Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1959

В. Н. ЦЫТОВИЧ

О ВЛИЯНИИ РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВ ПЛАЗМЫ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

§ 1

В работах В. Л. Грановского [1—3] было показано, что плазма находящаяся в разрядном промежутке, обладает определенными резонансными свойствами. Амплитуда малых линейных возмущений зависит от частоты внешнего воздействия, причем резонансная частота ω_0 имеет порядок $\sqrt{\varkappa\nu z_c}$ (см. [2]), где $\varkappa\nu$ — величина порядка произведения частоты столкновений электронов в газе на относительную передачу энергии при отдельном столкновении $\varkappa \simeq 2m/M$ (m — масса электрона, M — масса молекулы), а z_c — число ионизаций в единицу времени. Коэффициент затухания этих колебаний имеет порядок $\varkappa\nu$.

Газ	$v_e = \sqrt{\frac{3k\,T_e}{m}}$	$\lambda = \frac{v_e}{\nu}$	ν	z	$\omega_0 = \sqrt{\varkappa z \nu}$
He	$1{,}5\cdot10^8$ $1{,}2\cdot10^8$ $1{,}0\cdot10^8$	$5\cdot10^{-2}$ $5\cdot10^{-2}$ $5\cdot10^{-2}$	$0{,}3\cdot10^{+10}$ $0{,}25\cdot10^{10}$ $0{,}21\cdot10^{10}$	$8\cdot10^5$ $1{,}4\cdot10^4$ 10^2	$0{,}8\cdot10^6$ $3\cdot10^4$ $7\cdot10^3$
Ar	$1{,}5\cdot10^8$ $1{,}1\cdot10^8$	10^{-1} $2\cdot10^{-1}$	$1{,}5\cdot10^9$ $5{,}3\cdot10^8$	$7\cdot10^7$ $1{,}6\cdot10^5$	$1{,}7\cdot10^6$ $1{,}2\cdot10^5$
Ne	$1{,}5\cdot10^8$ $1{,}1\cdot10^8$	$1{,}5\cdot10^{-2}$ $1{,}5\cdot10^{-2}$	10^{10} $7\cdot10^9$	$4\cdot10^5$ 10^3	$4{,}6\cdot10^5$ $2\cdot10^4$

Из таблицы видно, что частоты, соответствующие этим колебаниям, имеют порядок частот ионных колебаний $\omega_p = \sqrt{4\pi n\varepsilon^2/M}$. Ионные колебания, как известно, распространяются в виде волн, в то время как в [1] рассматриваются лишь такого типа возмущения, которые однородны по длине разрядного промежутка. Это должно соответствовать определенному способу их возбуждения (например, возбуждение флуктуациями э. д. с. во внешней цепи). В настоящей заметке рассматриваются локальные возбуждения (к примеру, на одном из концов разрядного промежутка). В определенных условиях длины волн, соответствующие указанному типу возмущений, превосходят длину разрядной трубки и, следовательно, соответствуют однородным по длине трубки возмущениям. Это является следствием дисперсионных соотношений для указанных волн при определенных условиях в разрядном промежутке.

§ 2

Будем исходить из предположений, аналогичных сделанным в статье [1]: 1) пренебрежение токами смещения, 2) диффузионный режим, 3) квазинейтральность плазмы в условиях равновесия и отсутствия волн, 4) максвелловское распределение по скоростям, 5) средняя потеря энергии электрона при столкновении $\Delta V_e = \varkappa V_e$, где $\varkappa \sim 2m/M$. Кроме того, предполагается, что колебания сопровождаются локальными изменениями температуры электронов и их концентрации (а следовательно, и давления), то есть эти параметры, входящие в максвелловское распределение, являются функциями координаты x вдоль оси трубки.

Уравнение баланса ионов запишем следующим образом:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{\Phi} + zn. \tag{1}$$

Здесь $\vec{\Phi}$ — поток ионов, который будем предполагать состоящим из двух частей: $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2$, где $\vec{\Phi}_1$ — диффузионный поток $\vec{\Phi}_1 = -D\vec{\nabla} n$, а $\vec{\Phi}_2$ — поток, связанный с распространяющимися колебаниями, z — число ионизаций в одну секунду $z = \alpha p V_e^{1/2} e^{-V_i/V_e}$ (см. [1]; ионизируются нейтральные атомы). Будем пренебрегать диффузионным потоком вдоль оси трубки по сравнению с потоком, связанным с колебаниями (учет потока в этом направлении дает в большинстве случаев лишь небольшое затухание волн). Что касается $\vec{\Phi}_2$, то, поскольку нас будут интересовать лишь колебания, распространяющиеся вдоль оси трубки, его можно считать зависящим лишь от x и направленным по оси трубки.

$$\Phi_2 = \xi n, \tag{2}$$

ξ — скорость смещения ионов в процессе колебаний в данной точке.

$$\operatorname{div}\Phi_2 = \xi\frac{dn}{dx} + n\frac{d\xi}{dx}. \tag{3}$$

Получим дисперсионные соотношения в предположении

$$\omega \gg k\xi_c, \tag{4}$$

ξ_c — стационарная скорость дрейфа ионов.

Тогда первым членом в (3) можно пренебречь и уравнение баланса ионов будет иметь вид (приняты обозначения работы [1]):

$$\frac{dn}{dt} = \left(z - z_c\frac{p_c}{p}\;\frac{V_e}{V_{ec}}\right)n + n\frac{d\xi}{dx}. \tag{5}$$

Здесь мы воспользовались соотношением $n = n_0 Y_0 (\mu r/a)$ (см. [1]), а μ^2 выразили через стационарные значения z_c, p_c, V_{ec}. В дальнейшем мы будем рассматривать те области разряда (вдали от стенок трубки), в которых с достаточной точностью можно считать концентрацию не зависящей от расстояния от оси трубки, а следовательно, являющейся лишь функцией x. Все остальные величины в дальнейшем также рассматриваются зависящими лишь от x и t.

Аналогичное уравнение при условии $\omega \gg k\xi_{ec}$ (ξ_{ec} — стационарная скорость дрейфа электронов) записывается для баланса электронов (плотность n_e):

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \left(z - z_c \frac{p_c}{p} \frac{V_e}{V_{ec}} \right) n_e + n_e \frac{d\xi_e}{dx}. \tag{6}$$

Уравнение баланса энергии электронов то же, что и в [1] (обозначения [1]):

$$\frac{dV_e}{dt} = \frac{2g}{3\varepsilon} \frac{E^2}{p\sqrt{V_e}} - hpV_e^{3/2}. \tag{7}$$

Здесь предполагается, что напряженность поля E, давление p и энергия электронов $V_e = kT_e/\varepsilon$ зависят от x. ε — заряд электрона. Для изменения поля вдоль оси трубки имеем

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi\varepsilon (n - n_e). \tag{8}$$

При условии (4) и аналогичном условии для электронов можно пренебречь членами $(\xi \nabla)\vec{\xi}$ и $(\xi \nabla)\vec{\xi}_e$ в уравнениях баланса импульсов:

$$M \frac{d\xi}{dt} = \varepsilon E - \eta\xi - \frac{1}{n_e} \frac{dp}{dx}, \tag{9}$$

$$m \frac{d\xi_e}{dt} = -\varepsilon E - \eta_e \xi_e - \frac{1}{n_e} \frac{dp}{dx}. \tag{10}$$

Здесь мы учли лишь электронное давление

$$p = n_e \varepsilon V_e. \tag{11}$$

η и η_e — коэффициенты трения (см. [4]), характеризующие подвижности электронов и ионов. Эти коэффициенты будем считать малыми в том смысле, что допустимым является пренебрежение произведением их на малые отклонения от равновесных значений ξ.

Система уравнений (3), (5) — (11) является нелинейной. Из нее может быть составлена линейная система для малых добавок к равновесным значениям:

$$\left.\begin{aligned} n = n_c(1+\nu); \quad n_e = n_{ec}(1+\nu_e), \quad n_c = n_{ec} \\ V_e = V_{ec}(1+v); \quad E = E_c(1+e); \quad p = p_c(1+\pi) \\ \xi = \xi_c + \xi'; \quad \xi_e = \xi_{ec} + \xi'_e; \quad \xi_c = \varepsilon E_c/\eta; \quad \xi_{ec} = -\varepsilon E_c/\eta_e \\ z = z_c(1+\zeta); \quad \zeta = \left(\frac{V_c}{V_{ec}} + \frac{1}{2}\right) v + \pi; \quad \pi = \nu_e + v. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Исключая ζ и π, получим систему линейных уравнений:

$$\frac{dv}{dt} = \vartheta (e - \nu_e - 2v), \tag{13}$$

$$\frac{d\nu}{dt} = \alpha v + 2z_c \nu_e - \frac{d\xi'}{dx}, \tag{14}$$

$$\frac{d\nu_e}{dt} = e\upsilon + 2z_c\nu_e - \frac{d\xi_e'}{dx}, \tag{15}$$

$$\frac{dE}{dx} = \beta(\nu - \nu_e),$$

$$\frac{d\xi'}{dt} = \frac{\varepsilon E_c}{M}c - \frac{p_c}{n_c M}\left(\frac{d\nu_e}{dx} + \frac{dv}{dx}\right), \tag{16}$$

$$\frac{d\xi_e'}{dt} = -\frac{\varepsilon E_c}{m}e - \frac{p_c}{n_c m}\left(\frac{d\nu_e}{dx} + \frac{dv}{dx}\right), \tag{17}$$

где

$$\vartheta = 2hp_c V_{ec}^{1/2}; \quad \alpha = z_c\left(\frac{V_i}{V_e} + \frac{3}{2}\right), \tag{18}$$

$$\beta = \frac{4\pi n_c \varepsilon}{E_c}; \quad \alpha \text{ имеет порядок } z_c \tag{19}$$

ϑ имеет порядок $\varkappa\nu$ (см. табл.).

Представляя все величины в форме $s = s_0 e^{i(\omega t - kx)}$, получим два уравнения для концентраций ν и ν_e:

$$\left.\begin{aligned} i\omega\nu = {} & \frac{\alpha\vartheta}{ik(i\omega + 2\vartheta)}[\beta(\nu_e - \nu) - ik\nu_e)] + 2z_c\nu_e - \frac{\omega_p^2}{i\omega}(\nu - \nu_e) - \\ & - \frac{p_c k^2}{n_c M i\omega}\left\{\nu_e + \frac{\vartheta}{ik(i\omega + 2\vartheta)}[\beta(\nu_e - \nu) - ik\nu_e]\right\}; \\ & \omega_p^2 = \frac{4\pi n_c \varepsilon^2}{M}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} i\omega\nu_e = {} & \frac{\alpha\vartheta}{ik(i\omega + 2\vartheta)}[\beta(\nu_e - \nu) - ik\nu_e] + 2z_c\nu_e + \\ & + \frac{\omega_e^2}{i\omega}(\nu - \nu_e) - \frac{p_c k^2}{n_c m i\omega}\left\{\nu_e + \frac{\vartheta}{ik(i\omega + 2\vartheta)}\times\right. \\ & \left.\times[\beta(\nu_e - \nu) - ik\nu_e]\right\}; \quad \omega_e^2 = \frac{4\pi n_c \varepsilon^2}{m}. \end{aligned} \tag{21}$$

В частном случае $\vartheta = 0$, $z_c = 0$ имеем:

$$(\omega_p^2 - \omega^2)\nu = \left(\omega_p^2 - \frac{\varepsilon V_{ec} k^2}{M}\right)\nu_e, \tag{22}$$

$$\left(\omega_e^2 - \omega^2 + \frac{k^2 \varepsilon V_{ec}}{m}\right)\nu_e = \omega_e^2 \nu, \tag{23}$$

откуда следует

$$k = \pm\sqrt{\frac{m}{kT}}\sqrt{\frac{\omega_c^2 + \omega_p^2 - \omega^2}{2\omega_p^2 - \omega^2}}\cdot\omega; \tag{24}$$

при $\omega \ll \omega_p$ получаем

$$k = \pm\omega\sqrt{\frac{M}{2kT_-}}. \tag{25}$$

При этом $\nu/\nu_e \sim 1$.

Если же $\omega \gg \omega_e$, то из (22), (23) получаем хорошо известное дисперсионное соотношение для электронных колебаний в одномерном случае

$$\omega^2 = \omega_e^2 + \frac{kT_-}{m}k^2, \tag{26}$$

при этом $\nu/\nu_e \simeq m/M$.

В общем случае дисперсионное соотношение можно записать в виде

$$k^2 = \frac{m}{kT}\omega^2 \times \frac{\left(1-\frac{D}{\omega^2}\right)\left(\frac{\omega_p^2+\omega_e^2}{\omega^2}-1\right)+\frac{2iz_c}{\omega}\left(\frac{\omega_p^2-\omega_e^2+2A}{\omega^2}-1\right)}{B\left(\frac{2\omega_p^2}{\omega^2}-1\right)+C\left(\frac{2iz_c}{\omega}+\frac{D-A}{\omega^2}\right)-\frac{m}{M}C\left(\frac{2\omega_e^2}{\omega^2}-1\right)+\frac{AB}{\omega^2}}, \quad (27)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A &= \alpha\vartheta\frac{\beta}{ik\left(1+\frac{2\vartheta}{i\omega}\right)}; \quad B = 1-\frac{\vartheta\left(1-\frac{\beta}{ik}\right)}{i\omega\left(1+\frac{2\vartheta}{i\omega}\right)}, \\ C &= \frac{\vartheta}{i\omega}\frac{\beta}{ik}\frac{1}{1+\frac{2\vartheta}{i\omega}}, \quad D = \frac{\alpha\vartheta}{1+\frac{2\vartheta}{i\omega}}. \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

§ 3

Рассмотрим некоторые предельные выражения для дисперсионных соотношений. Если учесть, что α имеет порядок z_c, а ϑ — порядок $\varkappa\nu$, то из таблицы видно, в каких конкретных случаях будут справедливы те или иные из написанных ниже выражений. Пусть $\omega \ll \omega_p$. При $\omega \gg \alpha$ и $\alpha \gg \vartheta$ получаем:

$$k = \pm\omega\sqrt{M/2kT} \text{ при } k \gg \beta \quad (29)$$

$$k = -\frac{\vartheta\beta}{2\omega} \pm \sqrt{\frac{M}{2kT_-}\omega^2 + \frac{\vartheta^2\beta^2}{4\omega^2}} \text{ при } k \ll \beta. \quad (30)$$

Очевидно, что минимально возможные k определяются длиной раз рядного промежутка. При $\omega \gg \alpha$ и $\omega \ll \vartheta$ получаем:

$$k = \pm\omega\sqrt{\frac{M}{kT_-}} \text{ при } k \gg \beta \quad (31)$$

$$k = \omega\left(\frac{\beta}{2\vartheta} \pm \sqrt{\frac{M}{kT_-}+\left(\frac{\beta}{2\vartheta}\right)^2}\right) \text{ при } k \ll \beta\, \omega^2 \gg \alpha\vartheta. \quad (32$$

Отметим, что в трех случаях (29), (31), (32) фазовая скорость от частоты не зависит, так что один этот признак не является свидетельством того, что мы имеем дело с чистыми электроакустическими колебаниями (случай (29)).

При $\omega \ll \alpha$, $\omega \gg \vartheta$ и $k \gg \beta$ квадрат волнового числа оказывается чисто мнимым. Это означает, что должно произойти затухание колебаний, возбуждаемых, например, на одном из концов разрядного промежутка, на расстояниях порядка длины волны, то есть возмущения затухнут в плазме без всякого распространения. В дальнейшем во всех случаях, когда квадрат волнового числа будет чисто мнимым или отрицательным, мы будем приводить выражение для глубины проникновения возмущения в плазму, связанное с мнимой частью k соотношением $d = 2\pi/|Jmk|$. В последнем из рассмотренных выше случаев получаем

$$d = \sqrt{\frac{8\pi^2 kT_-}{M\omega z_c}}. \quad (33)$$

Отметим, что в данном случае с ростом частоты глубина проникновения уменьшается. При частотах, меньших ω_e

$$\omega_e = \frac{8\pi (kT_-)}{Mz_c l^2}, \tag{34}$$

где l — длина разрядного промежутка, колебания займут весь разрядный промежуток, то есть в плазме будут возбуждаться синфазные колебания. Это будет соответствовать типу колебаний, рассмотренных В. Л. Грановским [1, 2].

При $\omega \ll \alpha$, $\omega \gg \vartheta$ и $k \ll \beta$ получим

$$k_1 = \omega^3 \frac{M}{4kT_-} \frac{z_c/\alpha}{\vartheta\beta}, \quad k_2 = 0. \tag{35}$$

Отметим, что для первого значения фазовая скорость равна

$$v_\text{ф} = \frac{4kT_-}{M} \frac{\vartheta\beta\,\alpha/z_c}{\omega^3}; \tag{36}$$

второе значение k соответствует синфазным колебаниям (длина волны значительно превосходит размеры рязрядного промежутка).

При $\omega \ll \alpha$ и $\omega \ll \vartheta$ квадрат волнового числа чисто мнимый:

$$d = \sqrt{\frac{8\pi^2 kT_-\,\alpha\omega_p^2}{M\omega^3 z_c\left(\frac{V_i}{V_{ec}} + \frac{11}{2}\right)}} \quad \text{при } k \gg \beta, \tag{37}$$

$$d = \frac{8\pi kT_-}{M} \frac{\beta}{\omega_p^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{V_i}{V_{ec}} + \frac{11}{2}\right)} \quad \text{при } k \ll \beta. \tag{38}$$

Рассмотрим теперь случай, когда частоты лежат в интервале

$$\omega \ll \omega_e, \quad \omega \gg \omega_p.$$

При $\omega \gg \alpha$ и $\omega \gg \vartheta$ получаем:

$$d = \frac{2\pi}{\omega_e} \sqrt{\frac{kT_-}{m}} \quad \text{при } k \gg \beta, \tag{39}$$

$$k = -\frac{\vartheta\beta m}{2\omega M} \pm \sqrt{\left(\frac{\vartheta\beta m}{2\omega M}\right)^2 - \frac{m}{kT}\omega_e^2} \quad \text{при } k \ll \beta. \tag{40}$$

В случае (40) распространяющиеся незатухающие волны имеют место лишь при частотах, меньших

$$\omega = \frac{\vartheta\beta m}{2M\omega_e} \sqrt{\frac{kT}{m}};$$

волны при этом распространяются от катода к аноду.

При $\omega \gg \alpha$ и $\omega \ll \vartheta$ получаем:

$$d = \frac{2\pi}{\omega_e} \sqrt{\frac{kT_-}{m}} \quad \text{при } k \gg \beta, \tag{41}$$

$$d = \frac{kT_-\beta}{2m\omega_e^2} \quad \text{при } k \ll \beta, \quad k \gg \frac{\alpha\beta}{\omega}. \tag{42}$$

При $\omega \ll \alpha$ и $\omega \gg \vartheta$ получаем:

$$d = \sqrt{\frac{2\pi^2 k T_{-} \omega}{m\omega_e^2 z_c}} \quad \text{при } k \gg \beta, \tag{43}$$

$$k_1 = \frac{m}{kT_{-}} \frac{\omega_e^2 \omega}{\vartheta\beta\left(\frac{V_i}{V_{ec}} + 1\right)} \; k_2 = 0, \quad \text{при } k \ll \beta. \tag{44}$$

В случае (44) первое значение соответствует распространению волн с не зависящей от частоты фазовой скоростью, второе — синфазным колебаниям.

При $\omega \ll \alpha$ и $\omega \ll \vartheta$ получаем:

$$d = \frac{\pi k T_{-} \beta}{m\omega_e^2} \quad \text{при } k \gg \beta, \quad k \ll \frac{\beta z_c}{\omega}, \tag{45}$$

$$k_1 = k_2 \simeq 0 \qquad \text{при } k \ll \beta. \tag{46}$$

Отметим, что в случае (43) глубина проникновения возмущения в плазму растет с частотой, а не убывает. Такое явление, по-видимому, наблюдалось в экспериментальной работе [5].

Автор весьма признателен А. А. Зайцеву за подробное обсуждение настоящей работы, Э. Д. Андрюхиной за обсуждение ее экспериментальной работы, которое стимулировало настоящее исследование.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грановский В. Л. ДАН СССР, **24**, № 9, 1940.
2. Грановский В. Л. ДАН СССР, **28**, № 1, 1940.
3. Грановский В. Л., Быховская Л. ЖЭТФ, **16**, 1946.
4. Shuman W. O. Z. f. Physik, **121**, 1, 1943.
5. Андрюхина Э. Д. Дипломная работа, МГУ, 1958.

Поступила в редакцию
13.12 1958 г.

Кафедра
электродинамики
и квантовой механики