Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1959

МАТЕМАТИКА

М. С. АГРАНОВИЧ

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

1. Постановка задачи. Пусть $P(\partial/\partial x) = P(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными комплексными коэффициентами, многочлен от $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$. Мы будем рассматривать уравнение

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = f(x), \qquad (1)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка n-мерного вещественного пространства R^n а $u(x)$ и $f(x)$ — комплекснозначные функции, обычные или обобщенные. Обобщенными функциями мы называем элементы пространства K' линейных непрерывных функционалов над пространством K финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ (см., например, [1]); уравнение (1) имеет при этом следующий смысл:

$$\left(u(x), \overline{P}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)\right) = \left(f(x), \varphi(x)\right),$$

где (f, φ) — результат применения функционала f к основной функции φ, а черта обозначает замену коэффициентов в P сопряженными числами.

Если F — некоторый класс функций, то через PF мы обозначаем совокупность функций $P(\partial/\partial x)f(x)$, где $f(x)$ пробегает F. Для уравнения (1) известны следующие теоремы существования решений, определенных на всем R^n*:

1. $PK' = K'$ [2].

2. $PK'_\alpha \supset K'_\beta$, где $\alpha = \beta + \text{const}$. Здесь K'_α — пространство обобщенных функций порядка $\leqslant \alpha$, то есть линейных непрерывных функционалов над пространством K_α функций, непрерывно дифференцируемых до порядка α (см. [3], [4]).

3. $PC^\alpha \supset C^\beta$, $\alpha = \beta + [n/2] + 1$, где C^α — пространство функций, непрерывно дифференцируемых до порядка α [4].

4. $PC^\infty = C^\infty$ (см. [3] и [4]).

* Другие теоремы существования см. в [2—5] и [8—10].

5. $PH = H$, где H — пространство всех целых аналитических функций [2].

6. $PH_A = H_A$, $A > 1$, где H_A — пространство всех целых аналитических функций порядка роста не выше A [2].

Теорема 6 уточняет теорему 5. Нашей целью будет получение аналогичных уточнений для теорем 2, 3 и 4. Заметим, что если функция $f(x)$ принадлежит H_A, то и все ее производные принадлежат H_A. В соответствии с этим уточнение теоремы 4 будет состоять, грубо говоря, в следующем: если $f(x)$ бесконечно дифференцируема и каждая ее производная растет на бесконечности не быстрее чем $\exp\|x\|^{A+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$), то существует решение $u(x)$ уравнения (1) с такими же свойствами. Уточнение теоремы 3 будет аналогичным, только речь в нем будет идти о функциях, непрерывно дифференцируемых до определенного порядка. Наконец, уточняя теорему 2, мы покажем, что если обобщенная функция $f(x)$ действует по формуле*

$$(f(x),\ \varphi(x)) = \sum_{q \leqslant p} \int F_q(x) \frac{\partial^q \varphi}{\partial x^q}\, dx,$$

где функции $F_q(x)$ растут на бесконечности не быстрее, чем $\exp\|x\|^{A+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$), то существует решение $u(x)$ уравнения (1), имеющее аналогичную структуру.

2. Для доказательства таких предложений удобно расширить пространство основных функций, заменив K таким пространством, над которым каждый линейный непрерывный функционал имеет только что указанный вид. Мы воспользуемся пространствами $W_{M,a}$ Б. Л. Гуревича и пространствами $S_{\alpha,A}$ Г. Е. Шилова (см. например, [1], гл. IV и [6], гл. I).

Пространство $W_{M,a}$ определяется следующим образом. Задаются вектор $a = (a_1, \ldots, a_n) > 0$ и система монотонно возрастающих непрерывных функций $\mu_k(\xi)$ одного вещественного переменного ($0 \leqslant \xi < \infty$), таких, что $\mu_k(0) = 0$ и $\mu_k(\infty) = \infty$ ($k = 1, \ldots, n$). Функции $M_k(t)$ определяются равенствами

$$M_k(t) = \int_0^t \mu_k(\xi)\, d\xi \quad (t > 0), \qquad M_k(-t) = M_k(t).$$

Эти функции удовлетворяют неравенству выпуклости

$$M_k(t') + M_k(t'') \leqslant M_k(t' + t'') \text{ при } t' \geqslant 0,\ t'' \geqslant 0. \tag{2}$$

$W_{M,a}$ есть счетно-нормированное пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ с нормами

$$\|\varphi\|_p = \sup_{x;\ q \leqslant p} \underline{M}_p(x) \left|\frac{\partial^q \varphi}{\partial x^q}\right| < \infty,\ p_k = 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

где

$$\underline{M}_p(x) = \exp\left\{\sum_1^n M_k\left[a_k\left(1 - p_k^{-1}\right) x_k\right]\right\}. \tag{4}$$

---

* $\partial^q\varphi/\partial x^q = \partial^{|q|}\varphi/\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_n^{q_n}$, где $|q| = q_1 + \ldots + q_n$. Если буква обозначает (n-мерный числовой) вектор, то это либо специально оговаривается, либо очевидно из контекста, как в данном случае с q. Через $\|x\|$ обозначается эвклидова норма вектора x: $(\Sigma x_i^2)^{1/2}$. Если p и q — векторы, то запись $q \leqslant p$ означает, что $q_j \leqslant p_j$ при всех j. Аналогичные обозначения применяются и дальше, например, $s^q = s_1^{q_1} \ldots s_n^{q_n}$, $d\sigma = d\sigma_1 \ldots d\sigma_n$; через (x, s) обозначается сумма $x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n$.

Всякий линейный непрерывный функционал $f(x)$ над $W_{M,a}$ записывается в форме

$$(f(x), \varphi(x)) = \sum_{q \leqslant r} \int \underline{M}_p(x) f_q(x) \frac{\partial^q \varphi(x)}{\partial x^q} dx \tag{5}$$

при каких-нибудь r и p, где $f_q(x)$ — ограниченные измеримые функции.

Преобразование Фурье $\psi(s) = \int \varphi(x) \exp(ix, s)\, dx$ функции φ из $W_{M,a}$ есть целая аналитическая функция, определенная в n-мерном комплексном пространстве C^n точек $s = \sigma + i\tau$ и удовлетворяющая неравенствам

$$|s^q \psi(s)| \leqslant C_{q\rho} \exp\left\{\sum_1^n \Omega_k [(\rho_k + a_k^{-1}) \tau_k]\right\} \tag{6}$$

при любом $\rho > 0$. Здесь $\Omega_k(t)$ — функция, двойственная по Юнгу к $M_k(t)$:

$$\Omega_k(t) = \int_0^t \omega(\eta)\, d\eta \quad (t > 0), \quad \Omega_k(-t) = \Omega_k(t),$$

где $\omega_k(\eta)$ — функция, обратная к $\mu_k(\xi)$:

$$\omega_k[\mu_k(\xi)] = \xi, \quad \mu_k[\omega_k(\eta)] = \eta.$$

Имеет место неравенство Юнга

$$tt' \leqslant M_k(t) + \Omega_k(t') \text{ для } t \geqslant 0, \ t' \geqslant 0; \tag{7}$$

оно превращается в равенство при $t' = \mu_k(t)$.

На функции $M_k(t)$ мы наложим следующее ограничение: для любых $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ найдется такое $t_0 > 0$, что при $t \geqslant t_0$

$$M_k(\varepsilon t) \geqslant C \mu_k(t). \tag{8}$$

Ему удовлетворяют выпуклые функции степенного роста и не удовлетворяют функции экспоненциального роста.

Пространство $S_{\alpha,A}$ для $0 < \alpha < 1$ получается, если взять $M_k(t) = t^{1/\alpha_k}$ $(t \geqslant 0)$. Для $\alpha \geqslant 0$ серия этих пространств определяется следующим образом. Пусть $\alpha_k = 0$ при $k \leqslant k^*$ и $\alpha_k > 0$ при $k > k^*$. Задается вектор $A = (A_1, \ldots, A_n) > 0$. $S_{\alpha,A}$ есть счетно-нормированное пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, равных нулю при $|x_k| \geqslant A_k$ $(k \leqslant k^*)$, с нормами (3), где $(a_k = \alpha_k e^{-1} A_k^{-1/\alpha_k})$

$$\underline{M}_p(x) = \exp\left\{\sum_{k > k^*} a_k (1 - p_k^{-1}) |x_k|^{1/\alpha_k}\right\} \text{ при } |x_j| < A_j \qquad (j \leqslant k^*); \tag{9}$$

при остальных x удобно положить $\underline{M}_p(x) = \infty$. С этими $\underline{M}_p$ формула (5) дает общий вид линейного непрерывного функционала над $S_{\alpha,A}$.

Пространства $S_{\alpha,A}$ понадобятся нам при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Пусть $\alpha_k < 1$ при $k < k^{**}$ и $\alpha_k = 1$ при $k \geqslant k^{**}$. Преобразование Фурье $\psi(s)$ функции $\varphi(x)$ из $S_{\alpha,A}$ есть аналитическая при $|\tau_k| < 1/(A_k e)$ $(k \geqslant k^{**})$ функция, удовлетворяющая при любом $\rho > 0$ неравенствам

$$|s^k \psi(s)| \leqslant C_{k\rho} \exp\left\{\sum_{k < k^{**}} (b_k + \rho_k) |\tau_k|^{\frac{1}{1-\alpha_k}}\right\} \tag{10}$$

для $|\tau_j| < (A_j e)^{-1} - \rho_j$ $(j \geqslant k^{**})$, где $b_k = (1 - \alpha_k) e^{-1} (A_k e)^{\frac{1}{1-\alpha_k}}$.

В п. 3 мы будем доказывать, в частности, что $PW'_{M,a}=W'_{M,a}$ при условии (8) и что $PS'_{\alpha,A}=S'_{\alpha,A}$ при $0\leqslant\alpha\leqslant 1$.

Лестницы Хёрмандера. Последний факт в случае $\alpha=0$ легко доказывается при помощи некоторого контура H_P в C^n, построенного для любого многочлена $P(s)$ Хёрмандером и Тревом. Этот контур в известном смысле эквивалентен вещественному пространству R^n; при этом $|P(s)|>\text{const}>0$ на H_P (см. [7] и [ ], гл. II, § 3). В работе Т. Сироты [8] система таких контуров использована для доказательства того, что если $f\in K'$ (или C^∞) непрерывно зависит от параметра λ, то существует решение $u\in K'$ (соответственно C^∞) уравнения (1), непрерывно зависящее от λ. Нам также понадобится система подобных контуров. Однако их построение придется видоизменить* и уточнить. В п. 3 существенным моментом будет выбор их расположения.

Лемма. Для любого многочлена $Q(s)$ можно построить в C^n контур H, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $c_k<\tau_k<c'_k\,(k=1,\ldots,n)$ на H, где c_k и c'_k — произвольные наперед заданные числа;

2) $|Q(s)|\geqslant C\Pi(c'_k-c_k)^{m_k}$ на H, где положительная константа C и целые числа m_k зависят лишь от Q;

3) если функция $F(s)$ аналитична в области $c_k-\varepsilon\leqslant\tau_k\leqslant c'_k+\varepsilon$ $(k=1,\ldots,n)$, где $\varepsilon>0$, и удовлетворяет в ней условию $|F(s)|(1+\|\sigma\|)^{\delta+n}<C'$, где $\delta>0$, то интеграл $\int\limits_H F(s)Q^{-1}(s)\,d\sigma$ существует, а

$$\int\limits_H F(s)\,d\sigma=\int\limits_{R^n}F(\sigma)\,d\sigma.$$

Такой контур H будем называть лестницей Хёрмандера для $Q(s)$.

Доказательство. Положим $Q_n(s_1,\ldots,s_n)=Q(s)$. Пусть $Q_{n-1}(s_1,\ldots,s_{n-1})$ коэффициент в Q_n при старшей степени s_n, и т. д., Q_0 — коэффициент в $Q_1(s_1)$ при старшей степени s_1. Можно написать

$$Q_1(s_1)=Q_0\cdot(s_1-s_{11})\ldots(s_1-s_{1,m_1})$$

и при $k\geqslant 1$

$$Q_{k+1}(s_1,\ldots,s_{k+1})=Q_k(s_1,\ldots,s_k)\prod_{\nu=1}^{m_{k+1}}[s_{k+1}-s_{k+1,\nu}(s_1,\ldots,s_k)],$$

где $s_{k+1,\nu}$ — корни уравнения $Q_{k+1}=0$ относительно s_{k+1}. Для простоты изложения предположим, что все $m_\nu>0$. Контур H мы определим формулами

$$\tau_1=T_1,\ \tau_2=T_2(\sigma_1),\ldots,\tau_n=T_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-1}),\ -\infty<\sigma<\infty.$$

Здесь T_1 — вещественная константа, которую подберем так, что

$$c_1<T_1<c'_1 \text{ и } |T_1-\tau_{1\nu}|\geqslant(c'_1-c_1)(2m_1+2)^{-1} \text{ при всех } \nu,$$

где $\tau_{1\nu}=\operatorname{Im}s_{1\nu}$; из последнего неравенства вытекает, что

$$|Q_1(s_1)|\geqslant|Q_0|(c'_1-c_1)^{m_1}(2m_1+2)^{-m_1}$$

при $\tau_1=T_1$, $-\infty<\sigma_1<\infty$. Далее последовательно построим функции $T_2,\ldots,T_n$ так, чтобы для всех k

$$c_{k+1}<T_{k+1}<c'_{k+1} \text{ и } |T_{k+1}(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)-\tau_{k+1,\nu}(s_1,\ldots,s_k)|\geqslant$$
$$\geqslant(c'_{k+1}-c_{k+1})(2m_{k+1}+2)^{-1}$$

* Нам нельзя делать преобразование координат, приводящее многочлен к простому виду.

при всех ν (где $\tau_{k+1,\nu} = \operatorname{Im} s_{k+1,\nu}$) для таких точек $(s_1, \ldots, s_k)$, у которых $\tau_j = T_j$ и $-\infty < \sigma_j < \infty$, $j = 1, \ldots, k$. При этом пользуясь тем, что функции $\tau_{k+1,\nu}(s_1,\ldots,s_k)$ непрерывны в точке $(s_1^{(0)},\ldots,s_k^{(0)})$, если $Q_k(s_1^{(0)},\ldots,s_k^{(0)}) \neq \neq 0$, мы сделаем функции T_k ступенчатыми: для построения $T_{k+1}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ разобьем пространство R^k точек $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ на счетное множество k-мерных параллелепипедов Δ_{k1}, Δ_{k2}, ... и всем точкам одного Δ_{kj} сопоставим одно и то же значение T_{k+1}. Каждый Δ_{kj} будет иметь вид $\Delta'_{k-1,j} \times I_\nu$, где $\{\Delta'_{k-1,j}\}$ — разбиение $\{\Delta_{k-1,j}\}$ на более мелкие $(k-1)$-мерные параллелепипеды, а $\{I_\nu'\}$ — разбиение прямой $-\infty < \sigma_k < \infty$ на интервалы. Мы не будем останавливаться на деталях, связанных с применением леммы Гейне—Бореля.

Очевидно, что при таком построении будут выполнены условие 1 и условие 2 с $C = |Q_0| \Pi (2m_\nu + 2)^{-m_\nu}$. Под интегралом $\int\limits_H F(s)\, Q^{-1}(s)\, d\sigma$,

где функция $F(s)$ обладает свойствами, указанными в условии 3, можно понимать повторный интеграл

$$\int\limits_{\tau_1 = T_1} d\sigma_1 \int \ldots \int d\sigma_{n-1} \int\limits_{\tau_n = T_n} F(s)\, Q^{-1}(s)\, d\sigma_n.$$

Остается доказать равенство, указанное в условии 3. Положим

$$G(s_1, \ldots, s_{n-1}) = \int\limits_{\tau_n = T_n} F(s_1, \ldots, s_n)\, d\sigma_n.$$

В силу теоремы Коши эта функция будет равна $\int\limits_{\tau_n = 0} F(s_1, \ldots, s_n)\, d\sigma_n$, откуда видно, что она аналитична при $c_k - \varepsilon/2 \leqslant \tau_k \leqslant c_k' + \varepsilon/2$, $k = 1, \ldots, n-1$. Положив $\|\sigma'\| = \left(\sum\limits_1^{n-1} \sigma_k^2\right)^{1/2}$, будем иметь при этих τ_k

$$|G(s_1, \ldots, s_{n-1})|\,(1 + \|\sigma'\|)^{\delta/2+n-1} \leqslant C' \int \frac{(1 + \|\sigma'\|)^{\delta/2+n-1}}{(1 + \|\sigma\|)^{\delta+n}}\, d\sigma_n \leqslant C''.$$

Теперь можно аналогично спуститься от $n-1$ измерения к $n-2$, и т. д. Лемма доказана.

Разбиение единицы. В п. 3 нам понадобится локально конечное разбиение единицы, которое для определенности удобно построить следующим образом. Возьмем бесконечно дифференцируемую неотрицательную функцию $g(x)$, равную 1 в n-мерном кубе $1 \leqslant x \leqslant 2$ и 0 вне куба $0 \leqslant x \leqslant 3$. Положим $g_l(x) = g(x - l)$, где компоненты вектора l принимают все целочисленные значения. В любой ограниченной области отлично от 0 только конечное число функций $g_l(x)$, а их сумма везде $\geqslant 1$. Положим

$$e_l(x) = g_l(x) \left[\sum_\nu g_\nu(x)\right]^{-1}.$$

Функции $e_l(x)$ бесконечно дифференцируемы, их значения всюду заключены между 0 и 1, и $\Sigma e_l(x) \equiv 1$. Функция $e_l(x)$ равна 0 вне куба $l \leqslant x \leqslant l + 3$; $|\partial^q e_l / \partial x^q| \leqslant C_q$, где C_q не зависит от l.

3. Теорема 1. Пусть функции $M_k(t)$ удовлетворяют условию (8). Тогда $PW'_{M,a} = W'_{M,a}$. Точнее:

I. Пусть функционал $f(x)$ над $W_{M,a}$ действует по формуле (5). Тогда существует решение $u(x)$ уравнения (1) в $W'_{M,a}$, действующее по формуле

$$(u(x),\ \varphi(x)) = \sum \int \underline{M}_{p+1}(x)\, h_q(x) \frac{\partial^q \varphi(x)}{\partial x^q}\, dx, \tag{11}$$

где $h_q(x)$ — ограниченные измеримые функции и сумма распространяется на те q, для которых одновременно $q \leqslant r + n + 2$ и $|q| \leqslant |r| + n + 2$.

II. Пусть $f(x)$ — обычная функция, все производные которой $\partial^q f/\partial x^q$ при $q \leqslant r$, где $r \geqslant 2$, непрерывны и удовлетворяют неравенству

$$\left| \frac{\partial^q f(x)}{\partial x^q} \right| \leqslant C \underline{M}_p(x). \tag{12}$$

Тогда существует решение $u(x)$ уравнения (1), производные которого $\partial^q u/\partial x^q$ при $q \leqslant r-2$ непрерывны и удовлетворяют аналогичному неравенству с новым C и с заменой p на $p+1$. При этом $u(x)$ будет обычным (не обобщенным) решением, если $r - 2 \geqslant m$, где m — порядок уравнения (т. е. m_k — порядок уравнения по x_k).

III. Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, все производные которой удовлетворяют условию (12) с $C = C(q)$. Тогда существует обычное бесконечно дифференцируемое решение $u(x)$ уравнения (1), все производные которого удовлетворяют аналогичному условию с новыми C и с заменой p на $p+1$ и q на $q-2$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что предложение III будет следовать из доказательства предложения II.

Пусть $f(x)$ — функционал над $W_{M,a}$, действующий по формуле (5). Так как интегралы справа в (5) сходятся абсолютно, то можно написать:

$$(f, \varphi) = \sum_{l} \sum_{q \leqslant r} \int \underline{M}_p(x)\, f_q(x)\, e_l(x) \frac{\partial^q \varphi(x)}{\partial x^q}\, dx,$$

где $\{e_l\}$ — разбиение единицы, построенное в п. 2. Подставим сюда

$$\frac{\partial^q \varphi}{\partial x^q} = (2\pi)^{-n} (-i)^{|q|} \int_{R^n} \sigma^q \psi(\sigma)\, e^{-i(x,\sigma)} d\sigma,$$

где $\psi(s)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(x)$. При каждом l интегралы по x и σ можно переставить, что даст

$$(f, \varphi) = \sum_{l} \int_{R^n} G_l(\sigma) \psi(\sigma)\, d\sigma, \tag{13}$$

где

$$G_l(s) = (2\pi)^{-n} \sum_{q} (-i)^{|q|} s^q \int \underline{M}_p(x)\, f_q(x)\, e_l(x)\, e^{-i(x,s)}\, dx. \tag{14}$$

Так как $e_l(x)=0$ вне ограниченной области, то $G_l(s)$ — целая аналитическая функция. Решение уравнения (1) мы построим в форме

$$(u,\varphi)=\sum_{l}\int_{H_l} G_l(s)\overline{P}^{-1}(is)\psi(s)\,d\sigma, \tag{15}$$

где $\{H_l\}$ — система лестниц Хёрмандера для $P(is)$, которую мы вскоре определим.

Функция $G_l(s)$ при $|l_k|=L_k>3$, $|\tau_k|=T_k$ и

$$\operatorname{sign}\tau_k=-\operatorname{sign}(l_k+3/2) \tag{16}$$

удовлетворяет неравенству

$$|G_l(s)|\leqslant C'(1+|s|)^r\prod_1^n \exp\{M_k[a_k(1-p_k^{-1})(L_k+3)]-(L_k-3)T_k\} \tag{17}$$

в общем случае I. В случае II, более того,

$$|G_l(s)|\leqslant C''(1+|s|)^{-r}\prod_1^n \exp\{M_k[a_k(1-p_k^{-1})(L_k+3)]-$$
$$-(L_k-3)T_k\}. \tag{18}$$

Из (6) и (17) следует, что

$$|G_l(s)\psi(s)|\leqslant C_\rho\prod_{k=1}^n(1+|s_k|)^{-2-m_k}\times$$
$$\times\exp[M_k[a_k(1-p_k^{-1})(L_k+3)]-(L_k-3)T_k+\Omega_k[(\rho_k+a_k^{-1})T_k]. \tag{19}$$

Положим

$$a_k'=a_k[1-(p_k+1)^{-1}],\ \rho_k=a_k'^{-1}-a_k^{-1},\ b_k=a_kp_k^{-1}(p_k+1)^{-1}.$$

В силу неравенства выпуклости (2) имеем

$$M_k[a_k(1-p_k^{-1})(L_k+3)]\leqslant M_k[a_k'(L_k+3)]-M_k[b_k(L_k+3)]. \tag{20}$$

В силу неравенства Юнга (7)

$$M_k[a_k'(L_k+3)]-(L_k+3)T_k+\Omega_k[T_ka_k'^{-1}]\geqslant 0, \tag{21}$$

причем равенство достигается для $T_k=a_k'\mu_k[a_k'(L_k+3)]$.

Учитывая это, определим H_l по лемме, потребовав, чтобы на H выполнялись условия (16),

$$a_k'\mu_k[a_k'(L_k+3)]-1\leqslant T_k\leqslant a_k'\mu_k[a_k'(L_k+3)], \tag{22}$$

$$|\overline{P}(is)|\geqslant C^*>0, \tag{23}$$

где C^* не зависит от l; l_k принимают все целочисленные значения.

Заметим еще, что, так как M_k — выпуклая функция, то при достаточно больших L_k

$$L_k-3<3^{-1}M_k[b_k(L_k+3)] \tag{24}$$

и что из (8) для достаточно больших L_k следует неравенство

$$6a_k'\mu_k[a_k'(L_k+3)]<3^{-1}M_k[b_k(L_k+3)]. \tag{25}$$

Из неравенств (19) — (25) вытекает, что при $\alpha \leqslant m$

$$\int\limits_{H_l} | s^{\alpha} G_l (s) \overline{P}^{-1} (is) \psi (s) | d\sigma \leqslant C'_{\rho} \exp\{-3^{-1} M_k [b_k (L_k + 3)]\} \quad (26)$$

для достаточно больших L_k. Увеличив, если нужно, C'_{ρ}, можно добиться, чтобы (26) выполнялось для всех l. Справа в (26) стоит член сходящегося ряда.

Этот мажорирующий ряд годится одновременно для всех ψ, для которых выполняются неравенства (6) с фиксированными константами $C_{q\rho}$ при некоторых определенных q и ρ, то есть для всех φ, у которых $\|\varphi\|_{\nu} \leqslant \text{const}$ при некотором достаточно большом ν. Отсюда заключаем, что (15) — непрерывный линейный функционал над $W_{M,a}$. Далее, так как при преобразовании Фурье $\partial/\partial x$ переходит в умножение на is, то

$$\left(P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \varphi\right) = \left(u, \overline{P}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi\right) = \sum_l \int\limits_{H_l} G_l (s) \psi (s) \, d\sigma = (f, \varphi).$$

Таким образом, (15) — решение уравнения (1) над $W_{M,a}$. Этим доказано, что $PW'_{M,a} \supset W'_{M,a}$. Обратное включение очевидно.

Чтобы доказать утверждение I теоремы 1, представим найденное решение (15) в форме, аналогичной (5). Для этого положим

$$Q_l (s) = \left[\sum_1^n s_k^2 + C(l)\right]^{N(n)} \prod_1^n [i \operatorname{sign} (l_k + 3/2) + s_k]^{r_k}, \quad (27)$$

$$C(l) = \sum_1^n \left\{a'_k \mu_k [a'_k (L_k + 3)] + 1\right\}^2 \text{ и } N(n) = \begin{cases} 1 + n/2, & \text{если } n \text{ четно,} \\ (n+1)/2, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

При $s \in H_l$

$$|Q_l (s)| \geqslant |\|\sigma\|^2 - \|\tau\|^2 + C(l)|^N \prod_1^n [\sigma_k^2 + (\tau_k + 1)^2]^{r_k/2} \geqslant$$

$$\geqslant C_1^* (1 + \|\sigma\|)^{n+1} \prod_1^n (1 + |s_k|)^{r_k}. \quad (28)$$

При каждом l

$$\int\limits_{H_l} G_l (s) \overline{P}^{-1} (is) \psi (s) \, d\sigma = \int\limits_{R^n} F_l (x) Q_l\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi (x) \, dx, \quad (29)$$

где

$$F_l (x) = \int\limits_{H_l} G_l (x) \overline{P}^{-1} (is) Q_l^{-1} (s) e^{i(x,s)} d\sigma. \quad (30)$$

Оценим рост этих функций. В силу (17), (22), (23) и (28), при $|x_k| = X_k$ и достаточно больших $|l_k| = L_k$

$$|F_l (x)| \leqslant C'_1 \prod_1^n \exp\{M_k [a_k (1 - p_k^{-1}) (L_k + 3)] -$$

$$- (L_k - 3) [a'_k \mu_k [a'_k (L_k + 3)] - 1] + X_k a'_k \mu_k [a'_k (L_k + 3)]\}.$$

Снова воспользуемся неравенством (20), равенством (21) с $T_k = a'_k\mu_k[a'_k(L_k+3)]$ и неравенствами (24) и (25). Применив еще неравенство Юнга в форме

$$X_k a'_k \mu_k [a'_k(L_k+3)] \leqslant M_k[a'_k X_k] + \Omega_k\{\mu_k[a'_k(L_k+3)]\},$$

окончательно получим

$$|F_l(x)| \leqslant C'_2 \prod_1^n \exp\{M_k[a'_k x_k] - 3^{-1}M_k[b_k(L_k+3)]\} \tag{31}$$

при всех l, если константа C'_2 достаточно велика. Заметим теперь что при $l\to\infty$ коэффициенты многочлена $Q_l(s)$ растут не быстрее чем

$$C(l)^N \leqslant C_2^* \exp\{6^{-1}\sum_1^n M_k[b_k(L_k+3)]\}. \tag{32}$$

Из (15), (29), (30), (31) и (32) следует, что

$$(u,\varphi) = \sum_q \sum_l \int h_{lq}(x)\frac{\partial^q\varphi(x)}{\partial x^q}\,dx, \tag{33}$$

где

$$|h_{lq}(x)| \leqslant C'_3 \prod_1^n \exp\{M_k[a_k[1-(p_k+1)^{-1}]x_k] - 6^{-1}M_k[b_k(L_k+3)]\} \tag{34}$$

и где* $q \leqslant r+n+2$, $|q| \leqslant |r|+n+2$. Формулы (33) и (34) приводят к утверждению I теоремы 1.

Перейдем к доказательству утверждения II. Для этого вернемся к формуле (15), где теперь, как мы знаем, G_l удовлетворяет оценке (18). При каждом l

$$\int_{H_l} G_l(s)\bar{P}^{-1}(is)\psi(s)\,d\sigma = \int_{R^n}\left\{\int_{H_l} G_l(s)\bar{P}^{-1}(is)e^{i(x,s)}\,d\sigma\right\}\varphi(x)\,dx. \tag{35}$$

Нетрудными выкладками, подобными приведенным выше, можно показать, что на H_l

$$|G_l(s)e^{i(x,s)}| \leqslant C''_1 \prod_1^n (1+|s_k|)^{-r_k}\exp\{M_k[a'_k x_k] - 3^{-1}M_k[b_k(L_k+3)]\}. \tag{36}$$

Отсюда и из (23) выводим, пользуясь функциями $\varphi(x)$ из K, что

$$u(x) = \sum_l \int_{H_l^*} G_l^*(s)P^{-1}(-is)e^{-i(x,s)}\,d\sigma, \tag{37}$$

где $G_l^*(s)$ — целая функция, которая получается из функции $G_l(s)$ заменой коэффициентов Тейлора последней сопряженными числами, а H_l^* — лестница Хёрмандера для $P(-is)$, которая получается из H_l заменой точек $s=\sigma+i\tau\in H_l$ точками $\bar{s}=\sigma-i\tau$. Из (36) и (23) следует, что

$$\int_{H_l^*} |G_l^*(s)P^{-1}(-is)(1+|s|)^{r-2}e^{-i(x,s)}|\,d\sigma \leqslant C''_2 \prod_1^n \exp\{M_k[a'_k x_k] - 3^{-1}M_k[b_k(L_k+3)]\}.$$

---

* Взяв другие многочлены $Q_l(s)$, можно вместо этих двух неравенств получить $q < r+2$.

То, что формула (37) определяет решение уравнения (1) (в смысле обобщенных функций), нам уже известно. Из последнего неравенства видно, что ряд (37) остается сходящимся равномерно по x (в ограниченной области) после почленного дифференцирования $q_j \leqslant r_j - 2$ раза по x_j ($i = 1, \ldots, n$). Отсюда получаем, что функция $u(x)$ обладает соответствующими производными, удовлетворяющими нужным неравенствам. Наконец, при $r - 2 \geqslant m$ непосредственно проверяется, что формула (37) дает обычное решение уравнения (1). Этим заканчивается доказательство утверждения II, а тем самым и теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Тогда $PS'_{\alpha,A} = S'_{\alpha,A}$.

Проводить доказательство подробно мы не будем, так как оно мало отличается от доказательства теоремы 1. Меняется, конечно в общем случае), расположение лестниц Хёрмандера H_l. Пределы (для τ_k на H_l при $k^* < k < k^{**}$ выбираются по существу так же, как в доказательстве теоремы 1*, при $k \leqslant k^*$ они произвольно фиксируются (одинаковыми для всех l_k), а при $k \geqslant k^{**}$ выделяются неравенством

$$(A_k e)^{-1} [1 - (p_k + 1/2)^{-1}] \leqslant |\tau_k| \leqslant (A_k e)^{-1} [1 - (p_k + 1)^{-1}]$$

в сочетании с условием (16). Если, в частности, все α_k равны 0, то требуется только одна лестница Хёрмандера; мы уже говорили об этом выше.

Замечание 1. Как нетрудно проверить, из приведенных рассуждений вытекает следующее. Пусть выполнены предположения утверждения I теоремы 1. Если функции $f_q(x)$ в формуле (5) непрерывно зависят от параметра λ, то в формуле (11) функции $h_q(x)$ также непрерывно зависят от λ. При этом непрерывность мы понимаем в следующем смысле:

$$\sup_{\lambda \to \lambda_0} | f(x;\lambda) - f(x;\lambda_0) | \to 0.$$

Аналогичные замечания можно сделать к другим утверждениям теорем 1 и 2 (ср. [8]).

Замечание 2. Развитый выше метод позволяет перечислить все решения уравнения (1) в рассмотренных классах функций.

Например, пусть $f \in W'_{M,a}$. Функционал f можно разными способами реализовать в виде

$$(f,\varphi) = \sum_l \sum_{q \leqslant r} \int \underline{M}_p(x)\, g_{lq}(x) \frac{\partial^q \varphi(x)}{\partial x^q}\, dx, \tag{38}$$

где $|g_{lq}(x)| \leqslant \text{const}$ и $g_{lq}(x) \equiv 0$ вне куба $l \leqslant x \leqslant l + 3$. Положим

$$G_l(s) = (2\pi)^{-n} \sum_q (-i)^{|q|} s^q \int \underline{M}_p(x)\, g_{lq}(x)\, e^{-i(x,s)}\, dx. \tag{39}$$

---

* В (22) $a'_k \mu_k [a'_k (L_k + 3)]$ заменяется на $(L+3)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} e^{-1} A^{-\frac{1}{\alpha}}$.

Просматривая доказательство теоремы 1, мы убеждаемся, что с этими G_l формула (15) дает решение уравнения (1).

С другой стороны, пусть $u(x)$ — любое решение уравнения (1) в $W'_{M,a}$. Мы можем реализовать $u(x)$ в форме, аналогичной (38):

$$(u, \varphi) = \sum_l \sum_{q \leqslant r''} \int M_{p'}(x)\, h_{lq}(x)\, \frac{\partial^q \varphi(x)}{\partial x^q}\, dx,$$

где $|h_{lq}(x)| \leqslant \mathrm{const}$ и $h_{lq}(x) \equiv 0$ вне куба $l \leqslant x \leqslant l+3$. Пусть

$$U_l(s) = (2\pi)^{-n} \sum_q (-i)^{|q|} s^q \int M_{p'}(x)\, h_{lq}(x)\, e^{-i(x,s)}\, dx.$$

Тогда (u, φ) можно записать в форме (15) с $G_l(s) \equiv U_l(s)\bar{P}(is)$ и произвольно расположенными H_l (например, $H_l = R^n$). Нетрудно видеть, что эти $G_l(s)$ можно переписать в форме (39), где функции $g_{lq}(x)$ дают реализацию функционала f по формуле (38).

Таким образом, формулы (38), (39) и (15) описывают общее решение уравнения (1) в $W'_{M,a}$.

Обозначим через W класс всех функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям предложения III теоремы 1; при этом функции $p = p(q)$ и $C = C(q)$ не фиксируются. Пусть $f(x) \in W$. Далее, пусть $\{g_l(x)\}$ — произвольный набор функций из W, такой, что: 1) $f(x) \equiv \Sigma g_l(x)$; 2) $g_l(x) \equiv 0$ вне куба $l \leqslant x \leqslant l+3$; 3) $g_l(x)$ удовлетворяют условию (12) с $C(q)$, и $p(q)$, не зависящими от l. Пусть $G_l^*(s)$ — преобразование Фурье функции $g_l(x)$, деленное на $(2\pi)^n$. Тогда формула (37) дает решение уравнения (1) в W. И обратно, каждое решение уравнения (1) в W имеет такой вид.

В близкой форме можно описать все решения уравнения (1) в других классах, например, в K' или в C^∞. При этом, видоизменив способ построения лестниц Хёрмандера, можно освободить конструкцию в [8] от преобразований координат.

Настоящая работа выполнена под руководством профессора Г. Е. Шилова. Пользуюсь случаем, чтобы выразить ему свою глубокую благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. Физматгиз, М., 1958.
2. Ehrenpreis L. Amer. Journ. Math., **78**, № 4, 685—715, 1956.
3. Ehrenpreis L. Amer. Journ. Math., **76**, № 4, 883—903, 1954.
4. Malgrange B. Ann. de l'Inst. Fourier, 6, 271—355, 1956.
5. Хёрмандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. М., ИЛ, 1959.
6. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. Физматгиз, М., 1958.
7. Trèves F. C. r. **242**, № 10, 1250—1252, 1956.
8. Shirota T. Proc. Japan Acad., 32, № 6, 401—405, 1956.
9. Hörmander L. Arkiv för Mat., 3, № 6, 555—568, 1958.
10. Lojasiewicz S. Studia Math., 18, № 1, 87—136, 1959.

Поступила в редакцию
21.1 1959 г.

Кафедра теории функций
и функционального анализа