Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3—1959

ПАВЕЛ ДРАЖИЛА

О КОНГРУЭНЦИЯХ, ФОКАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КОТОРЫХ ПРОЕКТИВНО НАЛАГАЮТСЯ

§ 1

В работе [1] С. Фиников изучал прямолинейные конгруэнции, две полости фокальной поверхности которых проективно наложимы. Он определил конгруэнции, обладающие этим свойством, и показал, что они необходимо будут конгруэнциями W, а их фокальные поверхности — поверхностями R. Известно, что эти поверхности — отрицательной кривизны, следовательно, обладают действительными асимптотическими линиями. Интересная проблема, поставленная автором работы [1], решена только частично, и существует еще другой обширный класс прямолинейных конгруэнций, которые мы будем называть конгруэнциями $\overline{W}$, с проективно наложимыми фокальными поверхностями. Соответствующие фокальные поверхности, которые называем поверхностями $\overline{R}$, всюду положительной кривизны и имеют изотропные асимптотические линии. Здесь уместно отметить, что конфигурация, образованная конгруэнцией $\overline{W}$ с ее фокальными поверхностями, представляет аналогию с асимптотическим преобразованием поверхностей постоянной положительной кривизны, которое рассматривал Бианки.

Мы примем, чтобы облегчить чтение, метод и обозначения С. Финикова.

§ 2

Для изучения прямолинейных конгруэнций с проективно наложимыми фокальными поверхностями С. Фиников использует подвижный тетраэдр T (X_1, X_2, X_3, X_4), где две вершины X_1 и X_2 лежат в фокусах, а две другие X_3 и X_4 — в произвольных точках двух фокальных плоскостей.

Пусть $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ — развертывающиеся поверхности расматриваемой конгруэнции и вершины X_3 и X_4 совпадают с точками $(X_1)_v$ и $(X_2)_u$. Тогда тетраэдр будет определяться системой

$$
\begin{aligned}
&X_{1u}=\delta X_2, && X_{1v}=X_3,\\
&X_{2u}=X_4, && X_{2v}=\delta_1 X_1, \qquad\qquad \text{(I)}\\
&X_{3u}=\delta\delta_1 X_1+\delta_v X_2, && X_{3v}=RX_1+NX_2-PX_3-\Delta X_4\\
&X_{4u}=N_1X_1+R_1X_2-\Delta X_3-P_1X_4, && X_{4v}=\delta_u X_1+\delta\delta_1 X_2
\end{aligned}
$$

с условием интегрируемости

$$
\begin{gathered}
P_u=P_{1v}=\Delta\Delta_1-\delta\delta_1,\\
\Delta_u=P_1\Delta+N_1\ \ \Delta_v=P\Delta_1+N_1,\\
\delta_{vv}-N_4+P\delta_v=R\delta-R_1\Delta_1,\ \delta_{1uu}-N_{1v}+P_1\delta_{1u}=R_1\delta_1-R\Delta_1,\\
R_u=\Delta N_1+P\delta\delta_1+R\delta_1\delta_v+\delta\delta_{1v},\ R_{1v}=\Delta_1 N+P_1\delta\delta_1+2\delta\delta_{1u}+\delta_1\delta_u.
\end{gathered}
$$

§ 3

Подходящее проективное преобразование переводит начальный тетраэдр (X_1, X_2, X_3, X_4) в новое положение (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) так, что точка (Y_3) и точки, инфинитезимально близкие 2-го порядка, совпадают с точкой (X_1) и соответствующими инфинитезимально близкими точками. В этом случае имеем уравнение

$$Y_2+dY_2+\frac{1}{2}d^2Y^2t+\ldots=\left(\lambda+d\lambda+\frac{1}{2}d^2\lambda t+\ldots\right)\left(X_1+dX_1+\frac{1}{2}d^2X_1t+\ldots\right),$$

которое должно удовлетворяться до бесконечно малых второго порядка включительно. Выполняя подстановки и необходимые выкладки, окончательно получаем:

$$\Delta\Delta_1-\delta\delta_1=0,\ \delta\delta_1{}^2\Delta=V_1,\ \delta^2\delta_1\Delta_1=U_1$$

(U_1 и V_1 соответственно произвольные функции одного аргумента u или v), которые дают необходимые и достаточные условия проективной наложимости двух фокальных полостей (X_1) и (X_2).

Вводя новые параметры u^*, v^* и функции U, V, С. Фиников предполагает

$$U_1=1,\ V_1=1 \tag{1}$$

и, таким образом, получает уравнение:

$$\Delta\Delta_1-\delta\delta_1=0,\ \delta\delta^2\Delta=1,\ \delta^2\delta_1\Delta_1=1, \tag{2}$$

откуда он выводит

$$\Delta=\delta=\frac{1}{\delta_1}=\frac{1}{\Delta_1}. \tag{3}$$

Однако он не замечает, что он не исчерпал все возможные случаи. Действительно, легко видеть, что можно принять

$$U_1=-1,\ V_1=-1 \tag{1'}$$

и тогда уравнения (2) примут вид:

$$\Delta\Delta_1-\delta\delta_1=0,\ \delta\delta_1\Delta^2=-1,\ \delta^2\delta_1\Delta_1=-1, \tag{2'}$$

откуда следует

$$\Delta=-\delta=-\frac{1}{\delta_1}=\frac{1}{\Delta_1}. \tag{3'}$$

§ 4

Асимптотические линии поверхности (X_1) определяются уравнением,

$$| X_1, \ X_{1u}, \ X_{1v}, \ d^2X_1 | = 0,$$

которое, принимая во внимание систему (I), принимает вид:

$$| X_1, \ X_2, \ X_3, \ d^2X_1 | = 0$$

и, наконец,

$$\delta du^2 - \Delta dv^2 = 0.$$

Для второй фокальной полости (X_2) находим то же самое уравнение.

Отсюда видно, что конгруэнции, фокальные полости которых проективно наложимы, делятся на две категории: одни, для которых удовлетворяются уравнения (1), (2), (3) с асимптотическими, определяемыми уравнением

$$du^2 - dv^2 = 0$$

и другие, для которых удовлетворены уравнения (1′), (2′), (3′), и асимптотические, определяются посредством уравнения

$$du^2 + dv^2 = 0 .$$

Конгруэнции первой категории будут конгруэнциями W с фокальными полостями в виде поверхностей R, в то время как вторая категория содержит конгруэнции $\overline{W}$ с фокальными поверхностями $\overline{R}$.

Конгруэнции $\overline{W}$ обладают интересными свойствами, отчасти сходными с конгруэнциями W: они встречаются во многих проблемах наряду с конгруэнциями W. Было бы интересно поискать, не найдется ли среди этих конгруэнций таких, которые образуют дважды расслояемые пары.

ЛИТЕРАТУРА

1. Finikoff S. Bull. Soc. Math., 56, 1932.

Поступила в редакцию
23.9 1958 г.

Румыния