Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3—1959

Г. М. ВАЛОВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Задачи о равновесии прямоугольного параллелепипеда рассматривались в работах М. М. Филоненко-Бородича [1—3], Е. С. Кононенко [4], В. П. Нетребко [5], Б. Ф. Власова [6], а также мной [7—8].

Ниже дается точное решение следующей граничной задачи об упругой деформации прямоугольного параллелепипеда со смешанными граничными условиями: найти проекции вектора перемещения $u(x, y, z)$ $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$, удовлетворяющие внутри параллелепипеда $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, $-l \leqslant z \leqslant l$ однородным дифференциальным уравнениям Ляме

$$\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \Delta u = 0, \quad \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \Delta v = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial\theta}{\partial z} + \Delta w = 0,$$

а на его поверхности условиям

$$w = \pm\psi(x, y) \qquad \text{при } z = \pm l, \tag{2}$$

$$G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad \text{при } z = \pm l, \tag{3}$$

$$G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \qquad \text{при } z = \pm l, \tag{4}$$

$$u = \pm q(y, z) \qquad \text{при } x = \pm a, \tag{5}$$

$$G\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad \text{при } x = \pm a, \tag{6}$$

$$G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \qquad \text{при } x = \pm a, \tag{7}$$

$$2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\theta\right) = -\varphi(x, z) \quad \text{при } y = \pm b, \tag{8}$$

$$G\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \qquad \text{при } y=\pm b, \tag{9}$$

$$G\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0 \qquad \text{при } y=\pm b, \tag{10}$$

где σ — коэффициент Пуассона, Δ — оператор Лапласа, G — модуль сдвига, $\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$ — объемная деформация. В граничных условиях задачи вместо напряжений написаны их выражения через перемещения по формулам закона Гука. Граничные функции считаем представимыми двойными рядами Фурье

$$\psi(x, y)=\sum_{p,m=0}^{\infty}\lambda_{pm}\psi_{pm}\cos\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}\left(\begin{matrix}-a\leqslant x\leqslant a\\ -b\leqslant y\leqslant b\end{matrix}\right),$$

$$q(y, z)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\lambda_{mn}q_{mn}\cos\frac{m\pi y}{b}\cos\frac{n\pi z}{l}\left(\begin{matrix}-b\leqslant y\leqslant b\\ -l\leqslant z\leqslant l\end{matrix}\right), \tag{11}$$

$$\varphi(x, z)=\sum_{n,p=0}^{\infty}\lambda_{np}\varphi_{np}\cos\frac{n\pi z}{l}\cos\frac{p\pi x}{a}\left(\begin{matrix}-l\leqslant z\leqslant l\\ -a\leqslant x\leqslant a\end{matrix}\right),$$

в которых

$$\lambda_{ij}=\begin{cases}\frac{1}{4}, & \text{если } i=j=0,\\ \frac{1}{2}, & \text{если } i=0,\ j>0;\ j=0,\ i>0,\\ 1, & \text{если } i>0,\ j>0.\end{cases}$$

Из граничных условий задачи и из (11) видно, что рассматривается случай деформации, симметричной относительно всех трех координатных плоскостей: $x=0$, $y=0$, $z=0$. Решение задачи для случая несимметричной деформации и ненулевых значений касательных напряжений на поверхности параллелепипеда существенно не отличается от рассматриваемого.

Для решения поставленной задачи введем ряды, построенные в [7]

$$u=\frac{1-2\sigma}{4(1-\sigma)}D_0^{(1)}x+\frac{1}{4(1-\sigma)}{\sum_{m,n=0}^{\infty}}'\frac{C_{mn}^{(1)}}{a\alpha_{mn}^2\,\mathrm{sh}\,a\alpha_{mn}}[(2-2\sigma+$$

$$+\alpha_{mn}a\cdot\mathrm{cth}\,\alpha_{mn}a)\,\mathrm{sh}\,\alpha_{mn}x-\alpha_{mn}x\cdot\mathrm{ch}\,\alpha_{mn}x]\times$$

$$\times\cos\frac{m\pi y}{b}\cos\frac{n\pi z}{l}+\frac{1}{4(1-\sigma)}{\sum_{n,p=0}^{\infty}}'\frac{\alpha_p C_{np}^{(2)}}{b\beta_{np}^3\,\mathrm{sh}\,b\beta_{np}}[(1-2\sigma-$$

$$-b\beta_{np}\,\mathrm{cth}\,b\beta_{np})\,\mathrm{ch}\,\beta_{np}y+\beta_{np}y\cdot\mathrm{sh}\,\beta_{np}y]\cos\frac{n\pi z}{l}\sin\frac{p\pi x}{a}+$$

$$+\frac{1}{4(1-\sigma)}{\sum_{p,m=0}^{\infty}}'\frac{\alpha_p C_{pm}^{(3)}}{l\gamma_{pm}^3\,\mathrm{sh}\gamma_{pm}l}[(1-2\sigma-\gamma_{pm}l\times$$

$$\times\,\mathrm{cth}\,\gamma_{pm}l)\,\mathrm{ch}\,\gamma_{pm}z+\gamma_{pm}z\,\mathrm{sh}\,\gamma_{pm}z]\sin\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}.$$

$$v=\frac{1-2\sigma}{4(1-\sigma)}D_0^{(2)}y+\frac{1}{4(1-\sigma)}\sum_{m,n=0}^{\infty}{}'\frac{\beta_m C_{mn}^{(1)}}{a\alpha_{mn}^3\,\mathrm{sh}\,a\alpha_{mn}}[(1-$$

$$-2\sigma-\alpha_{mn}a\cdot\mathrm{cth}\,\alpha_{mn}a)\,\mathrm{ch}\,\alpha_{mn}x+\alpha_{mn}x\,\mathrm{sh}\,\alpha_{mn}x]\times$$

$$\times\sin\frac{m\pi y}{b}\cos\frac{n\pi z}{l}+\frac{1}{4(1-\sigma)}\sum_{n,p=0}^{\infty}{}'\frac{C_{np}^{(2)}}{b\beta_{np}^2\,\mathrm{sh}\,b\beta_{np}}[2-2\sigma+$$

$$+b\beta_{np}\mathrm{cth}b\beta_{np})\mathrm{sh}\beta_{np}y-\beta_{np}y\mathrm{ch}\beta_{np}y]\cos\frac{n\pi z}{l}\cos\frac{p\pi x}{a}+$$

$$+\frac{1}{4(1-\sigma)}\sum_{p,m=0}^{\infty}{}'\frac{\beta_m C_{pm}^{(3)}}{l\gamma_{pm}^3\,\mathrm{sh}\,\gamma_{pm}l}[(1-2\sigma-\gamma_{pm}l\cdot\mathrm{cth}\,\gamma_{mn}l)\times$$

$$\times\,\mathrm{ch}\,\gamma_{pm}z+\gamma_{pm}z\cdot\mathrm{sh}\,\gamma_{pm}z]\cos\frac{p\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}.$$

$$w=\frac{1-2\sigma}{4(1-\sigma)}D_0^{(3)}z+\frac{1}{4(1-\sigma)}\sum_{m,n=0}^{\infty}{}'\frac{\gamma_n C_{mn}^{(1)}}{a\alpha_{mn}^3\,\mathrm{sh}\,\alpha_{mn}a}\times$$

$$\times[(1-2\sigma-a\alpha_{mn}\,\mathrm{cth}\,a\alpha_{mn})\,\mathrm{ch}\,\alpha_{mn}x+\alpha_{mn}x\cdot\mathrm{sh}\,\alpha_{mn}x]\times \qquad (12)$$

$$\times\cos\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{l}+\frac{1}{4(1-\sigma)}\sum_{n,p=0}^{\infty}{}'\frac{\gamma_n C_{np}^{(2)}}{b\beta_{np}^3\,\mathrm{sh}\,b\beta_{np}}[(1-2\sigma-$$

$$-b\beta_{np}\,\mathrm{cth}\,b\beta_{np})\,\mathrm{ch}\,\beta_{np}y+\beta_{np}y\,\mathrm{sh}\,\beta_{np}y]\times$$

$$\times\sin\frac{n\pi z}{l}\cos\frac{p\pi x}{a}+\frac{1}{4(1-\sigma)}\sum_{p,m=0}^{\infty}{}'\frac{C_{pm}^{(3)}}{l\gamma_{pm}^2\,\mathrm{sh}\,\gamma_{pm}l}[(2-2\sigma+$$

$$+\gamma_{pm}l\,\mathrm{cth}\,\gamma_{pm}l)\,\mathrm{sh}\,\gamma_{pm}z-\gamma_{pm}z\,\mathrm{ch}\,\gamma_{pm}z]\times$$

$$\times\cos\frac{p\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b},$$

где $\alpha_p=\frac{p\pi}{a}$, $\beta_m=\frac{m\pi}{b}$, $\gamma_n=\frac{n\pi}{l}$, $\alpha_{mn}=\sqrt{\beta_m^2+\gamma_n^2}$,

$$\beta_{np}=\sqrt{\gamma_n^2+\alpha_p^2},\ \gamma_{pm}=\sqrt{\alpha_p^2+\beta_m^2},$$

$$D_0^{(1)},\ D_0^{(2)},\ D_0^{(3)},\ C_{mn}^{(1)},$$

$C_{np}^{(2)}$, $C_{pm}^{(3)}$ — произвольные постоянные.

Штрих над суммами означает, что индексы суммирования одновременно не обращаются в нуль.

Функции (12) удовлетворяют уравнениям (1) и граничным условиям (3), (4), (6), (7), (9), (10), что легко проверить дифференцированием. Неизвестные постоянные $D_0^{(1)}$, $D_0^{(2)}$, ..., $C_{pm}^{(3)}$, входящие в ряды (12), определяются единственным образом из граничных условий (2), (5) и (8). Действительно, удовлетворяя граничным условиям (2), (5),

(8) и приравнивая коэффициенты Фурье функций в полученных равенствах, получим следующие выражения для указанных постоянных:

$$D_0^{(1)}=\frac{1-\sigma}{a(1-2\sigma)}\,q_{00},\quad D_0^{(3)}=\frac{1-\sigma}{l(1-2\sigma)}\,\psi_{00},$$

$$\frac{1-\sigma}{\sigma}\,D_0^{(2)}+D_0^{(1)}+D_0^{(3)}=\frac{\sigma-1}{2\sigma G}\,\varphi_{00},$$

$$C_{\mathrm{pm}}^{(3)}=2l\gamma_{\mathrm{pm}}^2\lambda_{pm}\psi_{pm}\ (p\neq 0 \text{ при } m=0),$$

$$C_{\mathrm{mn}}^{(1)}=2a\alpha_{\mathrm{mn}}^2\lambda_{mn}q_{mn}\ (n\neq 0 \text{ при } m=0),$$

$$C_{\mathrm{np}}^{(2)}=-\frac{4b\lambda_p}{L_{\mathrm{np}}^{(2)}}\sum_{\mathrm{m}=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(-1)^pC_{\mathrm{mn}}^{(1)}\beta_{np}}{a^2\alpha_{\mathrm{mn}}^2}\times$$

$$\times\left\{\frac{\beta_{\mathrm{m}}^2\,\alpha_{\mathrm{p}}^2}{(\alpha_{\mathrm{p}}^2+\alpha_{\mathrm{mn}}^2)^2}+\frac{\sigma\gamma_{\mathrm{n}}^2}{\alpha_{\mathrm{p}}^2+\alpha_{\mathrm{mn}}^2}\right\}-\frac{4b\lambda_n}{L_{\mathrm{np}}^{(2)}}\times$$

$$\times\sum_{\mathrm{s}=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(-1)^nC_{\mathrm{ps}}^{(3)}\beta_{np}}{l^2\gamma_{\mathrm{ps}}^2}\left\{\frac{\beta_{\mathrm{s}}^2\,\gamma_{\mathrm{n}}^2}{(\gamma_{\mathrm{n}}^2+\gamma_{\mathrm{ps}}^2)^2}+\frac{\sigma\alpha_{\mathrm{p}}^2}{\gamma_{\mathrm{n}}^2+\gamma_{\mathrm{ps}}^2}\right\}-$$

$$-\frac{2(1-\sigma)\,b\beta_{np}\lambda_{np}}{GL_{\mathrm{np}}^{(2)}}\,\varphi_{np}\qquad\begin{pmatrix}m\neq 0 \text{ и } p\neq 0 \text{ при } n=0\\ s\neq 0 \text{ и } n\neq 0 \text{ при } p=0\end{pmatrix},$$

в которых

$$L_{\mathrm{np}}^{(2)}=\operatorname{cth} b\beta_{np}+\frac{b\beta_{np}}{\operatorname{sh}^2 b\beta_{np}},\qquad \lambda_i=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{если } i=0,\\ 1, & \text{если } i>0,\end{cases}$$

ψ_{pm}, q_{mn}, φ_{np} — коэффициенты Фурье рядов (11).

Легко показать, что ряды (12), дающие решение задачи, сходятся равномерно в замкнутом параллелепипеде $-a\leqslant x\leqslant a$, $-b\leqslant y\leqslant b$, $-l\leqslant z\leqslant l$, если коэффициенты Фурье граничных функций имеют порядок

$$\psi_{pm}=0\left(\frac{1}{pm\sqrt{p^2+m^2}}\right),\quad q_{mn}=0\left(\frac{1}{mn\sqrt{m^2+n^2}}\right),\quad \varphi_{np}=0\left(\frac{1}{np\sqrt{n^2+p^2}}\right).$$

Численный пример. Рассмотрим частный случай решений задачи. Стальной кубический образец ($\sigma=0{,}310$, $G=8{,}19\cdot 10^{11}$ дин/см^2) со сторонами граней $x=\pm a$ помещен между двумя параллельными неподвижными абсолютно жесткими гладкими стенками и подвергнут сжатию со стороны граней $z=\pm a$. Усилия передаются с помощью абсолютно твердых тел, у которых поверхности, производящие давление, имеют форму параболических цилиндров с образующими, параллельными оси x, и абсолютно гладки. Грани $y=\pm a$ свободны от нагрузки. Граничные условия в рассматриваемом случае запишутся так:

$$w=\pm\left(\frac{h}{a^2}\,y^2-h-w_0\right)\qquad \text{при } z=\pm a,$$

$$X_z=Y_z=0\qquad \text{при } z=\pm a,$$

$$u=0\qquad \text{при } x=\pm a,$$

$$Y_x = Z_x = 0 \qquad \text{при } x = \pm a,$$

$$X_y = Y_y = Z_y = 0 \qquad \text{при } y = \pm b,$$

где X_z, Y_z, ... Z_y — компоненты тензора напряжения, h и w_0 — параметры уравнений цилиндров.

Ряды (12), дающие решение задачи для рассматриваемого случая, приобретают вид:

$$u = 0,$$

$$v = \frac{\sigma(w_0 + 2/3 \cdot h)}{a(1-\sigma)} y + \frac{4h}{(1-\sigma)\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n^2 \operatorname{sh} n\pi} \times$$

$$\times \left[(2 - 2\sigma + n\pi \cdot \operatorname{cth} n\pi) \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} - \frac{n\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \right] \cos \frac{n\pi z}{a} +$$

$$+ \frac{2h}{(1-\sigma)\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2 \operatorname{sh} m\pi} \left[(1 - 2\sigma - m\pi \cdot \operatorname{cth} m\pi) \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{ch} \frac{m\pi z}{a} + \frac{m\pi z}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi z}{a} \right] \sin \frac{m\pi y}{a},$$

$$w_0 = -\frac{w^0 + 2/3 \cdot h}{a} z + \frac{4h}{(1-\sigma)\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n^2 \operatorname{sh} n\pi} \left[(1 - 2\sigma - \right.$$

$$\left. - n\pi \operatorname{cth} n\pi) \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + \frac{n\pi y}{a} \cdot \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right] \sin \frac{n\pi z}{a} +$$

$$+ \frac{2h}{(1-\sigma)\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2 \operatorname{sh} m\pi} \left[(2 - 2\sigma + m\pi \cdot \operatorname{cth} m\pi) \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{sh} \frac{m\pi z}{a} - \frac{m\pi z}{a} \cdot \operatorname{ch} \frac{m\pi z}{a} \right] \cos \frac{m\pi y}{a},$$

где

$$C_n = -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{(-1)^n}{n\pi L_{n0}^{(2)}}.$$

Таким образом, в кубе осуществляется плоская деформация. Деформированное состояние одинаково во всех плоскостях $x = \text{const}$.

Обозначим равнодействующую, приходящуюся на полоску грани $z = a$ шириной в единицу масштаба, через P, то есть

$$\int_{-a}^{a} Z_z dy = -P \quad \text{при } z = a. \tag{13}$$

Параметр h примем равным

$$h = 0{,}075 \frac{P}{G}.$$

Тогда из равенства (13) находим, что

$$w_0 = \frac{2{,}4 - 3\sigma}{12} \frac{P}{G}.$$

В таблице приведены результаты вычислений для безразмерных величин $\frac{a}{P} Z_z$, $\frac{a}{P} Y_y$, $\frac{a}{P} Y_z$ в точках сетки с шагом, равным $\frac{1}{8}$ ребра куба.

Таблица

Z	Y: 0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{3}{4}a$	a
			$\frac{a}{P} Z_z$		
a	−0,58891	−0,57584	−0,53391	−0,43532	−0,3525
$\frac{3}{4}a$	−0,58189	−0,57193	−0,52618	−0,44237	−0,32610
$\frac{a}{2}$	−0,57195	−0,55815	−0,51608	−0,44738	−0,37331
$\frac{a}{4}$	−0,56116	−0,54752	−0,50895	−0,45605	−0,41109
0	−0,63729	−0,54350	−0,50656	−0,45733	−0,42350
			$\frac{a}{P} Y_y$		
a	−0,11346	−0,10785	−0,089724	−0,035599	0,0000
$\frac{3}{4}a$	−0,029099	−0,023574	−0,015198	−0,003513	0,0000
$\frac{a}{2}$	0,017457	0,016963	0,014198	0,0062904	0,0000
$\frac{a}{4}$	0,037074	0,033614	0,023478	0,010385	0,0000
0	0,042209	0,037812	0,025371	0,007545	0,0000
			$\frac{a}{P} Y_z$		
a	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$\frac{3}{4}a$	0,0000	0,010642	0,018823	0,029444	0,0000
$\frac{a}{2}$	0,0000	0,012608	0,024209	0,028916	0,0000
$\frac{a}{4}$	0,0000	0,0080964	0,014681	0,014254	0,0000
0	0,0000	0,00000	0,0000	0,0000	0,0000

Из таблицы видно, что в средней части куба существует зона растягивающегося нормального напряжения Y_y. Выше и ниже этой зоны напряжение Y_y — сжимающее. Наибольшее касательное напряжение в части куба, находящейся в первом октанте, достигается около линии

$$y = \frac{3}{4} a, \qquad z = \frac{3}{4} a.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Филоненко-Бородич М. М. ПММ, 15, вып. 2, 1951.
2. Филоненко-Бородич М. М. ПММ, 15, вып. 5, 1951.
3. Филоненко-Бородич М. М. ПММ, 21, вып. 4, 1957.
4. Кононенко Е. С. Исследования по теории сооружений, вып. 6, 1954 и вып. 7, 1957.
5. Нетребко В. П. Вестн. МГУ, № 12, 1954; № 6, 1956.
6. Власов Б. Ф. Вестн. МГУ, сер. мат., мех., астрон., физ., химии, № 2, 1957.
7. Валов Г. М. Труды Сибирского металлургического института, вып. 4, Прикладная математика и механика, 1957.
8. Валов Г. М. НДВШ, физ-мат. науки, № 4, 1958.

Поступила в редакцию
12.1 1959 г.

Кафедра теории упругости