Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3—1959

# МЕХАНИКА

Н. Н. ПОПОВ

## НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАЗА С ПОДВОДОМ ТЕПЛА В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Изучение одномерных неустановившихся движений газа в основном ограничивается адиабатическим и автомодельным случаями. Неадиабатическое движение (когда к газу подводится тепло) в приложении к задачам баллистики рассматривалось К. П. Станюковичем [1] в предположении, что после прохождения по газу отраженной волны разрежения давление в газе выравнивается и можно учитывать только зависимость давления от времени. К. П. Станюкович получил точное решение уравнений движения газа с подводом тепла для случая, когда $p=p(t)$.

Если надо учесть зависимость давления также и от координаты, единственным методом решения остается численный метод характеристик, однако практическое его использование ограничено большим объемом вычислений. Это заставляет искать способы приближенного решения задачи, удобные для практического использования.

В настоящей работе решение уравнений движения газа для случая, когда $p=p(t)$, обобщается на движение газа в канале со слабо меняющимся сечением. Уравнения линеаризируются около этого решения в предположении, что искомое решение может быть представлено как сумма решения, для которого $p=p(t)$, и малых добавок, зависящих от координаты и времени. Полученные уравнения для добавок в некоторых случаях могут быть решены.

Наши решения применимы к неустановившемуся одномерному движению газа с подводом или отводом тепла при широком классе начальных условий и требовании, чтобы скорость газа на границе была близка к постоянной или могла быть аппроксимирована конечным числом «ступеней» так, что на каждом участке отклонение истинной скорости от постоянной было бы невелико.

Скорость границы может рассматриваться как заданная или определяться из условий задачи.

Неустановившееся движение газа в канале с плавно изменяющимся сечением $F(x)$ описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u\rho}{F}\frac{dF}{dx}=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+\varkappa p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{F}\frac{dF}{dx}\right)=(\varkappa-1)\rho\frac{dQ}{dt}.$$

Третье уравнение системы (1) получается из первого закона термодинамики и учитывает подвод тепла к газу. Функция $Q=Q(t)$ (закон подвода тепла) рассматривается как заданная функция только времени.

Вводя функцию энтропии $\Phi=p/\rho^{\varkappa}$, которая связана с $Q(t)$ соотношением

$$\Phi=\Phi_0 e^{\varkappa(\varkappa-1)\int a^{-2}\frac{dQ}{dt}dt}, \qquad (2)$$

и переходя к скорости звука $a$, легко представить систему (1) в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2a}{\varkappa-1}\frac{\partial a}{\partial x}=a^2\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t a^2\frac{dQ}{dt}dt,$$

$$\frac{\partial a}{\partial t}+u\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\varkappa-1}{2}a\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\varkappa-1}{2}au\frac{1}{F}\frac{dF}{dx}=\frac{(\varkappa-1)\varkappa}{2a}\times\frac{dQ}{dt}. \qquad (3)$$

Будем искать решение системы (1) в предположении, что давление зависит только от времени

$$p=p(t). \qquad (4)$$

Поскольку закон выделения тепла также зависит только от времени, то очевидно, что и

$$\rho=\rho(t). \qquad (5)$$

Частное решение первого уравнения системы

$$u=\frac{x+b}{t+\tau}=u_1, \qquad (6)$$

где $b$ и $\tau$ константы.

Вставляя (6) во второе уравнение системы (1) и использовав (5), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\rho}{\beta}+\frac{x+b}{\beta}\rho\frac{dF}{dx}\frac{1}{F}=0, \qquad (7)$$

$$\beta=t+\tau.$$

Чтобы плотность действительно не зависела от $x$, необходимо выполнение условия:

$$\frac{x+b}{F}\frac{dF}{dx}=\alpha=\text{const},$$

откуда получаем закон изменения сечения канала:

$$F=F_0(x+b)^{\alpha}. \qquad (8)$$

Решаем (7)

$$\rho=\frac{D}{\beta^{\gamma}}\;D=\rho_0\tau^{\gamma},\;\gamma=1+\alpha. \qquad (9)$$

Вставляя (6) и (9) в третье уравнение системы (1) и использовав (4), получим решение

$$p(t) = \beta^{-\gamma\eta}\left[B + (\eta - 1) D \int_0^t \beta^{\gamma(\varkappa-1)} \frac{dQ}{dt}\right], \tag{10}$$

$$B = p_0 \tau^{\gamma\varkappa}.$$

Из (10) и (9) получим выражение для скорости звука

$$a^2(t) = \frac{\varkappa p}{\rho} = a_0^2 \beta^{-\gamma(\varkappa-1)}\left[\tau^{\gamma(\varkappa-1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{a_0^2}\int_0^t \beta^{\gamma(\varkappa-1)} \frac{dQ}{dt}\, dt\right] = a_0^2 \varphi = a_1^2. \tag{11}$$

Полученное точное решение системы (1) соответствует движению с прямолинейными линиями тока и определенной начальной скоростью:

$$u_0 = \frac{x_0 + b}{\tau};\ u_0(l) = \frac{l + b}{\tau};\ u_0(-l) = \frac{-l + b}{\tau}; \tag{12}$$

$2l$ — начальная длина зоны движения.

Если обозначить скорость левой границы через $u_л$ и правой — через $u_п$, то из (12) следует, что

$$\tau = \frac{2l}{u_п - u_л}. \tag{13}$$

Примем полученное точное решение нелинейной системы (1) за первое приближение и будем линеаризовать около него систему (3) положив

$$\begin{gathered} u = u_1 + u_2(x, t), \\ a = a_1 + a_2(x, t), \\ a_1 = a_0\sqrt{\varphi}, \end{gathered} \tag{14}$$

где $u_2$ и $a_2$ малы.

Вставив (14) и (3) и отбросив члены, содержащие произведения малых величин, получим линейную систему относительно добавок

$$V = \frac{u_2}{a_0},\ A = \frac{a_2}{a_0},\ q = \frac{Q}{a_0^2},\quad \frac{\partial V}{\partial t} + u_1 \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{2a_1}{\eta - 1}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{V}{\beta} = 0,$$

$$K = \frac{\sqrt{\varphi}}{\beta},\quad 2\varepsilon = \gamma(\varkappa - 1), \tag{15}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + u_1 \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\varkappa - 1}{2} a_1 \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{A}{\beta}\left[2\varepsilon + \frac{1}{K}\,\frac{d(\sqrt{\varphi})}{dt}\right] +$$

$$+ \frac{\varkappa - 1}{2}\alpha K a_0 \frac{V}{u_1} = \frac{(\varkappa - 1)\varkappa}{2\sqrt{\varphi}}\frac{dq}{dt} - \frac{d\sqrt{\varphi}}{dt} - \varepsilon K.$$

Характеристики системы (15)

$$\frac{dx}{dt} = u_1 \pm a_0\sqrt{\varphi}. \tag{16}$$

Интегрируя (16), получим

$$c_{12} = u_1 \pm a_0 \int_0^t \frac{\sqrt{\varphi}}{\beta}\, dt = n_1 \pm a_0 \int_0^t K dt. \tag{17}$$

Исключив из (15) $A$, придем к одному уравнению второго порядка:

$$\frac{\partial^2 V}{dt^2}+2u_1\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial x}+(u_1^2-a_1^2)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{2\varepsilon+2}{\beta}\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{u_1}{\beta}\Big[2\varepsilon+$$

$$+2-\frac{\alpha a_1^2}{u_1^2}\Big]\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{\beta^2}\left[2\varepsilon+\frac{\alpha a_1^2}{u_1^2}\right]=0. \tag{18}$$

Введем новые безразмерные переменные

$$\xi=\frac{u_1}{a_0},\qquad \eta=\int\limits_0^t K dt. \tag{19}$$

Тогда (18) примет вид:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}+\frac{\partial V}{\partial\eta}\left[\frac{d(\sqrt{\varphi})}{dt}+K(2\varepsilon+1)\right]\frac{1}{K^2\beta}-\frac{\alpha}{\xi}\frac{dV}{\partial\xi}+$$

$$+\frac{V}{K^2}\left[\frac{2\varepsilon}{\beta^2}+\frac{\alpha K^2}{\xi^2}\right]=0. \tag{20}$$

Будем искать решение этого уравнения методом разделения переменных. Пусть

$$V=X(\xi)\,Y(\eta). \tag{21}$$

Вставляя в (20), разделив на $XY$ и сгруппировав члены, получим два обыкновенных уравнения:

$$\frac{Y''}{Y}+\frac{Y'}{YK^2\beta}\left[\frac{d(\sqrt{\varphi})}{dt}+K(2\varepsilon+1)\right]+\frac{2\varepsilon}{K^2\beta^2}+\omega^2=0, \tag{22}$$

$$\frac{X''}{X}+\frac{\alpha}{\xi}\frac{X'}{X}-\frac{\alpha}{\xi^2}+\omega^2=0. \tag{23}$$

Решение уравнения (23) при $\omega^2\neq 0$ выражается через функции Бесселя:

$$X(\xi,\omega)=\xi^{\frac{1-\alpha}{2}}Z_\nu(\omega\xi),\ \nu=\frac{\gamma}{2}; \tag{24}$$

в частности, при $\alpha=0$: $X(\xi,\omega)=A\cos\omega\xi+B\sin\omega\xi$.

При $\omega^2=0$ решение уравнения (23) будет:

$$X_0(\xi,0)=C_1\xi^\alpha+C_2\xi, \tag{24'}$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные константы.

Для решения уравнения (22) необходимо выразить входящие в него функции $\varphi$, $\beta$ и $K$ через $\eta$, для чего нужно из (19) выразить $t=t(\eta)$. Имеем:

$$\eta=\int\limits_0^t K dt=\int\limits_0^t\beta^{-\varepsilon-1}\left[\tau^{2\varepsilon}+\varkappa(\varkappa-1)\int\limits_0^t\beta^{2\varepsilon}\frac{dq}{dt}\right]^{1/2}dt. \tag{25}$$

В настоящей статье ограничимся рассмотрением случая, когда деляется выбором зависимости $q=q(t)$.

В настоящей статье ограничимся рассмотрением случая, когда

$$q=\frac{q_n}{[(\sigma+\tau)^n-\tau^n]}(\beta^n-\tau^n), \tag{26}$$

$q_n$ — полное количество подводимого тепла, $\sigma$ — время выделения тепла.

Вставляя (26) в (25) и производя интегрирование, получим

$$\eta = \int \beta^{-\varepsilon-1}\tau^{2\varepsilon}\left[1 - \frac{\varkappa \cdot n(\varkappa-1)q_n}{(\mu^{-1}-1)(2\varepsilon+n)} + \frac{\varkappa \cdot n(\varkappa-1)q_n}{(\mu^{-1}-1)(2\varepsilon+n)}\mu^{-2\varepsilon-n}\right], \tag{27}$$

$$\mu = \frac{\tau}{\beta}.$$

Интеграл может быть взят в следующих случаях:

1. Когда величина показателя $n$ удовлетворяет условию

$$n = -\frac{2\varepsilon(j+1)}{j} \tag{28}$$

($j$ — целое число).

2. Величина $q_n$ выбрана так, что

$$1 - \frac{\varkappa \cdot n(\varkappa-1)q_n}{(\mu^{-1}-1)(2\varepsilon+n)} = 0.$$

Откуда

$$q_n = \frac{2\varepsilon+n}{2\varepsilon \cdot n}\left[\left(\frac{\sigma+\tau}{\tau}\right)^n - 1\right]. \tag{29}$$

Из (27) получаем:

$$\eta = \frac{2}{n}\left[\mu^{-\frac{n}{2}} - 1\right], \quad K = \frac{\sqrt{\varphi}}{\beta} = \beta^{-1}\mu^{-\frac{n}{2}}. \tag{30}$$

Напомним, что $t$ изменяется в пределах $0 \leqslant t \leqslant \sigma$ и соответственно $\eta$ в пределах:

$$0 \leqslant \eta \leqslant \frac{2}{n}\left[\left(\frac{\sigma+\tau}{\tau}\right)^{n/2} - 1\right].$$

При $t > \sigma$ выделение тепла прекращается, и мы приходим к третьему случаю.

Подвод тепла отсутствует (адиабатическое движение $q \equiv 0$).

Тогда

$$\eta = \frac{1}{\varepsilon}\left[1 - \mu^{\varepsilon}\right], \quad K = \frac{1}{\tau}\mu^{\varepsilon+1}. \tag{31}$$

Время изменяется в пределах $0 \leqslant t \leqslant \infty$ и соответственно $\eta$ в пределах: $0 \leqslant \eta \leqslant 1/\varepsilon$.

Во всех рассмотренных случаях можно выразить $t$ через $\eta$ и вставить в (22). Решив (22) и (23), получим $V$. Константы, входящие в уравнение, определяются из начальных и граничных условий.

Для определения $A(\xi,\eta)$ воспользуемся вторым уравнением системы (15), которое после замены переменных примет вид

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} + \frac{A}{\beta K}\left[2\varepsilon + \frac{1}{K}\frac{d(\sqrt{\varphi})}{dt}\right] = \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{2K\sqrt{\varphi}}\frac{dq}{dt} -$$

$$-\frac{1}{K}\frac{d(\sqrt{\varphi})}{dt} - \varepsilon - \frac{\eta-1}{2}\left[\frac{dV}{\partial\xi} + \alpha\frac{V}{\xi}\right]. \tag{32}$$

Решив это уравнение, найдем: $A = A(\xi,\eta)$.

Вставив найденные $A$ и $V$ в (14), получим решение задачи.

Для определения давления воспользуемся формулой

$$\frac{p_1}{p_2}=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}, \tag{33}$$

выражающей давление через скорость звука и функцию энтропии.

Из (33) получим

$$p(\xi,\eta)=p_0(\sqrt{\varphi}+A(\xi,\eta))^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}\left(\frac{\Phi_0}{\Phi}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}\approx$$

$$\approx p_0(\sqrt{\varphi})^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}\left(\frac{\Phi_0}{\Phi}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\varphi}}A(\xi,\eta)\right). \tag{34}$$

Рассмотрим подробнее перечисленные выше случаи. В случае 1 налагаются условия на величину показателя $n$, но не ограничивается выбор $q_n$. При подводе тепла предлагаемый метод применим для суживающихся каналов и представляет интерес при решении конкретных задач о движении горящего газа в соплах, направляющих аппаратах и т. д.

В случае 2 допускается любое значение $n$, но накладывается ограничение на $q_n$. Ограничение это, однако, не является жестким, так как $q_n$ связано с $\tau$, а в $\tau$ входит конструктивный параметр $l$ (длина зоны движения), который может изменяться в широких пределах. Поэтому практически второй случай охватывает широкий класс задач.

Найдем решение для этого случая, для чего выразим входящие в (22) выражения через $\eta$. После простых преобразований придем к уравнению

$$\delta_1^2\frac{d^2Y}{d\delta_1^2}+\delta_1\frac{dY}{d\delta_1^2}\left[1+\frac{4\varepsilon+2}{n}\right]+\left[\frac{8\varepsilon}{n^2}+\frac{4\omega^2}{n^2}\delta_1^2\right]Y=0. \tag{35}$$

$$\delta_1=\frac{n}{2}\eta-1.$$

Решение этого уравнения при $\omega^2\neq 0$ выражается через функции Бесселя:

$$Y_1(\eta,\omega)=\delta_1^{-\frac{2\varepsilon+1}{n}}Z_\nu\left(\frac{2\omega}{n}\delta_1\right),\quad \nu_1=\pm\frac{1}{n}[2\varepsilon-1]. \tag{36}$$

При $\omega=0$ решение будет:

$$Y_{01}(\eta)=C_3\delta_1^{-\frac{2}{n}}+C_4\delta_1^{-\frac{4\varepsilon}{n}}. \tag{37}$$

Уравнение (32), определяющее $A$, примет вид

$$\frac{\partial A}{\partial\delta_1}+\frac{A}{\delta_1}\left[\frac{4\varepsilon}{n}+1\right]=-\frac{\varkappa-1}{n}Y(\delta_1)\left[\frac{dX(\xi)}{d\xi}+\frac{\alpha X(\xi)}{\xi}\right]. \tag{38}$$

Решение (38):

$$A(\xi,\eta)=\delta_1^{-\frac{4\varepsilon}{n}-1}\left\{\psi(\xi)-\frac{\eta-1}{2\omega}\left[\frac{dX(\xi)}{d\xi}+\frac{\alpha X(\xi)}{\xi}\right]\delta_1^{\nu_1+1}\times\right.$$

$$\left.\times Z_{\nu+1}\left(\frac{2\omega}{n}\delta_1\right)\right\}. \tag{39}$$

Здесь $\psi(\xi)$ — произвольная функция. Формула (34), определяющая давление, примет вид:

$$p(\xi,\eta)=[\delta_1+A(\xi,\eta)]^{\frac{2\varepsilon+\gamma}{\varepsilon}}\delta_1^{-\frac{\gamma}{\varepsilon n}(2\varepsilon+n)}p_0. \tag{40}$$

Приведенное решение справедливо при $t\leqslant\sigma$.

При $t>\sigma$ подвод тепла заканчивается и необходимо перейти к решению, соответствующему адиабатическому движению $Q=0$.

Уравнение (22) примет вид:

$$\delta_2^2 \frac{d^2Y}{d\delta_2^2} - \delta_2 \frac{dY}{d\delta_2} \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon} + \left(\frac{2}{\varepsilon} + \frac{\omega^2}{\varepsilon^2}\delta_2^2\right) Y = 0, \qquad (41)$$

$$\delta_2 = 1 - \varepsilon\eta.$$

Решение:

$$\text{при } \omega \neq 0 \quad Y_2(\delta_2) = \delta_2^{\nu_2+2} Z_{\nu_2}\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\delta_2\right), \qquad (42)$$

$$\nu_2 = \pm\left|\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right|;$$

$$\text{при } \omega = 0 \quad Y_{02}(\eta) = C_5\delta^{1/\varepsilon} + C_6\delta_2^2. \qquad (43)$$

Уравнение (32) примет вид:

$$\frac{\partial A}{\partial\delta_2} - \frac{A}{\delta_2} = \frac{\varkappa-1}{2\varepsilon} Y(\delta_2)\left[\frac{dX(\xi)}{d\xi} + \frac{\alpha X(\xi)}{\xi}\right]. \qquad (44)$$

Его решение:

$$A(\xi\eta) = \delta_2\left\{\psi(\xi) + \frac{\varkappa-1}{2\omega}\left[\frac{dX}{d\xi} + \frac{\alpha X}{\xi}\right]\times \right.$$

$$\left. \times\delta_2^{\nu_2+1} Z_{\nu_2+1}\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\delta_2\right)\right\}. \qquad (45)$$

Формула для определения давления будет:

$$p(\xi, \eta) = [\delta_2 + A(\xi,\eta)]^{\frac{2\varepsilon+\gamma}{2}} p_0. \qquad (46)$$

Линеаризация уравнений не вносит заметных ошибок в решение, если величины $V$ и $A$ малы. Это условие всегда будет выполняться, если действительные начальные и граничные условия мало отличаются от (12). Если во всем интервале изменения $t$ этого сделать не удается, область движения надо разбить на ряд интервалов.

Итак, мы получили приближенное решение системы (1) или эквивалентной ей системы (3) в виде суммы двух решений: точного частного решения нелинейной системы, для которого скорость газа зависит от координаты линейно, а скорость звука зависит только от времени, и точного решения линеаризированной системы, описывающего колебания газа.

Выпишем эти решения:

1. Движение с подводом тепла по закону ($n$ — любое):

$$Q = a_0^2 \frac{2\varepsilon+n}{\varkappa(\varkappa-1)\,n}\left[\left(\frac{t+\tau}{\tau}\right)^n - 1\right], \qquad (47)$$

$$u(\xi, t) = \xi + X_0(\xi) Y_{01}(\delta_1) + \sum_i X_i(\xi, \omega_i)\, Y_{1i}(\delta_1, \omega_i), \qquad (48)$$

$$a(\xi, t) = \delta_1\left\{1 + \frac{\varkappa-1}{2\delta_1^{2(\nu_1+1+1/n)}}\left[\psi(\xi) - \frac{2}{n}\left(\frac{dX_0}{d\xi} + \frac{\alpha}{\xi}X_0\right)\times\right.\right.$$

$$\times\left(\frac{C_5 n\delta_1^{2(\nu_1+1)}}{2(\nu_1+1)} + \frac{C_6}{2}\delta_1^2\right) - \delta_1^{\nu_1+1}\sum_i \frac{1}{\omega_i}\left(\frac{dX_i}{d\xi} + \right. \qquad (49)$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\alpha}{\xi}X_i\right) Z_{\nu_1+1}\left(\frac{2\omega_i}{n}\delta_1\right)\right]\right\},$$

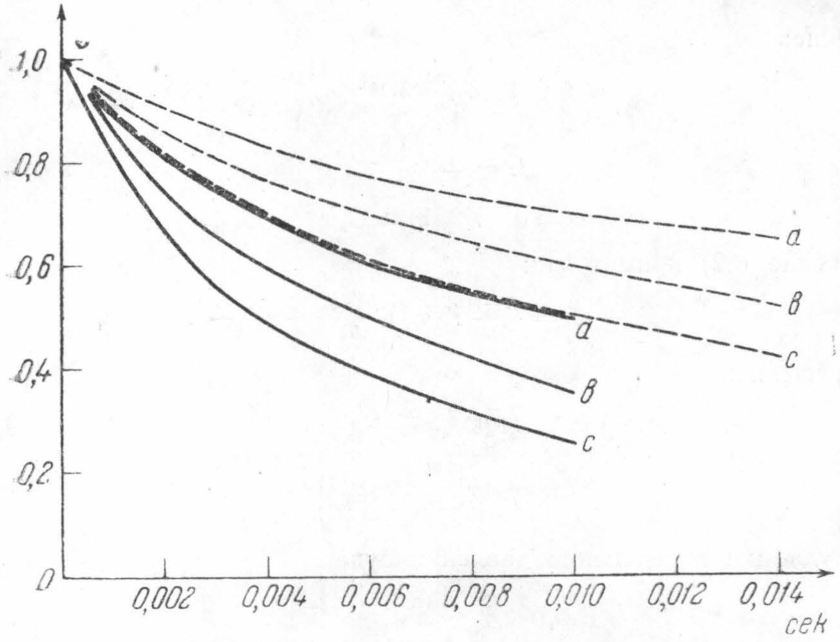
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,002
0,004
0,006
0,008
0,010
0,012
0,014
сек
а
в
с
а
в
с

Рис. 1


1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,002
0,004
0,006
0,008
0,010
0,012
сек
а
в
с
с
в
а

Рис. 2

$$p(\xi,t) = p_0 a(\xi,t)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}} \delta_1^{-2\left(\frac{\gamma}{n}+\frac{1}{\varkappa-1}\right)}, \qquad (50)$$

где $\xi = \dfrac{x+b}{a_0(t+\tau)}$; $\quad \delta_1 = \left(\dfrac{t+\tau}{\tau}\right)^{n/2}$; $\nu_1 = \dfrac{1}{n}\left[\gamma(\varkappa-1)-1\right]$

(остальные обозначения в тексте).

2. Адиабатическое движение:

$$u(\xi, t) = \xi + X_0(\xi) Y_{02}(\delta_2) + \sum_i X_i(\xi\omega_i) Y_{2i}(\delta_2, \omega_i), \qquad (51)$$

$$a(\xi, t) = \delta_2 \left\{1 + \psi(\xi) + \frac{\varkappa-1}{2}\left(\frac{dX_0}{d\xi} + \frac{\alpha}{\xi} X_0\right) \times \right.$$

$$\times \left(C_3 \delta_2^{1/\varepsilon} + \frac{C_4}{2\varepsilon}\delta_2^2\right) + \delta_2^{\nu_2+1} \sum_i \frac{\varkappa-1}{2\omega_i}\left(\frac{dX_i}{d\xi} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{\xi} X_i\right) Z_{\nu_2+1}\left(\frac{\omega_i}{\varepsilon}\delta_2\right)\Bigg\}, \qquad (52)$$

$$p(\xi, t) = p_0 a(\xi, t)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}, \qquad (53)$$

где

$$\delta_2 = \left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^{\frac{\gamma(\varkappa-1)}{2}}, \quad \nu_2 = \pm\left|\frac{1}{\gamma(\varkappa-1)} - 1\right|.$$

Выбранный закон сгорания (47) является одним из возможных; другие законы сгорания не рассмотрены, чтобы не перегружать объем статьи. По тем же соображениям не рассмотрен случай, для которого показатель $n$ удовлетворяет условию (28) и решение также может быть получено в общем виде.

В качестве примера был исследован вопрос о затухании возмущения в газе. В трубе на расстоянии $l$ от закрытого конца помещен поршень. В момент $t=0$ поршень начинает двигаться с постоянной скоростью. При этом в газе возникает волна разрежения, многократно отражающаяся от стенки и поршня. В результате этих отражений давление и скорость газа стремятся к (6) и (10).

Были рассмотрены адиабатическое движение и движение с подводом тепла в каналах различной формы: $a$) $\alpha=-2$ — суживающийся канал; $b$) $\alpha=0$ — цилиндрический канал; $c$) $\alpha=2$ — конический канал (сферическая симметрия).

На рис. 1 показано уменьшение относительной амплитуды пульсационной составляющей скорости газа во времени, на рис. 2 — уменьшение относительной амплитуды пульсационной составляющей давления во времени.

Решение соответствует начальным данным: начальная скорость звука $a_0=500$ м/сек, начальная координата поршня 0,7 м, скорость поршня 100 м/сек, продолжительность горения $\sigma=0{,}01$ сек., показатель адиабаты $\eta=1{,}4$, показатель степени в законе горения $n=2$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. Гостехиздат, М., 1955.

Поступила в редакцию 4.12 1958 г.

Кафедра газовой динамики