн сводится к подобной задаче только в случае дифракции на одном препятствии сферической или эллипсоидальной формы.

Рассмотрим следующую задачу о распространении электромагнитной волны в неоднородной среде. Пусть в однородном простран

стве T_e с параметрами ϵ_0, σ_0 имеется ряд областей $T_i (i = 1, 2, \dots, N)$ с постоянными параметрами $\epsilon_i, \sigma_i (\mu_i = 1)$.

С помощью представлений [3]

$$\bar{E} = \text{grad div } \bar{Z} + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{Z}, \quad \bar{H} = \frac{i\omega}{c} \text{rot } Z, \quad (55)$$

$$\bar{Z}(\bar{r}) = \int_V \frac{\mu \bar{E}(\bar{r}') e^{-ik_e |\bar{r} - \bar{r}'|}}{|\bar{r} - \bar{r}'|} d\tau$$

можно получить следующее интегральное уравнение для вектора $\bar{E}(\bar{r})$ электрического поля:

$$\bar{E}_i(P) = \bar{E}_0 + \frac{k_i^2 - k_e^2}{4\pi k_i^2} \text{rot rot} \int_V \bar{E}(M) e^{-ik_e \bar{r}(M, P)} \frac{d\tau}{r(M, P)}, \quad (56)$$

где \bar{E}_0 — поле падающей волны

$$k_i^2 = \frac{\epsilon \omega^2 - 4\pi i \sigma \omega}{c^2}. \quad (57)$$

Нами исследовалось применение к этому уравнению метода последовательных приближений. За нулевое приближение принимается поле падающей волны; тогда n -е приближение запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{E}^{(n)} &= \frac{k_i^2 - k_e^2}{4\pi k_i^2} \text{rot rot} \int_V \bar{E}^{(n-1)}(M) \frac{e^{-ik_e \bar{r}(M, P)}}{r(M, P)} d\tau = \\ &= \left(\frac{k_i^2 - k_e^2}{4\pi k_i^2} \right)^n \text{rot rot} \int_V \frac{e^{-ik_e \bar{r}(M, P)}}{r(M, P)} d\tau \dots \text{rot rot} \int_V \bar{E}_0 \frac{e^{-ik_e \bar{r}(M, P)}}{r(M, P)} d\tau. \end{aligned} \quad (58)$$

Параметр $\alpha' = \frac{k_i^2 - k_e^2}{4\pi k_i^2}$ для большинства задач мал. Отметим, что он меньше параметра α , рассматриваемого в работах К. С. Шифрина [3], если $k_i^2 > k_e^2$. К. С. Шифрин исследует дифракцию на диэлектрических частицах. Метод последовательных приближений, представляющий решение в виде ряда по степеням α' , применим и к проводящим частицам достаточно малого размера как конечной, так и бесконечной проводимости.

Нами получены первое и второе приближения для рассеянного поля при дифракции электромагнитных волн на слое из периодически распределенных в среде частиц. Как и в случае рассеяния акустических волн, решение записывается в виде двойных хорошо сходящихся рядов Фурье. Выпишем первое приближение:

$$\bar{E}^{(1)}(P) = \alpha' \bar{E}_0 \sum_{s, k} e^{-\nu_{sk} z P - i(\lambda_s x P + \mu_k y P)}, \quad (59)$$

где

$$\begin{aligned} d_{sk} &= \frac{R^3 2\pi \sqrt{2\pi}}{ab \nu_{sk}} \frac{1 - e^{(N+1)(\nu_{sk} - ik_e \cos \gamma) c}}{1 - e^{(\nu_{sk} - ik_e \cos \gamma) c}} \frac{I_{3/2}(R_p)}{(R_p)^{3/2}} \times \\ &\times \{ (k_e^2 - \lambda_s^2) \bar{i} + \mu_k \lambda_s \bar{j} + i \lambda_s \nu_{sk} \bar{k} \}. \end{aligned} \quad (60)$$

Аналогично может быть представлено второе приближение, при этом изменится коэффициент d_{sk} , который мы не будем здесь выпи-

сывать. Может быть доказано, что ряды, представляющие решение как вне слоя, так и внутри его, сходящиеся. В работе Эвальда ряды, представляющие решение внутри слоя, расходятся. В нашем случае сходимость получается как следствие конечности размеров частицы. Решение удобно представить в виде

$$\bar{E}(P) = \sum_{s, k}^{-\infty \dots \infty} \{ \bar{a}_{sk} \cos(sX + kY) + b_{sk} \sin(sX + kY) \}, \quad (61)$$

где система координат X, Y есть так называемая «обратная решетка», введенная Эвальдом и широко используемая в рентгеноструктурном анализе. Такое представление решения удобно для исследования, особенно вследствие того, что имеется лишь конечное число распространяющихся вдоль оси z волн.

Подобный метод вычисления полей может быть применен к любой решетке и, как нам кажется, приводит к результату скорее, чем методы Эвальда и С. Г. Христова [6,8]. В этих работах в результате вычисления получаются системы алгебраических уравнений, которые для каждого случая должны решаться определенными искусственными приемами; рассматриваемым методом получаются выражения для полей, которые дают возможность в каждом конкретном случае легко определить дисперсию, интенсивность рассеяния и т. д.

В заключение автор выражает свою искреннюю признательность А. А. Самарскому за постоянное внимание к работе и руководство ею и А. Н. Тихонову за постановку задачи и ряд ценных указаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mie G. Ann. Phys., 25, 377, 1908.
2. Hart R., Montroll E. J. appl. phys., 22, № 4, № 10, 1951.
3. Шифрин К. С. Рассеяние света в мутной среде. М.—Л., 1951.
4. Stevenson J. appl. phys., 21, № 9, 1950.
5. Кастерин Н. П. Распространение волн в неоднородной среде. Изд. МГУ, 1902.
6. Ewald P. P. Ann. Phys., 49, 1, 1916; 54, 519, 1917.
7. Борн М., Гёпперт-Майер М. Теория твердого тела. ОНТИ, 1938.
8. Христов С. Г. ДАН СССР, 81, 553, 799, 1951.
9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнение математической физики. Гостехиздат, М., 1953.
10. Альперт Я. Л., Файнберг Е. Л., Гинзбург В. Л. Распространение радиоволн, ГТТИ, М., 1953.
11. Джеймс Р., Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей. М., 1950.

Поступила в редакцию
14.11 1958 г.

Кафедра
математики