Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 3—1959

М. С. ЯРОВ-ЯРОВОЙ

О РАЗЛОЖЕНИИ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ ПРИТЯЖЕНИЯ ДВУХ ТЕЛ ПО МОМЕНТАМ ИНЕРЦИИ ДЛЯ НЕГЛАВНЫХ И НЕЦЕНТРАЛЬНЫХ ОСЕЙ ИНЕРЦИИ

В работе [1] нами рассматривалось разложение силовой функции притяжения двух тел по их моментам инерции. Однако полученные там окончательные формулы связаны либо с решением некоторой системы обобщенных диофантовых уравнений, либо с использованием рекуррентных формул, что представляет собой известные трудности. Кроме того, такое развернутое разложение затрудняет обнаружение некоторых общих свойств силовой функции. В настоящей работе разложение ведется не по самим моментам инерции, а по их некоторым комбинациям, для чего силовая функция притяжения вначале разлагается по отрицательным степеням взаимного расстояния между фиксированными точками двух тел. Коэффициентами такого разложения оказываются суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых состоит из произведения синуса или косинуса линейной комбинации с целыми коэффициентами эйлеровых углов обоих тел на степени отношения разностей координат фиксированных точек к их взаимному расстоянию и на моменты инерции обоих тел. При этом мы исходим не из общей формулы для высших частных производных сложной функции, выведенной в нашей работе [2], а пользуемся более простым методом.

Рассмотрим два абсолютно твердых тела P_1 и P_2, причем, если имеется элемент массы $dm_j = \rho_j d\tau_j$ тела P_j $(j = 1, 2)$, то в абсолютной системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3, он имеет координаты $a_i^{(j)}$ $(i = 1, 2, 3;$ $j = 1, 2)$, а в системе координат, скрепленной с телом P_j и имеющей начало в фиксированной точке O_j, имеет координаты $x_k^{(j)}$. Пусть косинус угла между направлениями осей ξ_i и $x_k^{(j)}$ равен $a_{ik}^{(j)}$, а координаты точки O_j будут $\xi_i^{(j)}$. Тогда

$$a_i^{(j)} = \xi_i^{(j)} + \overline{a}_i^{(j)} = \xi_i^{(j)} + \sum_{k=1}^{3} a_{ik}^{(j)} x_k^{(j)}, \qquad (1)$$

$$i = 1,2,3; \ j = 1,2.$$

Здесь $\overline{a}_i^{(j)}$ — координаты dm_j относительно системы координат, начало которых находится в O_j, а оси которых параллельны осям ξ_i ($i = 1, 2, 3$). Обозначим взаимное расстояние между dm_1 и dm_2 через Δ. Если Δ_0 — расстояние между O_1 и O_2, то

$$\Delta^2 = \Delta_0^2 + 2\Delta_0(g_1 + g_2) + r_1^2 + r_2^2 - 2b. \tag{2}$$

Из работы [1] известно, что

$$g_j = \sum_{k=1}^{3} c_k^{(j)} x_k^{(j)} \; (j = 1, 2), \quad b = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3} b_{mn} x_m^{(1)} x_n^{(2)},$$

$$c_k^{(j)} = \sum_{i=1}^{3} a_{ik}^{(j)} \frac{\xi_i^{(1)} - \xi_i^{(2)}}{\Delta_0}, \tag{3}$$

$$b_{mn} = \sum_{i=1}^{3} a_{im}^{(1)} a_{in}^{(2)}.$$

Наша цель — получить разложение для $1/\Delta$. Из формулы (2) видно что если Δ^2 представить в виде $\Delta = \Delta_0^2(1+\alpha)$ и разложить $1/[\Delta_0\sqrt{1+\alpha}]$ по степеням

$$\alpha = \frac{2(g_1+g_2)}{\Delta_0} + \left(\frac{r_1}{\Delta_0}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{\Delta_0}\right)^2 - 2\frac{b}{\Delta_0^2},$$

то, пользуясь известной формулой для возведения многочлена в степень и изменяя порядок суммирования по индексам r и q, получим:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta_0} + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_0^{q+1}} \sum_{r=E\left(\frac{q+1}{2}\right)}^{q} (-1)^r (2r-1)!! \sum_{v=0}^{q-r} z_{qrv}, \tag{4}$$

где

$$z_{qrv} = \left(\frac{1}{2}\right)^{q-r-v} \frac{1}{(q-r-v)!} (r_1^2 + r_2^2)^{q-r-v} \frac{(-1)^v}{v!} b^v \frac{1}{(2r-q)!} (g_1+g_2)^{2r-q}. \tag{5}$$

Относительно сходимости этого разложения справедливо все сказанное в нашей работе [3].

Приведем теперь разложение $1/\Delta$ до $q = 7$ включительно. Именно, выпишем все функции z_{qrv}.

Формулы (4) и (5) являются исходными для вычисления силовой функции притяжения двух тел. Из них непосредственно получаем

$$U = f\int_{P_1P_2} \frac{dm_1 dm_2}{\Delta} = f\int_{P_1P_2} \frac{\rho_1\rho_2 d\tau_1 d\tau_2}{\Delta} =$$

$$= f\frac{M_1M_2}{\Delta_0} + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_0^{q+1}} \sum_{r=E\left(\frac{q+1}{2}\right)}^{q} (-1)^r (2r-1)!! \sum_{v=0}^{q-r} U_{qrv} \tag{6}$$

Таблица функций $z_{qr\nu}$

$(-1)^r(2r-1)!!$	q	r	ν	$q-r-\nu$	$2r-q$	$z_{q\nu}$
—1	1	1	0	0	1	g_1+g_2
—1	2	1	0	1	0	$\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2)$
—1	2	1	1	0	0	$+b$
+3	2	2	0	0	2	$\frac{1}{2}(g_1+g_2)^2$
+3	3	2	0	1	1	$\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2)(g_1+g_2)$
Теже			1	0	1	$-b(g_1+g_2)$
—15	3	3	0	0	3	$\frac{1}{6}(g_1+g_2)^3$
+3	4	2	0	2	0	$\frac{1}{8}(r_1^2+r_2^2)^2$
			1	1	0	$-\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2)b$
			2	0	0	$+\frac{1}{2}b^2$
—15	4	3	0	1	2	$\frac{1}{4}(r_1^2+r_2^2)(g_1+g_2)^2$
			1	0	2	$-\frac{1}{2}b(g_1+g_2)^2$
+105	4	4	0	0	4	$\frac{1}{24}(g_1+g_2)^4$
—15	5	3	0	2	1	$\frac{1}{8}(r_1^2+r_2^2)^2(g_1+g_2)$
			1	1		$-\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2)b(g_1+g_2)$
			2	0		$\frac{1}{2}b^2(g_1+g_2)$
+105	5	4	0	1	3	$\frac{1}{12}(r_1^2+r_2^2)(g_1+g_2)^3$
			1	0	3	$-\frac{1}{6}b(g_1+g_2)^3$
—945	5	5	0	0	5	$\frac{1}{120}(g_1+g_2)^5$

$(-1)^r(2r-1)!!$	q	r	ν	$q-r-\nu$	$2r-q$	$z_{qr\nu}$
-15	6	3	0	3	0	$\frac{1}{48}(r_1^2+r_2^2)^3$
			1	2	0	$-\frac{1}{8}(r_1^2+r_2^2)b$
			2	1	0	$+\frac{1}{4}(r_1^2+r_2^2)b^2$
			3	0	0	$-\frac{1}{6}b^3$
$+105$	6	4	0	2	2	$\frac{1}{16}(r_1^2+r_2^2)^2(g_1+g_2)^2$
			1	1	2	$-\frac{1}{4}(r_1^2+r_2^2)b\,(g_1+g_2)^2$
			2	0	2	$\frac{1}{4}b^2(g_1+g_2)^2$
-945	6	5	0	1	4	$\frac{1}{48}(r_1^2+r_2^2)(g_1+g_2)^4$
			1	0	4	$-\frac{1}{24}b\,(g_1+g_2)^4$
$+10395$	6	6	0	0	6	$\frac{1}{720}(g_1+g_2)^6$
$+105$	7	4	0	3	1	$\frac{1}{48}(r_1^2+r_2^2)^3(g_1+g_2)$
			1	2	0	$-\frac{1}{8}(r_1^2+r_2^2)^2b\,(g_1+g_2)$
			2	1	0	$\frac{1}{4}(r_1^2+r_2^2)b^2(g_1+g_2)$
			3	0	0	$-\frac{1}{6}b^3(g_1+g_2)$
-945	7	5	0	2	3	$\frac{1}{48}(r_1^2+r_2^2)^2(g_1+g_2)^3$
			1	1	3	$-\frac{1}{12}(r_1^2+r_2^2)b\,(g_1+g_2)^3$
			2	0	3	$\frac{1}{12}b^2(g_1+g_2)^3$
$+10395$	7	6	0	1	5	$\frac{1}{240}(r_1^2+r_2^2)(g_1+g_2)^5$
			1	0	5	$-\frac{1}{120}b\,(g_1+g_2)^5$
-135135	7	7	0	0	7	$\frac{1}{5040}(g_1+g_2)^7$

(f — постоянная тяготения), где M_i — масса тела P_i ($i = 1, 2$) и

$$U_{qr\nu} = f \int\limits_{P_1P_2} z_{qr\nu}\rho_1\rho_2 d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= f \int\limits_{P_1P_2} \left(\frac{1}{2}\right)^{q-z-\nu} \frac{1}{(q-r-\nu)!}(r_2^2 + r_2^2)^{q-z-\nu} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} b^\nu \frac{1}{(2r-q)!}(g_1 +$$

$$+ g_2)^{2r-q}\rho_1\rho_2 d\tau_1 d\tau_2. \tag{7}$$

Отсюда видно, что силовая функция U зависит от эйлеровых углов только через посредство величин $U_{qr\nu}$ или в конечном счете через величины b и g_1, g_2, в которые эйлеровы углы входят через величины b_{mn} и $c_k^{(j)}$ соответственно. Эти последние зависят от эйлеровых углов только через посредство $a_{ik}^{(j)}$, причем, как показывают формулы (3), являются многочленами от них. В величины $a_{ik}^{(j)}$ эйлеровы углы входят в виде произведения их синусов и косинусов [1], и потому $a_{ik}^{(j)}$ можно представить в виде конечной суммы слагаемых, имеющих вид произведения некоторых рациональных чисел на синус или косинус линейной комбинации эйлеровых углов. То же самое можно сделать, очевидно, и для величин b_{mn} и $c_k^{(j)}$ и произведений их степеней.

Если в функции $U_{qr\nu}$ под интегралом произвести указанные там возведения в степень и выразить b и g_1, g_2 через b_{mn}, $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$, $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, то для U получится выражение, выведенное в [1]. Однако для ряда теоретических исследований, как уже упоминалось выше, полезно иметь разложение силовой функции U по функциям $U_{qr\nu}$ и изучать свойства самих функций $U_{qr\nu}$.

Рассмотрим теперь вид функций $U_{qr\nu}$ для некоторых частных случаев. Прежде всего рассмотрим, как эти функции зависят от масс тел M_1 и M_2. Для получения этих членов в $U_{qr\nu}$ достаточно возвести двучлены $r_1^2 + r_2^2$ и $g_1 + g_2$ в соответствующие степени и рассмотреть только те слагаемые, которые не зависят от координат какого-нибудь тела. Этот последний случай представится только при $\nu = 0$, так как в b входят координаты обоих тел. Поэтому от масс будут зависеть только функции U_{qr0}.

После соответствующих простых преобразований находим, что U_{qr0} зависят от M_1 и M_2 следующим образом:

$$U_{qr0} = fM_1 \int\limits_{P_2} \left(\frac{1}{2}\right)^{q-r} \frac{1}{(q-r)!} r_2^{2(q-r)} \frac{1}{(2r-q)!} g_2^{2r-q} \rho_2 d\tau_2 +$$

$$+ fM_2 \int\limits_{P_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{q-r} \frac{1}{(q-r)!} r_1^{2(q-r)} \frac{1}{(2r-q)!} g_1^{2r-q} \rho_1 d\tau_1 + U'_{qr0},$$

$$(2r \geqslant q \geqslant r),$$

где функции U'_{qr0} при $q \geqslant 1$ уже от масс не зависят. При $\nu > 0$ функции $U_{qr\nu}$ от масс не зависят.

Рассмотрим теперь, как $U_{qr\nu}$ зависят от моментов инерции первого порядка. Нетрудно видеть, что эта зависимость будет только для функции U'_{qr0} и U_{qr1}, то есть при $\nu = 0$, 1. Тем же приемом, как и в предыдущем случае, получим, что для названных функций эта зависимость будет иметь вид:

$$U'_{qro} = f\int_{P_1} g_1\rho_1 d\tau_1 \int_{P_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{q-r}\frac{1}{(q-r)!}\, r_2^{2(q-r)}\frac{1}{(2r-q-1)!}\, q_2^{2r-p-1}\rho_2 d\tau_2 +$$

$$+ f\int_{P_2} g_2\rho_2 d\tau_2 \int_{P_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{q-r}\frac{1}{(q-r)!}\, r_1^{2(q-r)}\frac{1}{(2r-q-1)!}\, g_1^{2r-q-1}\rho_1 d\tau_1 + U''_{qr0}$$

(при $2r = q$ функция U'_{qro} не зависит от моментов инерции первого порядка),

$$U_{qr1} = -f\int_{P_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{q-r-1}\frac{1}{(q-r-1)!}\, r_2^{2(q-r-1)}\frac{1}{(2r-q)!}\, g_2^{2r-q}\rho_2\int_{P_1} b\rho_1 d\tau_1 d\tau_2 -$$

$$- f\int_{P_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{q-r-1}\frac{1}{(q-r-1)!}\, r_1^{2(q-r-1)}\frac{1}{(2r-q)!}\, g_1^{2r-q}\rho_1\int_{P_2} b\rho_2 d\tau_1 d\tau_1 U'_{qr1}$$

(при $r = q$ U_{qr1} не зависит от моментов инерции первого порядка).

В этих равенствах функции U''_{gr0}, U'_{gr1} от моментов инерции первого порядка уже не зависят.

Выпишем также члены в U''_{qr0}, U'_{qr1}, U_{qr2}, которые являются функциями моментов инерции второго порядка. Пусть $q \geqslant 2$.

$$U''_{qr0} = f\int_{P_1} r_1^2\rho_1 d\tau_1 \int_{P_2}\frac{1}{2}^{q-r-1}\frac{1}{(q-r-1)!}\, r_2^{2(q-r-1)}\frac{1}{(2r-q)!}\, g_2^{2r-q}\rho_2 d\tau_2 +$$

(при $r = q$ этот член равен нулю)

$$+ f\int_{P_1}\left(\frac{1}{2}\right) g_1^2\rho_1 d_1\tau_1 \int_{P_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{q-r}\frac{1}{(q-r)!}\, r_2^{2(q-r)}\frac{1}{(2r-q-2)!}\, g_2^{2r-q-2}\rho_2 d\tau_2 +$$

(при $2r = q$, $q+1$ этот член равен нулю)

+ два аналогичных интеграла, получаемые перестановкой индексов „1“ и „2“ $+U'''_{qr0}$ (при $2r-2 \geqslant q \geqslant r+1$),

$$U'_{qr1} = -f\int_{P_2}\frac{1}{2}^{q-r-1}\frac{1}{(q-r-1)!}\, r_2^{2(q-r-1)}\frac{1}{(2r-q-1)!}\, g_2^{2r-q-1}\rho_2\int_{P_1} b g_1\rho_1 d\tau_1 d\tau_2 -$$

$$- f\int_{P_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{q-r-1}\frac{1}{(q-r-1)!}\, r_1^{2(q-r-1)}\frac{1}{(2r-q-1)!}\, g_1^{2r-q-1}\rho_1\int_{P_2} b g_2\rho_2 d\tau_2 d\tau_1 + U'_{qr1}$$

(при $r = q$ и $2r = q+1$ U'_{qr1} не зависит от моментов инерции второго порядка),

$$U_{qr2} = f\int_{P_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{q-r-2}\frac{1}{(q-r-2)!}\, r_2^{2(q-r-2)}\frac{1}{(2r-q!)}\, g_2^{2r-q}\rho_2\int_{P_1}\frac{1}{2}\, b^2\rho_1 d\tau_2 d\tau_1 +$$

$$+ f\int_{P_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{q-r-2}\frac{1}{(q-r-2)!}\, r_1^{2(q-r-2)}\frac{1}{(2r-q)!}\, g_1^{2r-q}\rho_1\int_{P_2}\frac{1}{2}\, b^2\rho_2 d\tau_2 d\tau_1 + U'_{qr2}$$

(при $r = q$, $q+1$ U_{qr2} не зависит от моментов инерции второго порядка).

Этот процесс можно было продолжить и дальше. Тогда каждое из $U_{qr\nu}$ представится в виде суммы слагаемых, имеющих вид произведения момента инерции одного из тел (порядка $\geqslant \nu$) на момент инерции второго тела (порядка также $\geqslant \nu$). Так как $U_{qr\nu}$ имеет размерность относительно длины q, то в случае, когда момент инерции первого тела имеет порядок s, момент инерции второго тела будет иметь порядок $q-s$. Если такие произведения с соответствующими коэффициентами и с одинаковыми порядками моментов инерции просуммировать и сумму обозначить через $U^{(s)}_{qr\nu}$, то

$$U_{qr\nu}=\sum_{s-\nu}^{q-v} U^{s}_{qr\nu}.$$

Выберем теперь оси $x^{(j)}_k$, скрепленные с телом P_j, главными и центральными. Тогда все моменты инерции первого порядка равны нулю. Также равны нулю моменты инерции второго порядка, если под интегралом будет произведение разноименных координат. Тогда

$$U_{qrv}=\sum_{s-\nu}^{q-v} U^{s}_{qrv},$$

где два штриха обозначают, что при суммировании должен быть пропущен случай $s=1$ и $s=q-1$ (если $\nu=0,1$). Кроме того, как видно из предыдущих формул, моменты инерции второго порядка приведутся к следующему виду:

$$U^{(2)}_{qr0}=f\int_{P_1} r_1^2\rho_1 d\tau_1\int_{P_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{q-r-1}\frac{1}{(q-r-1)!}r_2^{2(q-r-1)}\frac{1}{(2r-q)!}g_2^{2r-q}\rho_2 d\tau_2+$$

(при $2r=q,\ q+1$ этот член равен нулю),

$$+f\int_{P_1}\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{3}(c^{(1)}_k)^2(x^{(1)}_k)\right]\rho_1 d\tau_1\int_{P_2}\frac{1}{2}^{q-r}\frac{1}{(q-r)!}r_2^{2(q-r)}\frac{1}{(2r-q-2)!}g_2^{2r-q-2}\rho_2 d\tau_2$$

(при $2r=q,\ q+1$ этот член равен нулю),

$$U^{(2)}_{qr1}=-f\int_{P_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{q-r-1}\frac{1}{(q-r-1)!}r_2^{q-r-1}\frac{1}{(2r-q-1)!}g_2^{2r-q-1}\rho_2\times$$

$$\times\int_{P_1}\left[\sum_{m=1}^{3}\sum_{n-1}^{3}b_{mn}c^{(1)}_m C_n(x^{(1)}_m)^2(x^{(2)}_n)^2\right]\rho_1 d\tau_1 d\tau_2$$

(при $r=q$ и $2r=q$ этот член равен нулю),

$$U^{2}_{qr2}=f\int_{P_2}\left(\frac{1}{2}\right)r_2^{(q-r-2)}\frac{1}{(q-r-2)!}r_2^{2(q-r-2)}\frac{1}{(2r-q)!}g^{2r-q}\rho_2\int_{P_1}\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}b^2_{mn}$$

$$(x^1_m)^2\,(x^{(2)}_n)^2\,\rho_1 d\tau_1 d\tau_2$$

(при $r=q,\ q+1$ этот член равен нулю).

Таким образом, при этом выборе осей координат в общем случае несколько упростятся выражения только для U_{gr2}, U_{qr1}, U_{gr0}. Начальные члены разложения силовой функции для этого случая выписаны до $q=4$ в нашей работе [4]. Если имеется в виду получение начальных членов разложения, когда моменты инерции не главные и не центральные, то необходимо пользоваться таблицей функций z_{qr^ν}, приведенной в настоящей работе.

В заключение автор выражает глубокую благодарность коллективу кафедры небесной механики и гравиметрии, обсудившему эту работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яров-Яровой М. С. Вестн. МГУ, сер. мат., мех., астрон., физ., химии, № 5, 55, 1958.
2. Яров-Яровой М. С. Вестн. МГУ, сер. мат., мех., астрон. физ., химии, № 1, 87, 1958; № 2, 67, 1958.
3. Яров-Яровой М. С. Вестн. МГУ, сер. мат., мех., астрон., физ., химии, № 5, 63, 1958.
4. Яров-Яровой М. С. Вестн. МГУ, сер. мат., мех., астрон., физ., химии, № 6, 43, 1958.

Поступила в редакцию
17.3 1959 г.

Кафедра
небесной механики и гравиметрии