

Н. Н. ПОПОВ

НОВЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА КАМЕРЫ СМЕШЕНИЯ МНОГОСТРУЙНОГО ЭЖЕКТОРА

§ 1

Современная теория эжектора построена для цилиндрической камеры смешения [1] и принципиально не дает возможности определить длину зоны смешения.

Для случая одного центрального сопла длина зоны смешения может быть определена полуэмпирическим путем, исходя из аналогии со свободной турбулентной струей.

Для случая несколько сопел (многоструйный эжектор) и для камеры смешения переменного сечения теории, насколько известно автору, нет.

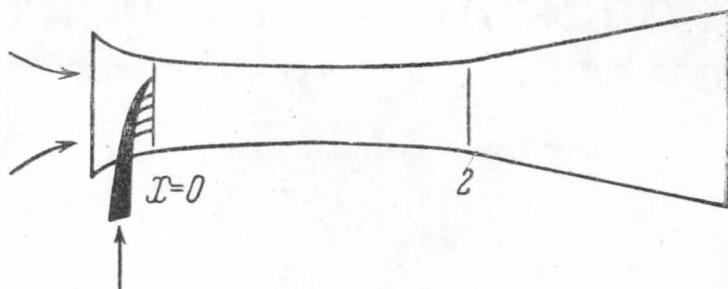
В настоящей статье излагается новый метод расчета камеры смешения (переменного сечения) многоструйного эжектора, основанный на теории многокомпонентной жидкости.

Теория многокомпонентной жидкости исходит из предположения, что в каждой точке пространства одновременно существует несколько компонент жидкости, имеющих свою скорость и плотность. Взаимное влияние движения компонент учитывается введением функций взаимодействия, зависящих от разности скоростей. В первом приближении функция взаимодействия полагается равной $K(v-u)$, где K — постоянный коэффициент.

Рассмотрим многоструйный эжектор, в котором эжектирующая струя подводится в сечении $X=0$ одновременно в нескольких точках эжектирующего потока (см. рисунок).

Для того чтобы математически сформулировать задачу, заменим многоструйный эжектор следующей идеализированной схемой: в сечении $X=0$ происходит соединение двух компонент — активной с параметрами u_0, p_0, ρ_{i_0} и пассивной с параметрами $v_0, p_0, \rho_{i_2,0}$. Индекс 0 обозначает, что параметры берутся в нулевом сечении, u и v — скорости, p — давление, одинаковое для обеих компонент, ρ_{i_1} и ρ_{i_2} — истинные плотности. Расход активной компоненты — c_1 , расход пассивной компоненты — c_2 , коэффициент эжекции $n = c_2/c_1$.

Форму сечения камеры смешения предполагаем заданной — $f = f(x)$. Считаем, что силы взаимодействия могут быть представлены в виде $K(v - u)$.



Обозначим через ρ_1 и ρ_2 средние плотности компонент (плотность, которую имела бы компонента, если бы занимала весь объем). Имеет место следующее соотношение между истинными и средними плотностями

$$\frac{\rho_1}{\rho_{i_1}} + \frac{\rho_2}{\rho_{i_2}} = 1. \quad (1)$$

Уравнения неразрывности для компонент записываются в виде:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial (u \rho_1)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial (v \rho_2)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Уравнения движения компонент [2]

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho_{i_1}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{K_1}{\rho_1} (v - u), \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho_{i_2}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{K_1}{\rho_2} (u - v). \end{aligned} \quad (3)$$

Применим эти уравнения к установившемуся движению в эжекторе. Уравнения неразрывности для нашего случая:

$$f(x) \rho_1 u = c_1 = \text{const}, \quad f(x) \rho_2 v = c_2 = \text{const}. \quad (4)$$

Вставляя (4) в (1), получим

$$\frac{c_1}{u \rho_{i_1}} + \frac{c_2}{v \rho_{i_2}} = f(x). \quad (5)$$

Введем обозначения: $\alpha = c_1 / \rho_{i_1}$; $\beta = c_2 / \rho_{i_2}$; тогда из (5) получим

$$u = \frac{\alpha v}{f(x) v - \beta}. \quad (6)$$

Найдем предельную скорость компонент, для чего достаточно положить $u = v = V$. Из (6) найдем

$$V = \frac{\alpha_n + \beta_n}{f_n}. \quad (7)$$

Индекс n обозначает, что все величины берутся в сечении, где достигается предельная скорость.

Предположим, что истинные плотности в зоне смешения меняются незначительно, так что можно положить: $\rho_{i_1} = \text{const}$; $\rho_{i_2} = \text{const}$

(если рассматриваются жидкие компоненты, это выполняется всегда, во всех сечениях эжектора).

Напишем уравнения неразрывности для истинных плотностей при

$$x = 0: c_1 = f_{10} \cdot \rho_{i1} u_0, \quad c_2 = f_{20} \rho_{i2} \cdot v_0, \quad f(0) = f_{10} + f_{20};$$

f_{01} — проходное сечение первой компоненты, f_{02} — второй компоненты (при $x=0$).

Воспользуемся последним соотношением и выразим начальное сечение камеры смешения через параметры потока в нулевом сечении:

$$f(0) = f_{10} + f_{20} = \frac{c_1}{\rho_{i1} u_0} + \frac{c_2}{\rho_{i2} v_0} = \frac{c_1}{\rho_{i2}} \frac{\gamma \omega_0 + n}{v_0}, \quad (8)$$

где $\gamma = \rho_{i2}/\rho_{i1}$, $\omega_0 = v_0/u_0$.

Обозначим $f(0)/f_n = a$, тогда $f_n = 1/a \cdot f(0)$. Вставляя (7) в (8), после простых преобразований получим:

$$V = \frac{V}{u_0} = a \frac{(\gamma + n)\omega_0}{n + \gamma\omega_0}. \quad (9)$$

Для цилиндрической камеры смешения $a \equiv 1$. Уравнения (3) для случая установившегося движения имеют вид:

$$u \frac{du}{dx} = - \frac{1}{\rho_{i1}} \frac{dp}{dx} + \frac{K}{\rho_{i1}} (v - u), \quad (10)$$

$$v \frac{dv}{dx} = - \frac{1}{\rho_{i2}} \frac{dp}{dx} + \frac{K}{\rho_{i2}} (u - v).$$

В случае произвольного $f(x)$ уравнения (10) должны решаться численно, о чем см. ниже. Но в случае, когда f постоянно, уравнения допускают первый интеграл [2].

§ 2

Умножим первое уравнение (10) на ρ_{i1} , второе на ρ_{i2} и сложим. Воспользовавшись (1), получим:

$$\rho_{i1} u \frac{du}{dx} + \rho_{i2} v \frac{dv}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0.$$

Так как $f(x) = \text{const}$, то из (4) следует, что $\rho_{i1} u$ и $\rho_{i2} v$ константы.

Интегрируя, получим:

$$\frac{c_1}{f} u + \frac{c_2}{f} v + p = \text{const} = \frac{c_1}{f} u_0 + \frac{c_2}{f} v_0 + p_0. \quad (11)$$

Соотношение (11) позволяет определить давление, если известны скорости. Используем (11) для определения давления в предельном сечении. Полагая $u = v = V$, получим:

$$\frac{p_n - p_0}{\rho_{i1} u_0^2} = \frac{\omega_0(1 - \omega_0)(1 - \gamma\omega_0)n}{\gamma(\omega_0 + n)^2}. \quad (12)$$

Из (12) следует, что для случая цилиндрической камеры $p_n - p_0$ мало при достаточно больших n и поэтому предположение о несжимаемости, сделанное выше, выполняется.

Найдем связь между ω_0 , p_0 и параметрами компонент. Пусть активная компонента в состоянии торможения имеет скорость звука и давление a_1 , p_1 , а пассивная — a_2 , p_2 .

Расширяясь в сопле до давления p_0 , активная компонента приобретает скорость:

$$v_0^2 = \frac{2a_1^2}{\eta-1} \left[1 - \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\eta-1}{\eta}} \right]. \quad (13)$$

Соответственно вторая компонента

$$v_0^2 = \frac{2a_2^2}{\eta-1} \left[1 - \left(\frac{p_0}{p_2} \right)^{\frac{\eta-1}{\eta}} \right]. \quad (14)$$

Деля (14) на (13), получим:

$$\omega_0^2 = \frac{a_2^2}{a_1^2} \frac{1 - (p_0/p_2)^{\frac{\eta-1}{\eta}}}{1 - (p_0/p_1)^{\frac{\eta-1}{\eta}}}. \quad (15)$$

Теперь мы имеем все необходимое для расчета цилиндрической камеры смешения: в предельном сечении нам известны скорости и давление, равные для обеих компонент. Введем среднюю плотность:

$$\rho_{in} = \frac{1}{n+1} (\rho_{i1} + n\rho_{i2}). \quad (16)$$

Дальнейшее движение потока в диффузоре можно рассматривать обычными методами, учитывая сжимаемость. Давление торможения p_T равно:

$$p_T = \xi p_n \left(1 + \frac{\eta-1}{2} \frac{V^2}{\frac{\eta p_n}{\rho_{in}}} \right)^{\frac{\eta}{\eta-1}}, \quad (17)$$

где ξ — к. п. д. диффузора. Коэффициент сжатия: $\Pi = p_T/p_2$ (для случая несжимаемой жидкости: $p_T = p_0 + \xi \rho_{in} V^2/2$).

Назовем характеристикой эжектора зависимость коэффициента сжатия от p при постоянном коэффициенте эжекции n .

Для построения характеристики цилиндрической камеры предположим, что параметры активной и пассивной компонент (p_2 ; p_1 ; a_2 ; a_1) заданы. Задавая значения p_0 по (15), определяем ω_0 . Взяв постоянное значение n по (9), находим предельную скорость. Зная V , по (12) и (17) определяем Π . Расчет производится для нескольких значений n .

Мы видим, что в случае цилиндрической камеры смешения построение характеристики удастся произвести, не зная величины коэффициента K и не определяя предварительно длины камеры смешения.

Поэтому в этом случае существует формальная аналогия с обычной теорией эжектора. Но известная теория эжектора принципиально не позволяет вычислить параметры потока внутри зоны смешения, в то время как предлагаемый метод разрешает вычислить параметры на всей длине зоны смешения.

§ 3

Вернемся к уравнениям (10) и приведем их к одному уравнению; сначала, исключая dp/dx , получим:

$$u \frac{du}{dx} = \frac{1}{\rho_{i1}} \left[\rho_{i2} v \cdot \frac{dv}{dx} - \frac{K \rho_{i2}}{\rho_2} (u - v) \right] + \frac{K}{\rho_2} (v - u). \quad (18)$$

Вставляя (6) в (18), заменяя ρ_1 и ρ_2 через f , c , u и v и затем исключая u , получим одно уравнение первого порядка для определения v :

$$\frac{dv}{dx} = v^2 \frac{\alpha^2 \cdot \frac{df}{dx} - K\delta f^4 \left(\frac{\alpha+\beta}{f} - v \right) \left(v - \frac{\beta}{f} \right)}{-\alpha^2\beta - \gamma f^3 (v - \beta/f)^3}, \quad (19)$$

где $\delta = \gamma/c_1 n$.

В общем случае, когда $f(x)$ произвольно, уравнение (19) интегрируется численно. Предельная скорость определяется из условия:

$$u(x) - v(x)|_{x=L} < \mu,$$

где μ — коэффициент допустимой неравномерности.

После того как длина зоны смешения определена, известные скорости компонент вставляются в одно из уравнений (10). Численно интегрируя, найдем $p(x)$, и, следовательно, p_n . Поскольку известны V и p_n , то характеристика эжектора легко может быть построена.

Для случая, когда $f(x) = \text{const}$, уравнение примет вид

$$\frac{dv}{dx} = \frac{Kf\delta}{\gamma} \cdot \frac{v^2 \left(\frac{\alpha+\beta}{f} - v \right) \left(v - \frac{\beta}{f} \right)}{\alpha^2\beta/\gamma f^3 + (v - \beta/f)^3}. \quad (20)$$

Поскольку при $x = x_0$; $v = v_0 \neq 0$, то dv/dx может обратиться в ноль только тогда, когда одна из скобок в числителе равна нулю.

Первая скобка на основании (7) может быть представлена в виде

$$\frac{\alpha+\beta}{f} - v = V - v.$$

Следовательно, $dv/dx \rightarrow 0$ при $v \rightarrow V$.

Преобразуем вторую скобку. В начальном сечении можно написать: $c_2 = f_{20}\rho_{12}v_0$, откуда $\beta = f_{20}v_0$.

Поэтому

$$v - \frac{\beta}{f} = v_0 \left(\frac{v}{v_0} - \frac{f_{20}}{f} \right) \neq 0,$$

поскольку $v/v_0 \geq 1$, а $f_{20}/f < 1$ (случай $f_{20} = f$ соответствует отсутствию активной компоненты).

Интегрируя (20), получим:

$$X = \frac{\gamma}{K\delta f} \left[A_1 \ln \frac{v}{v_0} + \frac{A_2}{v_0} \left(1 - \frac{v_0}{v} \right) - A_3 \ln \frac{V-v}{V-v_0} + \right. \\ \left. + A_4 \frac{\ln v\beta/f}{v_0 - \beta/f} \right], \quad (21)$$

где

$$A_1 = -\frac{n^3 + 2n^2\gamma \pm 2n\gamma + \gamma^2}{n(\gamma + n)^2}, \quad A_3 = \frac{1}{n} \quad (22)$$

$$A_2 = \frac{\beta}{f} \frac{n^2 - \gamma}{n(\gamma + n)}, \quad A_4 = \frac{\gamma^2 + n}{(\gamma + n)^2}.$$

Длину зоны смешения находим из условия: $Vv_0/0, |_{x=L} < \mu$.

Для того чтобы получить зависимость скорости от x , необходимо разрешить (21) относительно v ; получив $v(x) = v$ и вставляя ее в (6), найдем $u(x)$ и с помощью (11) определим $p(x)$, то есть полностью решим задачу.

Коэффициент K , входящий в уравнения, должен быть определен из эксперимента. В частности, экспериментальное определение K может быть выполнено с помощью многоструйного эжектора с цилиндрической камерой смещения, причем в этом случае от величины K зависит только длина зоны смещения.

В случае камеры переменного сечения коэффициент K существенно влияет как на длину зоны смещения, так и на характеристику эжектора.

Итак, для случая среды, сжимаемостью которой можно пренебречь на длине зоны смещения, при произвольной форме канала, решение задачи о расчете многоструйного эжектора сводится к решению двух независимых обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

В случае произвольно изменяющегося сечения камеры смещения интегрирование необходимо производить численно.

В случае цилиндрической камеры смещения уравнение (19) интегрируется, а давление находится из конечного соотношения (11).

Предположение о несжимаемости компонент строго выполняется для жидкостей и приближенно выполняется для газов при сравнительно невысоких скоростях или при больших коэффициентах эжекции (что следует из (12)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. ГТТИ, М., 1953.
2. Рахматулин Х. А. ПММ, 20, № 2, 1956.

Поступила в редакцию
7.12. 1958 г.

Кафедра газовой динамики