Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3—1959

АСТРОНОМИЯ

В. Л. ПАНТЕЛЕЕВ

ВЛИЯНИЕ КРИВИЗНЫ НОЖА НА ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА БОЛЬШОГО ПЕРИОДА

§ 1. Предварительные замечания

Как известно, для определения поправок второго порядка за влияние возмущающих ускорений при маятниковых и других способах определения силы тяжести на море необходимо вести регистрацию этих ускорений. Для регистрации горизонтальных ускорений необходимо знать положения истинного горизонта в любой момент. Обычно вместо положений истинного горизонта приходится пользоваться положениями искусственных горизонтов: гироскопических установок, маятников большого периода («медленные маятники»).

В случае применения последних используется следующее свойство их движения на подвижной опоре.

Допустим, что призма свободно подвешенного маятника идеальна, то есть имеет острие ножа бесконечно большой кривизны. Пусть также трение отсутствует. При этих предположениях уравнение движения маятника имеет вид:

$$\theta'' + n^2\theta = n^2 \frac{\ddot{x}}{g}, \tag{1.1}$$

где $\ddot{x}$ — горизонтальное ускорение точки опоры маятника в плоскости его колебания, θ — угол отклонения маятника в неподвижной системе координат, выбранной таким образом, что положение маятника $\theta = 0$ совпадает с положением его равновесия при $\ddot{x} = 0$, n — круговая частота свободных колебаний маятника, g — ускорение силы тяжести.

Если движение опоры маятника — гармонические колебания, то есть

$$\ddot{x} = a\cos(mt + \delta), \tag{1.2}$$

то решением уравнения (1. 1) будет:

$$\theta = \Theta\cos(nt + \Delta) + a\frac{n^2}{n^2 - m^2}\cos(mt + \delta). \tag{1.3}$$

Первый член в правой части формулы (1. 3) есть собственные колебания маятника, второй—вынужденные. Коэффициент $n^2/(n^2-m^2)^2$ известен в теории колебаний под названием коэффициента динамичности маятника. При малых n/m, как это имеет место в случае маятника большого периода, этот коэффициент мал, следовательно, и вынужденные колебания малы.

Вследствие действия силы трения собственные колебания маятника с течением времени исчезают, а так как вынужденные колебания малы, то медленный маятник можно использовать как регистратор истинного горизонта.

Однако этот вывод справедлив лишь в том случае, когда нож маятника имеет нулевой радиус кривизны и движение маятника не зависит от вращений площадки, на которой он установлен, параллельных оси вращения маятника. Если радиус кривизны ножа не равен нулю, то движение маятника будет возмущено и вращательными движениями площадки. Эти возмущения в некоторых случаях могут быть настолько велики, что пренебрегать ими во многих практических задачах нельзя.

Особенно велики эти возмущения при регистрации ускорений на подводных лодках в погруженном состоянии, когда дифферент лодки может медленно меняться (приблизительно с периодом 1—3 мин.).

§ 2. Вывод дифференциального уравнения

Составим дифференциальное уравнение движения маятника, подвешенного на подвижную площадку, с учетом радиуса кривизны ножа маятника.

Выберем неподвижную систему координат: ось OZ — параллельно направлению ускорения силы тяжести, ось OX — перпендикулярно

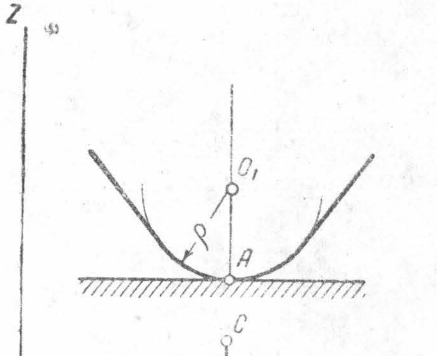

Рис. 1.

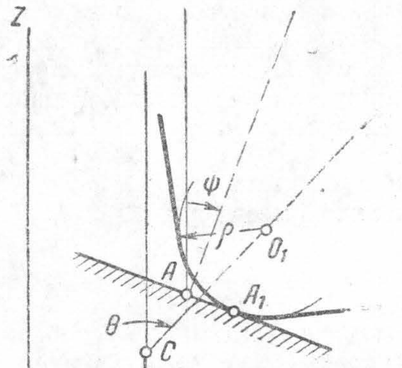

Рис. 2

OZ и параллельно плоскости колебания маятника. За положительный отсчет углов примем вращение по часовой стрелке.

Допустим, что в рабочем участке поверхность ножа можно считать круговым цилиндром радиуса ρ.

Введем следующие обозначения (рис. 1, 2): θ — угол отклонения маятника от положения равновесия при горизонтальной площадке; ψ — наклон площадки относительно горизонтали, a — расстояние центра тяжести от центра кривизны ножа, C — центр тяжести маятника, O_1 — центр кривизны ножа.

Для составления дифференциального уравнения движения маятника воспользуемся формулой Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \theta'}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta}=Q. \tag{2,1}$$

Здесь через T обозначена живая сила маятника, а Q — обобщенные внешние силы. Живую силу маятника, как известно из теоретической механики, можно представить в виде:

$$T=\frac{1}{2}(I_c\theta'^2+mv_c^2), \tag{2,2}$$

где I_c — момент инерции маятника относительно оси, параллельной оси вращения и проходящей через центр тяжести, m — масса маятника, а v_c — скорость центра тяжести маятника.

Будем считать, что колебания как площадки, так и маятника малы, так что

$$\cos\theta=1, \quad \cos\psi=1,$$

$$\sin\theta=\theta, \quad \sin\psi=\psi.$$

Как видно из рис. 2, нетрудно получить

$$v_c^2=[x+\rho(\theta'-\psi')-a\theta']^2+z^2. \tag{2,3}$$

Составим выражение для работы силы тяжести:

$$\Pi=mg\,[a(1-\cos\theta)-\rho(\theta-\psi)\sin\psi]. \tag{2,4}$$

Обобщенная сила Q в нашем случае есть производная Π по θ, взятая с обратным знаком. Выполняя дифференцирование и учитывая малость θ и ψ, получим

$$Q=-(a\theta+\rho\psi)\,mg. \tag{2,5}$$

Принимая во внимание (2, 3), подставим (2, 2), (2, 5) в формулу Лагранжа (2, 1):

$$[I_c+(a-\rho)^2]\,\theta''+amg\,\theta=m(a-\rho)\,\ddot{x}-m\rho(a-\rho)\,\psi''+\rho mg\,\psi.$$

Так как a и ρ малы, то членом $m\rho(a-\rho)\psi''$ можно пренебречь. $I_c+(a-\rho)^2$, согласно теореме Штейнера, есть момент инерции маятника относительно оси, параллельной оси вращения и проходящей через точку A (рис. 1). Обозначим этот момент инерции буквой I.

Теперь, с учетом сделанных замечаний, уравнение движения примет вид

$$I\theta''+amg\,\theta+ma\ddot{x}+\rho\,mg\left(\psi-\frac{\ddot{x}}{g}\right).$$

Введем обозначения

$$\frac{mga}{I}=n^2, \quad \frac{\rho}{a}=\chi \tag{2,6}$$

и перепишем искомое дифференциальное уравнение в окончательном виде:

$$\theta''+n^2\theta=\frac{n^2}{g}\ddot{x}=n^2\chi\left(\psi-\frac{\ddot{x}}{g}\right). \tag{2,7}$$

§ 3. Анализ возмущенного движения

В отличие от уравнения движения маятника с идеальным ножом, наше уравнение имеет в правой части возмущающий член $n^2\chi(\psi - \ddot{x}/g)$, зависящий от радиуса кривизны ножа и наклона площадки. Правда, если наклон площадки таков, что

$$\psi = \frac{\ddot{x}}{g}, \tag{3,1}$$

этот член обращается в нуль. Равенство же (3,1) означает, что нормаль к площадке совпадает с направлением результирующего ускорения: ускорение силы тяжести плюс горизонтальное ускорение площадки, то есть с направлением мгновенной вертикали.

Таким образом, возмущения движений маятника вследствие наличия радиуса кривизны ножа пропорциональны углу отклонения площадки от плоскости мгновенного горизонта.

Решение уравнения (2,7) представим в следующем виде:

$$\theta = \theta_0 + \theta_1,$$

где θ_0 удовлетворяет уравнению

$$\theta_0'' + n^2\theta_0 = \frac{n^2}{g}\ddot{x},$$

а θ_1 — уравнению

$$\theta_1'' + n^2\theta_1 = n^2\chi\left(\psi - \frac{\ddot{x}}{g}\right). \tag{3,2}$$

Решая последнее уравнение, найдем искомое выражение для возмущений от наклонов.

Остановимся лишь на случае, когда $\psi - \ddot{x}/g$ можно представить в виде суммы синусоид:

$$\psi - \frac{\ddot{x}}{g} = \sum_{1=0}^{N} \psi_i \cos(m_i t + \delta_i). \tag{3,3}$$

В этом случае решением уравнения (3, 2) будет:

$$\theta_1 = \chi \sum_{i=0}^{N} \psi_i \frac{n^2}{n^2 - m_i^2} \cos(m_i t + \delta_i). \tag{3,4}$$

Таким образом получаем, что рассматриваемые возмущения — функция периода колебаний площадки относительно плоскости мгновенного горизонта.

Пусть T — период свободных колебаний маятника, T_m — период колебаний площадки. Очевидно, что при $T_m/T \to 0$ выражение (3, 4) стремится к нулю, а при $T_m/T \to \infty$ — к $\chi\psi$. Итак, возмущения движений маятника, имеющего не нулевой радиус кривизны ножа, малы, если мало отношение периодов T_m/T, и порядка $\chi\psi$, если это отношение велико.

Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 1. Вычислим возмущения маятника периода 40 сек. при $\chi = 1$ и колебаниях площадки относительно мгновенного горизонта с амплитудой 0°,1 и периодом 8 сек. Подставляя эти численные значения в (3, 4), получим

$$\theta_1 \approx \chi \left(\frac{T_m}{T}\right)^2 \psi = 0°{,}004 = 0'{,}24.$$

Таким образом, неучет влияния наклонов площадки на движения маятника в этом случае вызовет ошибку, не превосходящую 4% от амплитуды наклонов.

Пример 2. Пусть период колебаний площадки очень большой, например 2 мин. Вычислим возмущения для тех же параметров маятника, что и в примере 1: $\theta_1 = 1{,}12\psi$.

Оказывается, что в этом случае маятник будет совершать почти те же вращательные движения, что и площадка, то есть он будет как бы жестко связан с площадкой.

Последний вывод подтверждается практикой регистрации наклонов и ускорений при маятниковых определениях силы тяжести на подводных лодках. Для регистрации наклонов и ускорений в карданов подвес маятникового прибора помещаются маятники с разными собственными периодами. Вследствие несовершенства карданова подвеса прибор часто совершает долгопериодические вращательные движения, вызванные непостоянством дифферента подводной лодки. Так как все маятники прибора имеют одинаковый оптический рычаг, наклоны карданова подвеса вызывают смещение бликов всех маятников на одинаковую величину, кроме бликов медленных маятников, которые на эти вращения не реагируют или реагируют очень слабо.

§ 4. Определение коэффициента χ

Из формулы (3, 4) ясно, что для оценки возмущений, которые вносит радиус кривизны ножа в вынужденные колебания маятника, необходимо знание не самого радиуса кривизны, а некоторой величины χ, связанной с ним соотношением $\chi = \rho/a$.

Эту величину легко получить в лабораторных условиях методом статического наклона площадки. При отсутствии ускорений уравнение (2, 7) имеет вид:

$$\theta'' + n^2\theta = n^2\chi\psi, \tag{4,1}$$

где $\psi = \text{const}$.

Решением его получим

$$\theta = \Theta\cos(nt + \Delta) + \chi\psi. \tag{4,2}$$

Это выражение говорит о том, что свободные колебания маятника будут совершаться около положения маятника $\theta_{ст} = \chi\psi$. Отсюда легко определяем χ:

$$\chi = \frac{\theta_{ст}}{\psi}. \tag{4,3}$$

Заметим, кстати, что это положение равновесия будет устойчивым, если $a > 0$, то есть, как следует из (2, 6), если центр тяжести маятника лежит ниже центра кривизны лезвия ножа. Кроме того, положение равновесия может быть достигнуто только, если вертикаль, проведенная через центр тяжести, пересекает линию касания ножа и площадки.

Исходя из этих соображений, построим более строгую зависимость χ от $\theta_{ст}$ и ψ, чем (4, 3).

Из треугольника AOC (рис. 3) на основании теоремы синусов имеем

$$\frac{OA}{OC} = \frac{\sin \angle ACO}{\sin \angle OAC},$$

но

$$OA = \rho, \quad OC = a,$$

$$\sin \angle ACO = \sin \theta, \quad \sin \angle OAC = \sin \psi,$$

поэтому

$$\chi = \frac{\sin \theta}{\sin \psi}. \tag{4,4}$$

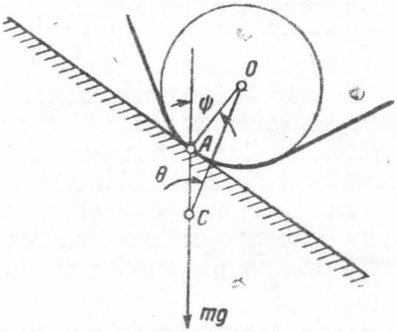

Рис. 3

Дадим еще следующее выражение для χ через радиус кривизны ножа, период маятника и радиус инерции маятника:

$$\chi = \frac{g}{4\pi^2 r^2} T^2 \rho. \tag{4,5}$$

Эта формула может быть употреблена для контроля постоянства кривизны ножа при различных углах наклона маятника.

Допустим, что вблизи угла θ_i коэффициент χ, определенный из формулы (4, 4), будет равен χ_i, а период свободных колебаний для очень малых отклонений от θ_i будет T_i, тогда, зная радиус инерции маятника, определяем радиус кривизны ножа:

$$\rho_i = \frac{4\pi^2 r^2}{g} \frac{\chi_i}{T_i^2}.$$

Определяя таким образом радиус кривизны для различных Qi получим представление о форме профиля лезвия ножа.

Выводы

Наличие радиуса кривизны ножа делает вынужденные колебания маятника большого периода зависимыми от вращательных движений той площадки, на которой он установлен. Если амплитуда колебания площадки ρ, а период T_m, то максимальное возмущение маятника будет

$$\theta_1 = -\beta\chi \frac{T_m^2}{T^2 + T_m^2} \qquad (5,1)$$

или, используя (4, 5),

$$\theta_1 = \beta \frac{g}{4\pi^2} \frac{\rho}{r^2} \frac{T^2 T_m^2}{T_m^2 - T^2} . \qquad (5,2)$$

Формулы (5, 1) и (5, 2) говорят о том, что возмущения от наклонов тем больше, чем больше радиус кривизны ножа и чем меньше радиус инерции маятника.

Как следует из формул (2, 7) и (3, 2), наклоны площадки отсчитываются от плоскости мгновенного горизонта, а поэтому при регистрации ускорений и наклонов при гравиметрических наблюдениях на море эти возмущения могут быть сведены к минимуму установкой маятника в достаточно чувствительный карданов подвес, имеющий малый период по сравнению с периодом возмущающих ускорений.

Однако если карданов подвес вследствие тех или иных причин совершает вращательные движения, имеющие большой период по сравнению с периодом маятника, то возмущения от наклонов значительны. Например, при $\chi \approx 1$ маятник будет совершать те же наклоны, что и площадка, то есть относительно карданова подвеса будет неподвижен.

Но чувствительность маятника к долгопериодическим наклонам не создает трудностей в регистрации ускорений на море, так как периоды их в основном лежат в пределах 5—15 сек., а возмущения для них, как мы видели, малы.

Поступила в редакцию
14.2 1959 г.

Кафедра небесной механики
и гравиметрии