Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3—1959

ФИЗИКА

Н. В. МИЦКЕВИЧ

О СЛЕДСТВИЯХ ТРЕБОВАНИЯ ИНВАРИАНТНОСТИ ЛАГРАНЖИАНОВ В ОБЩЕКОВАРИАНТНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЕЙ

Требование инвариантности лагранжианов полей (мы покажем, что оно полностью эквивалентно инвариантности интеграла действия) ведет к целому ряду принципиальных следствий. С одной стороны, отсюда следует теорема о законах сохранения физических величин и их связи с инвариантностью относительно групп преобразований координат. С другой стороны, требование инвариантности жестко ограничивает структуру лагранжианов, и оказывается возможным предложить для ряда полей общий принцип, ведущий к построению нового варианта единой теории поля.

Рассмотрим сначала математическую задачу об аналитической записи инвариантности некоторой функции потенциалов и их первых производных, а также метрического тензора и его двух первых производных. Потенциалы полей обозначаются буквой A_B, где индекс B пробегает всю совокупность волновых функций. Использование метрического тензора $g_{\mu\nu}$ необходимо, так как без него невозможно построить нетривиальный инвариант.

Легко показать, что условие инвариантности указанной функции

$$L(A_B;\ A_{B,\alpha};\ g_{\mu,\nu\alpha};\ g_{\mu\nu,\alpha\beta}) \qquad (1)$$

$$\delta L = 0$$

может быть записано в виде

$$\delta^* \sqrt{-g} L + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\mathfrak{L} \delta x^\alpha) = 0, \qquad (2)$$

где мы положили $\mathfrak{L} = \sqrt{-g} L$.

Здесь изменение δ, вызванное преобразованием координат

$$x'^\alpha = x^\alpha + \delta x^\alpha, \qquad (3)$$

определяется как

$$\delta A_B = A'_B(x') - A_B(x), \qquad (4)$$

а операция δ^* — как

$$\delta^* A_B = \delta A_B - A_{B,\alpha}\delta x^\alpha . \tag{5}$$

Если теперь принять, что все рассматриваемые потенциалы преобразуются при бесконечно малых преобразованиях координат как

$$\delta A_B = a^\beta_{B,\alpha} \frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^\beta} \tag{6}$$

(тензоры и т. п.), то мы получим новую форму уравнения (2):

$$-\left\{\sqrt{-g} I_{B,\alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}T^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\sqrt{-g} I^B a^\beta_{B,\alpha} + \sqrt{-g} T^{\beta\nu}_{\alpha\nu}\right)\right\}\delta x^\alpha +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\sqrt{-g} U^\alpha_\sigma \delta x^\sigma + \sqrt{-g} M^{\alpha\tau}_\sigma \frac{\partial \delta x^\sigma}{\partial x^\tau} + \sqrt{-g} N^{\alpha\tau\beta}_\sigma \frac{\partial^2 \delta x^\sigma}{\partial x^\beta \partial x^\tau}\right\} = 0, \tag{7}$$

где использованы обозначения:

?

$$\sqrt{-g} T^{\mu\nu} = \sqrt{-g} T^{\mu\nu} - 2\frac{\sqrt{-g}L}{\partial g_{\mu\nu}}, \quad \sqrt{-g} M^B = \frac{\delta\sqrt{-g}L}{\delta A_B}, \tag{8}$$

$$\frac{\delta\sqrt{-g}L}{\delta A_B} = \frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial A_B} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial A_{B,\alpha}} + \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial A_{B,\alpha\beta}}, \tag{9}$$

$$\sqrt{-g} U^\alpha_\sigma = \sqrt{-g} L\delta^\alpha_\sigma + I^B a^\alpha_{B,\sigma} + \sqrt{-g} T^\alpha_\sigma - \sqrt{-g}\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial A_{B,\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial A_{B,\alpha\beta}} A_{B,\sigma} -$$

$$-\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial A_{B,\alpha\beta}} A_{B,\sigma\alpha} - \left(\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g_{\mu,\nu\alpha\beta}}\right) g_{\mu\nu,\sigma} - \frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g_{\mu\nu,\alpha\beta}} \cdot g_{\mu\nu,\sigma\beta}, \tag{10}$$

$$\sqrt{-g} M^{\alpha\tau}_\sigma = \frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial A_{B,\alpha}} a^\tau_{B,\sigma} - 2\left(\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g_{\nu,\tau\alpha}} - \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g_{\nu\tau,\alpha\beta}}\right) g_{\nu\sigma} -$$

$$-\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g_{\mu\nu,\alpha\tau}} g_{\mu\nu,\sigma} - 2\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g_{\nu\tau,\alpha\beta}} g_{\nu\sigma,\beta}, \tag{11}$$

$$\sqrt{-g} N^{\alpha\tau\beta}_\sigma = -2\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g_{\nu\tau,\alpha\beta}} g_{\nu\sigma}. \tag{12}$$

Из произвольности преобразований δx^α вытекает, что уравнение (7) распадается на три независимых уравнения:

$$\sqrt{-g} U^\alpha_\sigma = -\frac{\partial\sqrt{-g} M^{\beta\alpha}_\sigma}{\partial x^\beta}, \tag{13}$$

$$\sqrt{-g} M^{\beta\tau}_\sigma = \frac{\partial\sqrt{-g} U^{\alpha\tau\beta}_\sigma}{\partial x^\alpha} + \sqrt{-g} F^{\beta\tau}_\sigma, \tag{14}$$

$$\sqrt{-g} F^{\{\beta\tau\}}_\sigma = 0,$$

$$\sqrt{-g} N^{\{\alpha\tau\beta\}}_\sigma = 0. \tag{15}$$

и тождество, не зависящее от инвариантности L,

$$\sqrt{-g} U^B A_{B,\alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{-g} T^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(I^B a^\beta_{B,\alpha} + \sqrt{-g} T^\beta_\alpha\right) = \frac{\partial\sqrt{-g}U}{\partial x^\alpha_\alpha}. \tag{16}$$

Фигурными скобками обозначается симметризация по всем индексам, заключенным в скобки. Частные производные мы обозначаем с помощью запятой.

Из условий инвариантности L (13—15) следует соотношение:

$$\frac{\partial \sqrt{-g}U_{\sigma}^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = 0. \tag{17}$$

Мы считаем $L = L_t$ лагранжианом системы полей A_B и гравитационного поля $g_{\mu\nu}$. Тогда естественно разбить этот лагранжиан на сумму

$$L_t = L_f + L_g, \tag{18}$$

где слагаемое L_g — лагранжиан чистого гравитационного поля — равно

$$L_g = L(0;\ 0;\ g_{\mu\nu};\ g_{\mu\nu,\alpha};\ g_{\mu\nu,\alpha\beta}). \tag{19}$$

Из инвариантности этих слагаемых следует, что все введенные выше величины — $\sqrt{-g}U_{\beta}^{\alpha}$, $\sqrt{-g}M_{\iota}^{\sigma\tau}$, и т. д. — распадаются на триады $\sqrt{-g}U_{t\beta}^{\alpha}$, $\sqrt{-g}U_{f\beta}^{\alpha}$, $\sqrt{-g}U_{g\beta}^{\alpha}$; $\sqrt{-g}M_{t\alpha}^{\sigma\tau}$, $\sqrt{-g}M_{f\alpha}^{\sigma\tau}$, $\sqrt{-g}M_{g\alpha}^{\sigma\tau}$ и т. д. Так же распадаются все полученные соотношения. В дальнейшем в уравнениях, верных одновременно для всей триады, мы не будем употреблять индексов t, f и g.

Если принять, что интеграл действия инвариантен, то есть

$$\delta I = \int\limits_{R'} \sqrt{-g}L'(dx') - \int\limits_{R} \sqrt{-g}L(dx) = 0, \tag{20}$$

при произвольных границах интегрирования, то при учете якобиана преобразования δx^{α} с точностью до малых первого порядка получим

$$\delta I = \int\limits_{R} \left\{ \delta^{*}\sqrt{-g}L + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (\sqrt{-g}L\, \delta x^{\alpha}) \right\}(dx) = 0, \tag{21}$$

а произвольность R приводит нас непосредственно к уравнению (2). Тем самым доказана необходимость инвариантности L для инвариантности интеграла действия. Достаточность очевидна.

Перейдем к изучению следствий инвариантности лагранжиана. Прежде всего получим законы сохранения в общерелятивистской форме. Как известно, впервые законы сохранения были связаны с инвариантностью интеграла действия в работе Нётер [1]. Здесь мы получим, кроме этой связи, еще и естественную классификацию этих законов и выведем некоторые новые законы сохранения.

В специальной теории относительности дифференциальные законы сохранения всегда записываются в виде уравнений непрерывности (равенства нулю четырехмерной дивергенции сохраняющейся величины). Эта величина, как правило, является тензором. Однако при обобщении на риманово пространство переход обычной дивергенции в ковариантную не представляется удовлетворительным, так как такая запись не имеет смысла закона сохранения при интегрировании и использовании теоремы Гаусса—Остроградского. Поэтому Эйнштейн и последующие авторы путем учета баланса гравитационной энергии приводили законы сохранения к виду обычной дивергенции. Вместе с тем сохраняющаяся таким образом величина, очевидно, не должна обладать тензорными свойствами при произвольных преобразованиях координат вследствие принципа эквивалентности (так как гравитационное поле всегда может быть устранено, а вместе с ним — и соответствующая доля энергии). Лоренц и Леви-Чивита в своей дискуссии с Эйнштейном пытались доказать тензорный характер сохраняющихся величин (энергии-импульса), и именно в этом заключается их ошибка. Однако и конкретный результат Эйнштейна не представляется нам вполне правильным.

Законы сохранения можно разбить на «сильные» (выполняющиеся вне зависимости от выполнения уравнений полей) и слабые, которые выполняются в силу одновременной справедливости как требования инвариантности лагранжиана, так и уравнений полей. Комбинированием уравнений (13—15) можно получить такие, «сильные» выражения, как (17):

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\sqrt{-g}R^{\beta\alpha}_{\sigma}=\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\sqrt{-g}U^{\beta}_{\sigma}x^{\alpha}+\sqrt{-g}M^{\beta\alpha}_{\sigma}\right)=0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\beta\sqrt{-g}K^{\beta\sigma\tau}_{\alpha}=\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\sqrt{-g}U^{\beta}_{\alpha}x^{\sigma}x^{\tau}+\sqrt{-g}M^{\delta\sigma}_{\alpha}x^{\sigma}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{-g}M^{\beta\sigma}_{\alpha}x^{\tau}+\sqrt{-g}N^{\beta\sigma\tau}_{\alpha}+N^{\beta\tau\sigma}_{\alpha}\right)=0. \tag{23}$$

Физический смысл их мы выясним несколько позже. Заметим сейчас, что мы используем, кроме прочих нековариантных величин, «радиус-вектор» x^{α}, что не противоречит основным идеям работы.

Запишем уравнения полей:

$$\frac{\delta L_t}{\partial A_B}=\frac{\delta L_f}{\partial A_B}=0 \tag{24}$$

и гравитационного поля:

$$T^{\mu\nu}_{t}-T^{\mu\nu}_{f}+T^{\mu\nu}_{g}=0. \tag{25}$$

Мы назовем симметричным (метрическим [2]) тензором энергии-импульса триаду $T^{\mu\nu}$. Из уравнений (16), (17) и (24) следует, что T сохраняется, вообще говоря, в смысле ковариантной дивергенции

$$T^{\mu\nu};\nu=0, \tag{26}$$

а для полной системы — и в точном смысле

$$\frac{\partial\sqrt{-g}T^{\alpha}_{t\beta}}{\partial x^{\alpha}}=0. \tag{27}$$

Это в точности совпадает с результатом Лорентца и Леви-Чивита. Возражение Эйнштейна, указывавшего, что сохранение равной нулю величины не имеет глубокого физического смысла, в нашем случае отпадает, так как имеют место еще точные законы сохранения неравных нулю величин, о которых сейчас и пойдет речь.

Мы называем триаду $\sqrt{-g}U^{\alpha}_{\beta}$ спиновыми долями энергии-импульса и определяем канонический «квазитензор» энергии-импульса как

$$\sqrt{-g}\,t^{\alpha}_{\beta}=\sqrt{-g}T^{\alpha}_{\beta}-\sqrt{-g}U^{\alpha}_{\beta} \tag{28}$$

также для всех трех случаев. Таким образом, спиновая энергия служит для симметризации канонического квазитензора, как и в специальной релятивистской теории [2]. При этом мы не пользовались «тетраподами», как это делают обычно [3].

Очевидно, что точному сохранению удовлетворяет лишь $\sqrt{-g}\,t^{\alpha}_{t\beta}$ из всей триады $\sqrt{-g}\,t^{\alpha}_{\beta}$.

Вследствие того что плотность скалярной кривизны можно разбить на два слагаемых, одно из которых имеет дивергенциальный вид, а другое не содержит вторых производных метрического тензора, часто ошибочно называют лагранжианом гравитационного поля именно это второе слагаемое. Однако оно не может дать, например, общих законов сохранения, так как получаемый с его помощью интеграл действия неинвариантен. Однако оба слагаемых являются аффинными скалярами, так что они позволяют выделить сохраняющиеся величины типа энергии, например,

$$\sqrt{-g}U^{\alpha}_{\lambda\beta} = \lambda\delta^{\alpha}_{\beta} - \frac{\partial\Lambda}{\partial g_{\mu v,\alpha}} g_{\mu v,\beta} - \sqrt{-g}F^{\alpha}_{f\beta}. \tag{29}$$

Λ — неинвариантный «лагранжиан» гравитационного поля. Величина $\sqrt{-g}U^{\alpha}_{\beta}$ с точностью до знака равна «псевдотензору энергии-импульса системы полей», введенному Эйнштейном, и аналогична поэтому спиновой доле гравитационной энергии. Совершенно очевидно, что ошибка Эйнштейна заключалась в сложении двух принципиально различных величин типа энергии: симметричного тензора полей и несимметричного (и к тому же неполного) канонического квазитензора гравитационного поля:

$$\sqrt{-g}F^{\alpha}_{f\beta} + \sqrt{-g}\,t^{\alpha}_{g\beta} = -\sqrt{-g}U^{\alpha}_{g\beta}. \tag{30}$$

Связь полученных и естественно систематизированных величин типа энергии с инвариантностью лагранжиана относительно трансляций координат становится очевидной при подстановке преобразований

$$\delta x^{\alpha} = \text{const} \tag{31}$$

в уравнение (7).

Переходя к более сложным преобразованиям

$$\delta x^{\alpha} = x^{\beta}\,\delta\omega^{\alpha}_{\beta},\ \delta\omega^{\alpha}_{\beta} = \text{const}, \tag{32}$$

частным случаем которых является обычный поворот, мы получим точный закон сохранения для $l^{\alpha\varkappa}_{t\sigma} = -\sqrt{-g}R^{\alpha\beta}_{t\sigma}$. Для всей же триады $l^{\sigma\beta}_{\sigma}$ имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\, l^{\beta\sigma}_{\alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}F^{\mu v}g_{\mu v,\alpha}x^{\sigma} - \sqrt{-g}F^{\sigma}_{\beta} = 0. \tag{33}$$

При антисимметризации по индексам σ и α мы получаем закон сохранения, но только в специально релятивистской области. Этот закон сохранения в точности совпадает с сохранением обычного момента импульса. Таким образом, целесообразно назвать величину

$$l^{\beta\sigma}_{\sigma} = \sqrt{-g}\,t^{\beta}_{\alpha}x^{\sigma} - \sqrt{-g}M^{\beta\sigma}_{\alpha} \tag{34}$$

обобщенным моментом импульса в общерелятивистской формулировке.

Еще более сложные преобразования координат, представляющие собой, в частности, переход к равномерно ускоренным системам,

$$\delta x^{\alpha} = x^{\sigma}x^{\tau}\,\delta\Omega^{\alpha}_{\sigma\tau},\ \delta\Omega^{\alpha}_{\sigma\tau} = \text{const}, \tag{35}$$

ведут к закону сохранения (23) величины, которую мы назовем бимоментом. При дальнейшем усложнении преобразований без труда получим новые сохраняющиеся величины — мультимоменты.

Из структуры $l^{\beta\sigma}_{\alpha}$ видно, что величина $\sqrt{-g}M^{\beta\sigma}_{\alpha}$ играет роль обобщенного спина (собственно спин получается при антисимметризации по σ и α). Аналогично величину $\sqrt{-g}N^{\alpha\beta\gamma}_{\sigma}$ назовем биспином (собственным бимоментом). Если бы у нас в лагранжианах содержались высшие производные потенциалов, то мультимоменты строились бы из все новых величин по мере роста их порядка. Но в нашем случае все величины, следующие за бимоментом, уже не включают принципиально новых членов, а комбинируются из $\sqrt{-g}\,t^{\alpha}_{\beta}$, $\sqrt{-g}M^{\sigma\tau}_{\alpha}$, $\sqrt{-g}N^{\alpha\beta\gamma}_{\sigma}$ и x^{α}.

Вообще необходимо подчеркнуть, что распространено предубеждение против включения в лагранжиан вторых производных потенциала, так как это якобы приводит к уравнениям высших порядков. Однако, очевидно, что если вторые производные будут входить в лагранжиан линейно и в коэффициентах при них не будут фигурировать производные потенциала, а только сам потенциал, то уравнения будут не выше второго порядка. Пример этого — случай гравитационного поля.

Сформулируем теперь принцип простоты и определим с его помощью лагранжианы гравитационного и электромагнитного полей. Совершенно ясно, что исходя из одного только требования инвариантности лагранжианов невозможно однозначно вычислять конкретные формы физически ценных инвариантов. Для этого нужно добавить некоторые некинематические предположения. Итак, мы будем искать функцию L переменных A_B, $A_{B;\alpha}g^{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$. $g_{\mu\nu,\alpha}, g_{\mu\nu,\alpha\beta}$ из класса целых рациональных функций. Потребуем, чтобы при варьировании интеграла действия, построенного с помощью такого лагранжиана, следовали дифференциальные (а не алгебраические) уравнения. Тогда принцип простоты гласит:

1. L должно быть функцией минимального числа переменных.

2. L должно быть функцией низшей степени этих переменных.

3. Массовый член (член, не зависящий от производных потенциалов) отбрасывается, если он несуществен для инвариантности.

Последний пункт добавлен для большей однозначности построения. Кроме того, нам представляется, что класс полей, кванты которых не несут массы покоя, является в некотором смысле наиболее элементарным классом, определяемым в основном кинематическими свойствами. Так как предлагаемый единый принцип является лишь первым шагом построения нового варианта единой теории полей, то мы ограничиваем его область применимости этим простейшим классом.

При определении лагранжиана гравитационного поля отметим, что без использования вторых производных метрического тензора может быть «построен» лишь равный нулю инвариант. Поэтому мы включаем в рассмотрение вторые производные. Согласно условию (15), можно записать

$$\sqrt{-g}L^{\{\alpha\tau\beta\}}_{g\sigma} = -2g_{\sigma\nu}\frac{\partial\sqrt{-g}L_g}{\partial g_{\nu\{\tau\alpha\beta\}}} = 0, \tag{36}$$

откуда, учитывая неравенство нулю детерминанта метрического тензора,

$$\frac{\partial L_g}{\partial g_{\{\tau,\alpha\beta\}}} = 0. \tag{37}$$

Из $g^{\eta\nu}$, согласно принятым условиям, легко построить простейшую комбинацию, удовлетворяющую (37):

$$\frac{\partial L_g}{\partial g_{\nu\tau,\alpha\beta}} = K\sqrt{-g}\,(2g^{\tau\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\alpha\nu}g^{\tau\beta} - g^{\beta\nu}g^{\alpha\tau}). \tag{38}$$

Отсюда можно легко определить две величины:

$$\sqrt{-g}N_{\sigma}^{\alpha\tau\beta}=2k\sqrt{-g}\left(2g^{\alpha\beta}\delta_{\sigma}^{\tau}-g^{\tau\beta}\delta_{\sigma}^{\alpha}-g^{\alpha\tau}\delta_{\sigma}^{\beta}\right). \tag{39}$$

и

$$L_{II}=2K\left(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}-g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\right)g_{\mu\nu,\alpha\beta}, \tag{40}$$

где L_{II} — часть лагранжиана, зависящая от второй производной $g_{\mu\nu}$.

Подставляя (38) и (39) соответственно в (11) и (14), получим два выражения для $\sqrt{-g}M_{\sigma}^{\alpha\tau}$, сравнивая которые мы определяем $\frac{\partial L_g}{\partial g_{\tau\nu,\beta}}$ с точностью до антисимметричного слагаемого $\sqrt{-g}F_{\sigma}^{\tau\beta}$. Чтобы избавиться от последнего, мы симметризуем получившееся выражение по τ и β. При переходе к символам Кристоффеля получим

$$\frac{\partial\sqrt{-g}L_g}{\partial\Gamma_{\alpha,\tau\beta}}=4K\sqrt{-g}\,\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\left(g^{\mu\nu}g^{\tau\beta}-g^{\tau\mu}g^{\beta\nu}\right), \tag{41}$$

откуда остальная часть лагранжиана получается равной:

$$L_{I}=2K\left(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}-g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\right)g^{\sigma\tau}\,\Gamma_{\sigma,\mu\nu}\Gamma_{\tau,\alpha\beta}. \tag{42}$$

Легко проверить, что при $K=+1/2$ полученный лагранжиан гравитационного поля $L_g=L_I+L_{II}$ точно совпадает со скалярной кривизной R.

Мы выпишем фундаментальные величины, характеризующие гравитационное поле: спин

$$-\sqrt{-g}\,M_{g\sigma}^{\alpha\tau}=\sqrt{-g}\left(\Gamma_{\omega\varepsilon}^{\tau}g^{\omega\varepsilon}\delta_{\sigma}^{\alpha}+\Gamma_{\sigma\omega}^{\omega}g^{\alpha\tau}-2\Gamma_{\sigma\omega}^{\alpha}g^{\tau\omega}\right), \tag{43}$$

спиновую энергию

$$-\sqrt{-g}\,U_{g\sigma}^{\alpha}=\sqrt{-g}\left(g^{\omega\lambda}g^{\alpha\varepsilon}-g^{\omega\varepsilon}g^{\alpha\lambda}\right)\left(g_{\lambda\sigma,\omega\varepsilon}+\Gamma_{\omega\varepsilon}^{\nu}\Gamma_{\lambda,\sigma\nu}-\Gamma_{\omega\varepsilon}^{\nu}\Gamma_{\lambda,\nu\sigma}\right), \tag{44}$$

симметричный тензор энергии-импульса

$$T_{g}^{\alpha\beta}=-g^{\beta\sigma}\left\{R\delta_{\sigma}^{\alpha}-\left(g^{\omega\varepsilon}g^{\alpha\lambda}-g^{\omega\lambda}g^{\alpha\varepsilon}\right)\left(g_{\lambda\sigma\omega\varepsilon}+g_{\omega\varepsilon,\lambda\sigma}+2\Gamma_{\omega\varepsilon}^{\nu}\Gamma_{\nu,\lambda\sigma}\right)\right\} \tag{45}$$

и канонический квазицензор

$$\sqrt{-g}\,t_{g,\sigma}^{\alpha}=-\sqrt{-g}\left[R\delta_{\sigma}^{\alpha}-\left(g^{\omega\varepsilon}g^{\alpha\lambda}-g^{\omega\lambda}g^{\alpha\varepsilon}\right)\left(g_{\omega\varepsilon,\lambda\sigma}+\Gamma_{\omega\varepsilon}^{\nu}\Gamma_{\nu\lambda\sigma}+\Gamma_{\omega\varepsilon}^{\nu}\Gamma_{\lambda,\nu\sigma}\right)\right]. \tag{46}$$

Перейдем к электродинамике. Согласно принципу простоты рассмотрим лагранжиан, зависящий лишь от $A_{\mu\nu}$ и от $g_{\mu\nu}$. Заметим, что ковариантная производная должна считаться величиной более сложной, чем обычная частная, так как в нее входят еще производные метрического тензора. Итак, согласно (14), мы получим:

$$\frac{\partial L_e}{\partial A_{\tau,\alpha}}+\frac{\partial L_e}{\partial A_{\alpha,\tau}}=0, \tag{47}$$

откуда непосредственно следует, что лагранжиан электромагнитного поля L_e может зависеть лишь от комбинаций $H_{\mu\nu}=A_{\nu,\mu}-A_{\mu\nu}$, то есть от напряженностей поля. Простейшая функция, не обладающая свободными индексами, есть

$$L_e=-H_{\mu\nu}H_{\alpha\beta}\,g^{\mu\alpha}g^{\beta\nu}. \tag{48}$$

Это — известный общековариантный лагранжиан поля Максвелла.

Электромагнитное поле характеризуют следующие величины: обобщенный спин

$$\sqrt{-g}\, M^{\alpha\tau}_{1\sigma} = -4\sqrt{-g} A_\sigma H^{\tau\alpha}, \tag{49}$$

спиновая энергия

$$\sqrt{-g}\, U^{\tau}_{1\sigma} = -4\sqrt{-g} A_{\sigma,\alpha} H^{\alpha\tau}, \tag{50}$$

симметричный тензор энергии-импульса

$$\underset{e}{T}^{\mu\nu} = H^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - 4H^{\alpha\mu} H_{\alpha\lambda} g^{\lambda\nu} \tag{51}$$

и канонический квазитензор

$$\sqrt{-g}\; t^{\tau}_{e\sigma} = \sqrt{-g}\,(H^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}\delta^{\tau}_{\sigma} + 4A_{\alpha,\sigma} H^{\alpha\tau}) \tag{52}$$

Обобщая теорию мероопределения Ламэ [4, 5], нетрудно показать, что принцип простоты также однозначно позволяет вычислить и лагранжиан спинорного поля нейтрино. Лагранжиан скалярного поля определяется элементарно, и мы на нем не останавливаемся. Любопытно, что поле, потенциал которого преобразуется как скалярная (или спинорная) плотность, в спецрелятивистском приближении оказывается неизбежно нелинейным, несмотря на использование принципа простоты. Нелинейность напоминает использованную в работах Гейзенберга, Иваненко, Шиффа, Тирринга [6], но отличается от нее добавлением нелинейного по производным члена. Естественно, что константы при нелинейных членах определяются при этом однозначно через гравитационную постоянную (и массу покоя квантов в более общем случае).

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить проф. Д. Д. Иваненко за постоянный интерес к работе, проф. Х. Я. Христова за много ценных критических советов, проф. Ю. Б. Румера и доктора Э. Шмутцера за интересные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Noether E. Götting. Nachr., 235, 1918.
2. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля, изд. 2. ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
3. Belinfante F. J. Physica, **6**, 887, 1939.
4. Румер Ю. Б. Исследования по пятиоптике. ГИТТЛ, М., 1956.
5. Соколов А. А., Иваненко Д. Д. Квантовая теория поля. ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
6. Heisenberg W. Z. Naturf., **10a**, 425, 1955; Иваненко Д., Курдгеладзе Д., Ларин С. ДАН СССР, 88, 245, 1953; Schiff L. I. Phys. Rev., **84**, 1, 1951; Thirring W. Z. Naturf., **7a**, 63, 1952.

Поступила в редакцию
11.6 1957 г.

Кафедра статистической физики и механики