Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 3—1959

А. И. МЕШКОВ

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ КОСОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Ранее нами в работе [1] был обобщен метод М. М. Филоненко-Бородича решения задач о равновесии прямоугольного параллелепипеда на косоугольный параллелепипед. Задача о кручении косоугольного параллелепипеда нагрузками, закон распределения которых на двух противоположных гранях неодинаков, в работе [1] была разбита на две: для первой задачи основной тензор был построен, для второй задачи его построение было сведено к отысканию функции ω (x, y), удовлетворяющей условиям (5, 11) работы [1].

Целью настоящей работы является нахождение функции ω (x, y) и тем самым построение общего решения задачи о кручении косоугольного параллелепипеда.

Условия (5, 11) в работе [1] следует читать так *

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}=0 \text{ при } x=0,\ d;\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}=0 \text{ при } y=0,\ k;$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=0 \text{ при } y=0;\ \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=-\int_0^k\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\,dy \text{ при } y=k.$$

Положим

$$\omega(x, y)=\omega_1(x)\cdot\omega_2(y). \tag{1}$$

Из (5.11) работы [1] для функций ω_2 (y) и $\omega_1(x)$ получаем условия

$$\begin{gathered}\frac{dw_2}{dy}=0 \quad \text{при} \quad y=0,\ k,\\ \omega_2=0 \quad \text{при} \quad y=0,\\ w_2=1 \text{ при } y=k\end{gathered} \tag{2}$$

$$\omega_1=\frac{d\omega_1}{dx}=0 \quad \text{при} \quad x=0,\ d; \tag{3}$$

* В дальнейшем при ссылках на формулы работы [1] мы воспроизводить их не будем. Необходимые рисунки см. также в работе [1].

$$\frac{d^2\omega_1}{dx^2} = -\varphi(x), \tag{3'}$$

где

$$\varphi(x) = \int_0^k \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dy. \tag{4}$$

Условиям (2) мы удовлетворим, если функцию ω_2 (y) возьмем в виде:

$$\omega_2(y) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi y}{k}\right). \tag{5}$$

Для отыскания функции ω_1 (x) предположим, что $F(x, y)$ и $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ — непрерывные функции в области $\{0 \leqslant x \leqslant d,\ 0 \leqslant y \leqslant k\}$. Учтем также, что (см. (4.1) [1])

$$F(x, y) = 0 \text{ при } x = 0,\ d;\ y = 0, k. \tag{6}$$

Тогда из (3') получаем

$$\frac{d\omega_1}{dx} = -\int_0^x \varphi(x)\,dx = -\int_0^x \left\{\int_0^k \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dy\right\} dx.$$

Но в силу предположения о непрерывности и условия (6)

$$\int_0^x \left\{\int_0^k \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dy\right\} dx = \int_0^k \left\{\int_0^x \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx\right\} dy = \int_0^k \left\{F(x, y) - F(0, y)\right\} dy =$$

$$= \int_0^k F(x, y)\,dy.$$

Таким образом,

$$\frac{d\omega_1}{dx} = \psi(x) = -\int_0^k F(x, y)\,dy. \tag{7}$$

Тогда

$$\omega_1(x) = \int_0^x \psi(x)\,dx = -\int_0^x\int_0^k F(x, y)\,dx dy. \tag{8}$$

Функция $\omega_1(x)$ удовлетворяет условиям (3). **Действительно,** ω_1 $(x) = 0$ при $x = 0$. При $x = d$

$$\omega_1(x) = \int_0^d\int_0^k F(x, y)\,dx\,dy = 0,$$

в силу условий (5.3) и (5.5) [1]

$$\frac{d\omega_1}{dx} = \psi(x) = 0 \text{ при } x = 0,\ d,$$

так как подынтегральная функция в выражении (7), согласно условию (6), обращается в нуль при $x=0,d$.

Согласно (1), (5) и (8),

$$\omega(x, y) = -\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi y}{k}\right)\int_0^x\int_0^k F(x, y)\,dxdy. \tag{9}$$

На основании формул (5.10) и (5.7) [1] получаем компоненты основного тензора второй задачи (§ 5 [1]):

$$p^{xx} = -\frac{\pi^2}{k^2 h}\cos\frac{\pi y}{k}\int_0^x\int_0^k F(x, y)\,dxdy,$$

$$p^{yy} = \frac{2}{h}\left[-\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi y}{k}\right)\int_0^k\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dy + \int_0^y\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dy\right.,$$

$$p^{zz} \equiv 0,$$

$$p^{yz} = -\frac{z}{h}\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}, \tag{10}$$

$$p^{zx} = +\frac{z}{h}\frac{\partial F(x,y)}{\partial y},$$

$$p^{xy} = \frac{1}{h}\left[\frac{\pi}{k}\sin\frac{\pi y}{k}\int_0^k F(x,y)\right]dy - F(x,y)\Big].$$

Основной тензор первой задачи (§ 5 [1]) получим, положив:

$$p^{xx} = p^{yy} = p^{zz} = p^{xy} = 0, \tag{11}$$

$$p^{yz} = -\frac{\partial F_0(x,y)}{\partial x}, \qquad p^{zx} = \frac{\partial F_0(x,y)}{\partial y}.$$

Сложив компоненты основных тензоров (10) и (11) с компонентами корректирующего тензора ((3.2) [1]), получим компоненты общего тензора напряжений:

$$p^{xx} = 2\sum_m\sum_n\sum_p A_{mnp}\frac{np\pi^2}{kh}P_m(x)\cos\frac{n\pi y}{k}\cos\frac{p\pi z}{h} -$$

$$-\frac{\pi^2}{k^2 h}\cos\frac{\pi y}{k}\int_0^x\int_0^k F(x, y)\,dxdy,$$

$$p^{yy} = 2\sum_m\sum_n\sum_p B_{mnp}\frac{mp\pi^2}{dh}\cos\frac{m\pi x}{d}P_n(y)\cos\frac{p\pi z}{h} +$$

$$+\frac{2}{h}\left[-\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi y}{k}\right)\int_0^k\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dy + \int_0^y\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dy\right],$$

$$p^{zz} = 2\sum_m\sum_n\sum_p C_{mnp}\frac{mn\pi^2}{dk}\cos\frac{m\pi x}{d}\cos\frac{n\pi y}{k}P_p(z),$$

$$P^{yz} = \sum_{m}\sum_{n}\sum_{p} A_{mnp} P''_{m}(x) \sin\frac{n\pi y}{k} \sin\frac{p\pi z}{h} -$$

$$- \sum_{m}\sum_{n}\sum_{p} B_{mnp} \frac{m\pi}{d} \cos\frac{m\pi x}{d} P'_{n}(y) \sin\frac{p\pi z}{h} -$$

$$- \sum_{m}\sum_{n}\sum_{p} C_{mnp} \frac{m\pi}{d} \cos\frac{m\pi x}{d} \sin\frac{n\pi y}{k} P'_{p}(z) -$$

$$- \frac{z}{h} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_0(x,y)}{\partial x}, \tag{12}$$

$$P^{zx} = - \sum_{m}\sum_{n}\sum_{p} A_{mnp} \frac{n\pi}{k} P'_{m}(x) \cos\frac{n\pi y}{k} \sin\frac{p\pi z}{h} +$$

$$+ \sum_{m}\sum_{n}\sum_{p} B_{mnp} \sin\frac{m\pi x}{d} P''_{n}(y) \sin\frac{p\pi z}{h} -$$

$$- \sum_{m}\sum_{n}\sum_{p} C_{mnp} \frac{n\pi}{k} \sin\frac{m\pi x}{d} \cos\frac{n\pi y}{k} P'_{p}(z) +$$

$$+ \frac{z}{h} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial F_0(x,y)}{\partial y},$$

$$P^{xy} = - \sum_{m}\sum_{n}\sum_{p} A_{mnp} \frac{p\pi}{h} P'_{m}(x) \sin\frac{n\pi y}{k} \cos\frac{p\pi z}{h} -$$

$$- \sum_{m}\sum_{n}\sum_{p} B_{mnp} \frac{p\pi}{h} \sin\frac{m\pi x}{d} P'_{n}(y) \cos\frac{p\pi z}{h} +$$

$$+ \sum_{m}\sum_{n}\sum_{p} C_{mnp} \sin\frac{m\pi x}{d} \sin\frac{n\pi y}{k} P''_{p}(z) +$$

$$+ \frac{1}{h}\left[\frac{\pi}{k} \sin\frac{\pi y}{k} \int_{0}^{y} F(x, y)\, dy - F(x, y)\right].$$

Этот тензор удовлетворяет уравнениям равновесия и граничным условиям и дает общее решение задачи о кручении косоугольного параллелепипеда, когда касательные нагрузки на гранях параллелепипеда заданы в виде (5.1) и (5.2) [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мешков А. И. Вестн. МГУ, сер. мат., мех., астрон., физ., химии, № 2, 1957

Поступила в редакцию
16.2 1959 г.

Кафедра теории упругости