Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 1 — 1962

П. С. ЛАНДА, Р. Л. СТРАТОНОВИЧ

К ТЕОРИИ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ПЕРЕХОДОВ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ ИЗ ОДНОГО СТАЦИОНАРНОГО СОСТОЯНИЯ В ДРУГОЕ

Излагаются приближенные методы вычисления вероятности перехода из одного состояния в другое сложных нелинейных квазиконсервативных колебательных систем, имеющих два устойчивых состояния равновесия и находящихся под воздействием слабого шума.

Многие физические и радиотехнические задачи со случайными воздействиями сводятся к статистической задаче о вероятности достижения границы броуновской частицей, движущейся в некотором поле сил. Частные примеры таких задач рассматривались в ряде работ.

Так, в работах [1, 2] исследовалась задача о возбуждении и срыве автоколебаний в генераторе под влиянием шумов; в [3, 4] рассматривались вопросы устойчивости некоторых систем автоматического управления при наличии случайных возмущений; в [5] был проведен расчет вероятности потери цели автодальномером в радиолокаторе; в [6] вычислена вероятность потери электронов в синхротроне вследствие флуктуационного характера излучения; в [7] аналогичные методы применялись для вычисления скорости химических реакций и т. п.

Несмотря на многообразие физической сущности систем, приведенных в качестве примеров, процессы, протекающие в них, имеют много общего. Все эти системы принадлежат к классу нелинейных колебательных систем, имеющих два или несколько устойчивых стационарных режимов, например, состояние покоя и режим автоколебаний (предельный цикл). В отсутствие флуктуаций система, находясь в одном стационарном режиме, не может перейти в другой без каких-либо внешних воздействий. Наличие малых случайных возмущений приводит к тому, что система начинает совершать малые флуктуационные колебания вблизи одного из стационарных состояний и время от времени переходит из одного состояния в другое. Если флуктуации достаточно малы, то указанные переходы будут происходить очень редко и система достаточно долго будет оставаться в одном из стационарных режимов, так что к моменту перехода в ней успевает установиться стационарное распределение вероятностей.

Естественно, что при рассмотрении подобных систем возникает задача о вычислении вероятности перехода из одного режима в другой.

В настоящей работе излагаются приближенные методы решения такой задачи, которые могут быть непосредственно применены для квазиконсервативных нелинейных систем следующих типов:

а) слабонелинейные системы со многими степенями свободы, процессы в которых близки к гармоническим колебаниям или к сумме гармонических колебаний с далекими друг от друга частотами,

б) системы с сильной нелинейностью, описываемые уравнением типа

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + f(x) = F(t), \quad \text{причем} \quad \gamma \ll \left(\frac{df}{dx}\right)^{1/2}_{\text{среднее}}.$$

В обоих случаях приближенно можно получить дифференциальное уравнение первого порядка со случайной правой частью, описывающее поведение некоторой величины z, характеризующей колебания в системе. Например, величина z может являться медленно меняющейся амплитудой колебаний одной из координат системы или же полной энергией колебаний, которая в силу квазиконсервативности также будет медленно меняться.

Будем считать, что переход системы из одного состояния в другое характеризуется переходом величины z через некоторую границу $z=z_1$, разделяющую эти два состояния (неустойчивый цикл). Задача сводится к вычислению вероятности такого перехода.

Расчет вероятности перехода

Рассмотрим уравнение

$$\dot{z} = \varphi(z, \xi), \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — шум, действующий на систему, а среднее значение правой части уравнения $\langle\varphi(z, \xi)\rangle = f(z)$ обращается в нуль в точках $z=z_1$ и $z=z_0$ и отрицательно при $z_0<z<z_1$. Это означает, что точка z_0 является устойчивым состоянием равновесия для системы, а z_1— неустойчивым.

Если время корреляции шума $\xi(t)$ мало по сравнению с длительностью переходных процессов в системе, то случайное воздействие в правой части (1) можно заменить эквивалентным белым шумом $\zeta(t)$ (см. [8]) со средним значением $f(z)$ и функцией корреляции

$$K(\tau) = N(z)\,\delta(\tau),$$

где

$$N(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [\langle\varphi(z, \xi)\,\varphi_\tau(z, \xi)\rangle - f^2(z)]\,d\tau,$$

$\varphi(z, \xi)$ — значение функции φ в момент t, $\varphi_\tau(z, \xi)$ — значение функции φ в момент $t+\tau$.

Так как при сделанных выше предположениях относительно характера действующего шума величина z представляет собой марковский процесс, то плотность распределения вероятности для z удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}[f(z)\,w(z, t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}[N(z)\,w(z, t)]. \tag{2}$$

Как известно, стационарное решение этого уравнения имеет вид

$$w(z)=\frac{C}{N(z)}e^{\psi(z)}, \tag{3}$$

где

$$\psi(z)=2\int\frac{f(z)'}{N(z)}dz, \tag{4}$$

а постоянная C определяется из условия нормировки.

Для рассматриваемых систем функция $f(z)$ такова, что в распределении $w(z)$ наблюдаются два или несколько ярко выраженных максимумов, один из которых расположен в точке $z=z_0$.

В дальнейшем нас будет интересовать переход системы из какой-либо точки z', заключенной в области $z_2 \leqslant z' \leqslant z_1$, где $z_2 \leqslant z_0$, через границу $z=z_1$.

Очевидно, что при достаточно малом шуме вероятность перехода через границу не должна зависеть от начального положения точки, если только эта точка не расположена слишком близко к границе. Это связано с тем, что до перехода через границу точка в течение длительного времени будет оставаться вблизи стационарного состояния, из которого происходит переход, в результате чего начальные условия успеют забыться, т. е. фактически произойдет усреднение вероятности перехода по стационарному распределению (3).

Пусть $w(z,z',t)$ — решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$w(z,z',0)=\delta(z-z');\quad w(z_1,z',t)=0.$$

Тогда вероятность того, что z не достигнет границы $z=z_1$ за время t, находясь первоначально в положении z', равна

$$p(t,z')=\int_{z_2}^{z_1}w(z,z',t)\,dz. \tag{5}$$

Точное решение уравнения (2) в большинстве случаев получить не удается. Однако при малом шуме существует способ нахождения приближенного решения уравнения (2) и, следовательно, вероятности достижения границы. На этом способе мы подробно остановимся ниже.

Как показано в работе [9], вероятность $p(t, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t}=f(z)\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{2}N(z)\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \tag{5}$$

Дифференцируя обе части уравнения по t, умножив на e^{ivt} и интегрируя затем по t от 0 до ∞, получим уравнение для характеристической функции

$$-iv\,\Theta=f(z)\frac{d\Theta}{dz}+\frac{1}{2}N(z)\frac{d^2\Theta}{dz^2},$$

где

$$\Theta(iv,z)=\int_0^\infty\frac{dp(t,z)}{dt}e^{ivt}\,dt. \tag{6}$$

Из уравнения (7) легко вывести уравнение для различных моментов распределения, учитывая, что

$$\Theta(iv, z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (iv)^k m_k(z).$$

В частности, для математического ожидания времени достижения границы точкой, находящейся в начальный момент в положении z, получаем уравнение, имеющееся в работе [9],

$$\frac{1}{2} N(z) \frac{d^2M}{dz^2} + f(z) \frac{dM}{dz} + 1 = 0. \tag{8}$$

Остановимся вкратце на граничных условиях для функции $M(z)$. Очевидно, что если в начальный момент точка находилась в положении z_1, то для нее математическое ожидание времени достижения границы равно нулю, т. е. $M(z_1)=0$. Второе граничное условие не столь очевидно. Однако в том случае, когда границу $z=z_2$ можно считать идеально отражающей и, кроме того, выполняются условия $N(z_2)\neq 0$, $|f(z_2)|<\infty$ и $z_2 \neq -\infty$, легко показать, что $\left.\frac{dM}{dz}\right|_{z=z_2}=0$. Действительно, при указанных условиях функции $N(z)$ и $f(z)$ можно продолжить влево от точки z_2 так, чтобы $N(z)=N(2z_2-z)$ и $f(z)=-f(2z_2-z)$. При этом функция $M(z)$ будет симметричной относительно точки z_2. Вследствие диффузии и конечности среднего значения скорости $f(z)$ в точке z_2 функция $M(z)$ должна иметь непрерывную производную. Отсюда непосредственно следует равенство нулю производной $\frac{dM}{dz}$ в точке z_2.

При невыполнении хотя бы одного из указанных выше условий граничным условием для $M(z)$ в точке z_2 является просто условие ограниченности по модулю, т. е. $|M(z_2)| < \infty$.

Как известно (см. [9]), решение уравнения (8) при условии $M(z_1)=0$ имеет вид

$$M(z) = \int_{z}^{z_1} \left\{ \int_{z_2}^{z'} \frac{2}{N(z)} e^{\psi(z)} dz \right\} e^{-\psi(z')} dz' + C \int_{z}^{z_1} e^{-\psi(z')} dz', \tag{9}$$

где $\psi(z)$ задается формулой (4), а постоянная C определяется из второго граничного условия.

В частности, при

$$\left.\frac{dM}{dz}\right|_{z=z_2} = 0, \quad C = 0$$

и

$$M(z) = \int_{z}^{z_1} \left\{ \int_{z_2}^{z'} \frac{2}{N(z)} e^{\psi(z)} dz \right\} e^{-\psi(z')} dz'. \tag{10}$$

При достаточно малом шуме выражение (10) для $M(z)$ можно упростить. Функция $e^{-\psi(z')}$ имеет максимум в точке $z'=z_1$ и при малом N быстро убывает при удалении от этой точки. Так как в свою очередь подынтегральное выражение в фигурных скобках имеет существенную величину лишь вблизи $z=z_0$, то при z', близком к z_1, оно меняется очень мало и поэтому при вычислении интеграла (10) в выражении, стоящем в фигурных скобках, можно положить $z'=z_1$. Тогда будем иметь

$$M(z) \approx \int_{z_2}^{z_1} \frac{2}{N(z')} e^{\psi(z')} dz' \int_{z}^{z_1} e^{-\psi(z')} dz'. \tag{11}$$

При малом шуме полученные здесь интегралы можно приближенно вычислить методом, аналогичным методу перевала. Для этого в первом интеграле разложим функцию $\psi(z)$ в ряд относительно точки z_0, а во втором относительно z_1, учитывая, что функция $\psi(z)$ в точках z_0 и z_1 имеет экстремум. Тогда, ограничиваясь членами ряда со второй производной и взяв бесконечные пределы интегрирования, что можно делать при условиях

$$|z_1 - z_0| \gg \sqrt{|K(z_0)|}, \quad |z_2 - z_0| \gg \sqrt{|K(z_0)|};$$

$$|z - z_1| \gg \sqrt{|K(z_1)|}, \tag{12}$$

где

$$K(z) = \left\{2 \frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{N(z)}\right]\right\}^{-1},$$

получим

$$M(z) = \pi \frac{\sqrt{|K(z_0) K(z_1)|}}{N(z_0)} e^{\psi(z_0) - \psi(z_1)}. \tag{13}$$

(При выводе этой формулы предполагалось, что $N(z)$ является медленно меняющейся функцией по сравнению с $\exp[\psi(z)]$.)

Рассмотрим теперь другой способ вычисления вероятности достижения границы и математического ожидания времени достижения, который был использован ранее в работах [1, 3, 4, 6].

Так как уравнение (2) линейно относительно $w(z, t)$, то его решение можно представить в виде

$$w(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) w_i(z), \tag{14}$$

где $w_i(z)$ — собственные функции уравнения (2), удовлетворяющие условиям

$$w_i(z_1) = 0; \quad \int_{z_2}^{z_1} \frac{w_i w_j}{w_0} dz = \delta_{ij}. \tag{15}$$

Подставляя (14) в (2) и разделяя переменные, получим уравнения для $p_i(t)$ и $w_i(z)$

$$\frac{dp_i}{dt} = -k_i p_i(t); \tag{16}$$

$$k_i w_i(z) = \frac{d}{dz}\{f(z) w_i(z)\} - \frac{d^2}{dz^2}\left\{\frac{N(z)}{2} w_i(z)\right\}. \tag{17}$$

Величины k_i являются собственными значениями уравнения (3) при нулевом граничном условии.

Точное решение уравнения (17) даст нам бесконечный ряд собственных значений k_i и собственных функций $w_i(z)$. Однако при достаточно малом шуме пересечения границы будут происходить редко, вследствие чего наименьшее собственное значение k_0 будет мало, в то время как остальные k_i будут иметь значительно большую величину. Поэтому спустя некоторое время после начала процесса, малое по сравнению с $1/k_0$ (но большее, чем $1/k_1$, $1/k_2$ и т. д.), в качестве решения можно принять только первую собственную функцию

$$w(z, t) = e^{-k_0 t} w_0(z).$$

Учитывая формулу (4) и условие (15), получаем выражение для вероятности того, что точка не достигнет границы z_1 за время t:

$$p(t) = e^{-k_0 t}.$$

Теперь остается вычислить величину k_0, представляющую собой среднюю частоту достижения границы или величину, обратную математическому ожиданию времени достижения.

Для этого проинтегрируем уравнение (17) (при $i=0$) по z от z_2 до z_1. Если граница z_2 является идеально отражающей, то поток вероятности через нее равен нулю, и, следовательно,

$$k_0 = -\frac{d}{dz}\left[\frac{N(z)}{2} w_0(z)\right]_{z=z_1}. \tag{18}$$

Из выражения (18) видно, что для вычисления k_0 достаточно найти ход решения уравнения (17) вблизи границы $z=z_1$, где само значение $w_0(z)$ очень мало в силу нулевого граничного условия. Следовательно, в этой области уравнение (17) можно приближенно заменить стационарным уравнением Фоккера — Планка

$$\frac{d}{dz}\{f(z) w_0(z)\} - \frac{d^2}{dz^2}\left\{\frac{N(z)}{2} w_0(z)\right\} = 0 \tag{19}$$

с нулевым граничным условием и условием нормировки по области $z_2 \leqslant z \leqslant z_1$.

Первый интеграл уравнения (19) с учетом (18) и нулевого граничного условия для $w_0(z)$ равен

$$f(z) w_0(z) - \frac{d}{dz}\left[\frac{N(z)}{2} w_0(z)\right] = k_0, \tag{20}$$

откуда

$$w_0(z) = \frac{2k_0}{N(z)} e^{\psi(z)} \int\limits_z^{z_1} e^{-\psi(z')} dz', \tag{21}$$

где $\psi(z)$ определяется выражением (4).

Величина k_0 определяется из условия нормировки

$$\frac{1}{k_0} = M = \int\limits_{z_2}^{z_1} \frac{2}{N(z)} e^{\psi(z)} \left\{\int\limits_z^{z_1} e^{-\psi(z')} dz'\right\} dz. \tag{22}$$

Рассуждая аналогично тому, как это было сделано при вычислении математического ожидания первым способом, в формуле (22) можно вынести выражение, заключенное в фигурных скобках, за знак интеграла. Тогда получим формулу, совпадающую с (11).

Следует отметить, что формулы (11) и (13) дают нам приближенное выражение для математического ожидания времени достижения границы точкой, находящейся в начальный момент в положении z. Поскольку на границе на точку не действуют никакие регулярные силы ($f(z_1)=0$), то, достигнув границы, точка с равной вероятностью может как перейти через нее, так и вернуться обратно. Поэтому математическое ожидание времени перехода точки через границу в другое стационарное состояние будет вдвое больше, чем определяемое по формулам (11) и (13).

Теперь в частных случаях остается показать, как привести уравнения сложной системы к форме (1).

Нелинейные системы со многими степенями свободы

Пусть система описывается нелинейным дифференциальным уравнением порядка n.

$$y^{(n)} = F(y, y', \ldots, y^{(n-1)}, t) + \xi(t), \qquad (23)$$

где $\xi(t)$ — случайное воздействие.

Если уравнения системы заданы в виде n уравнений 1-го порядка, то их можно свести к уравнению типа (23) методом, изложенным в приложении.

Будем считать, что все движения в системе можно рассматривать как гармонические колебания с медленно меняющейся амплитудой (или как сумму гармонических колебаний с достаточно удаленными друг от друга частотами). Тогда уравнение (23) можно линеаризовать методом, аналогичным методу гармонической линеаризации.

Представив решение линеаризованного уравнения в форме

$$y = ae^{jpt}, \qquad (24)$$

где a — медленно меняющаяся функция времени, и подставив (24) в линеаризованное уравнение, полученное из (23) без учета случайного воздействия, найдем характеристическое уравнение системы, коэффициенты которого окажутся зависящими от амплитуды колебаний

$$L(p) = p^n + H(a, p, p^2, \ldots, p^{n-1}). \qquad (25)$$

Будем искать решение уравнения (25) в виде $p = j\omega_0(a) - \delta(a) + j\omega_1(a)$. Величину $\omega_0(a)$ определим так, чтобы при $p = j\omega_0$ модуль $L(p)$ имел минимальное значение, т. е.

$$\frac{d}{d\omega_0}[\{\mathrm{Re}L(j\omega_0)\}^2 + \{\mathrm{Im}L(j\omega_0)\}^2] = 0.$$

Затем, разлагая $L(p)$ в ряд Тейлора относительно точки $p = j\omega_0$ и разделяя действительные и мнимые части, получим два линейных уравнения для $\delta(a)$ и $\omega_1(a)$.

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial L}{\partial\delta}\bigg|_{\delta=0}\delta(a) + \frac{\partial L}{\partial\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0}\omega_1(a)\right\} = 0;\\ &\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial L}{\partial\delta}\bigg|_{\delta=0}\delta(a) + \frac{\partial L}{\partial\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0}\omega_1(a)\right\} = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Пусть наша система обладает двумя или несколькими стационарными состояниями движения (предельными циклами), отличающимися друг от друга амплитудой колебаний. Тогда решение уравнений (26) даст нам возможность определить как стационарные состояния, так и границу перехода системы из одного состояния в другое. Действительно, соответствующие значения амплитуд должны удовлетворять уравнению $\delta(a) = 0$. Так как колебания в системе близки к гармоническим с частотой $\omega(a)$ и коэффициентом затухания $\delta(a)$, то нашу сложную систему можно заменить эквивалентной колебательной системой с одной степенью свободы, имеющей ту же собственную частоту и тот же декремент затухания *. Для этого запишем уравнение (23) в виде

$$y = \xi(t)/L(p),$$

* Если система имеет несколько достаточно удаленных частот колебаний, то ее можно заменить соответственно несколькими независимыми колебательными системами, каждая из которых имеет одну степень свободы.

а функцию $1/L(p)$ разложим в ряд Лорана

$$\frac{1}{L(p)} = \frac{1}{L'(p_1)}\frac{1}{p-p_1} + \frac{1}{L'(p_1^*)}\frac{1}{p-p_1^*} + R(p), \tag{27}$$

где p_1 и $p_1{}^*$ комплексно-сопряженные корни уравнения (25), способ отыскания которых был указан выше, а $L'(p_1)$ и $L'(p_1{}^*)$ производные от $L(p)$ в точках p_1 и $p_1{}^*$ соответственно.

Так как колебания в системе по предположению близки к гармоническим с частотой $\omega(a)$, то существенными будут лишь первые два члена ряда (27) («резонансные члены»), а остальными членами можно будет пренебречь. Тогда получим уравнение для эквивалентной колебательной системы с одной степенью свободы:

$$(p^2 + 2\delta p + \omega^2)\,y = \xi(t)\left[\frac{p-p_1^*}{L'(p_1)} + \frac{p-p_1}{L'(p_1^*)}\right]. \tag{28}$$

В правой части уравнения (28) можно положить $p = p_1$, т. е.

$$(p^2 + 2\delta p + \omega^2)\,y = \frac{2j\omega}{L'(p_1)}\xi(t). \tag{29}$$

Если случайный процесс в правой части уравнения (29) имеет малое время корреляции $\tau_{\text{кор}}$ по сравнению с постоянной времени системы $1/\delta$, то для определения поведения системы можно воспользоваться методом, изложенным в первой части работы.

Для этого предположим, что интенсивность случайного процесса достаточно мала, так что выполняются условия (см. [8])

$$\frac{\sqrt{\langle \xi^2 \rangle}}{\omega\,|L'(p_1)|} \ll a_1 \qquad \text{при } \tau_{\text{кор}} \geqslant \frac{2\pi}{\omega}$$

или

$$\frac{\sqrt{\varkappa(\omega)}}{\omega\,|L'(p_1)|} \ll a_1 \qquad \text{при } \tau_{\text{кор}} < \frac{2\pi}{\omega},$$

где a_1 — амплитуда колебаний, соответствующая границе перехода системы из одного состояния в другое,

$\varkappa(\omega)$ — половина спектральной плотности процесса $\xi(t)$ на частоте ω, равная

$$\varkappa(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi\xi_\tau^* \rangle e^{j\omega\tau} d\tau.$$

Положив $y = ae^{j(\omega t+\varphi)}$, можно записать укороченное уравнение для амплитуды колебаний

$$\dot{a} = \frac{1}{2j\omega} e^{-j(\omega t+\varphi)}(p^2 + \omega^2)\,y = -a\delta(a) + \zeta(t), \tag{30}$$

где $\zeta(t)$ — эквивалентный белый шум со средним значением $m(a) = \langle \zeta(t) \rangle = N/2a$ и функцией корреляции $K(\tau) = N\delta(\tau)$, причем интенсивность N определяется формулой (см. [8])

$$N = \frac{\varkappa(\omega)}{|L'(p_1)|^2}. \tag{31}$$

Так как $|L'(p_1)|$ зависит от амплитуды, то и интенсивность эквивалентного шума $\zeta(t)$ получается также зависящей от амплитуды.

В рассматриваемом случае функция $f(a)=-a\delta(a)+\frac{N(a)}{2a}$ имеет особенность в точке $a=0$. Поэтому для вычисления математического ожидания времени достижения границы воспользуемся формулой (9) и условием ограниченности функции $M(a)$ при $a=0$. Подставляя в (9) выражение для $f(a)$ и положив $z_2=z_0=0$ и $z_1=a_1$, получим

$$M(a)=\int_a^{a_1}\frac{1}{a'}\left\{\int_0^{a'}\frac{2a}{N(a)}\exp\left[-2\int_0^a\frac{a\delta(a)}{N(a)}da\right]da\right\}\exp\left[2\int_0^{a'}\frac{a\delta(a)}{N(a)}da\right]da'+$$
$$+C\int_a^{a_1}\frac{1}{a'}\exp\left[2\int_0^{a'}\frac{a\delta(a)}{N(a)}da\right]da'.$$

Очевидно, что условие ограниченности функции $M(a)$ в точке $a=0$ выполняется лишь при $C=0$.

Рассуждая аналогично тому, как это было сделано в первой части работы, запишем приближенное выражение для $M(a)$ в форме произведения двух интегралов

$$M=\int_0^{a_1}\frac{2a'}{N(a')}\exp\left[-2\int_0^{a'}\frac{a\delta(a)}{N(a)}da\right]da'\int_a^{a'}\frac{1}{a'}\exp\left[2\int_0^{a'}\frac{a\delta(a)}{N(a)}da\right]da'. \quad (31)$$

Как уже указывалось, интегралы в выражении (31) можно приближенно вычислить, наложив соответствующие условия на величину шума, вытекающие из (12)

$$\sqrt{K(a_1)}\ll a_1;\qquad \sqrt{\frac{N(0)}{2\delta(0)}}=\sqrt{|K(0)|}\ll a_1,$$

$$\text{где}\quad K(a)=-\left\{2\frac{d}{da}\left[\frac{a\delta(a)}{N(a)}\right]\right\}^{-1}.$$

При этом получим

$$M=\frac{\sqrt{2\pi K(a_1)}}{2a_1\delta(0)}\exp\left\{2\int_0^{a_1}\frac{a\delta(a)}{N(a)}da\right\}. \quad (32)$$

Выражение (32) не является следствием (13) как в силу того, что функция $f(a)$ имеет особенность при $a=0$, так и вследствие невыполнения второго из условий (12).

Колебательные системы с большой нелинейностью

Пусть имеется нелинейная колебательная система, описываемая уравнением

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+f(x)=\xi(t), \quad (33)$$

где $\xi(t)$ — случайное воздействие.

Будем считать, что потери энергии вследствие затухания в среднем за период малы по сравнению с энергией колебаний, т. е. $\gamma\ll\left(\frac{df}{dx}\right)^{1/2}_{\text{ср}}$. Тогда можно ввести понятие полной энергии $E=\frac{1}{2}\dot{x}^2+U(x)$, где $U(x)=$

$= \int\limits_0^x f(x)\,dx$ — потенциальная энергия системы, и рассматривать E как медленно меняющуюся функцию времени.

Устойчивые стационарные состояния системы соответствуют минимумам функции $U(x)$, неустойчивые — максимумам $U(x)$. Переход из одного стационарного состояния в другое происходит тогда, когда $U(x)$ достигает максимального значения. Изложенный выше метод позволяет вычислить вероятность этого перехода.

Умножив обе части уравнения (33) на $\dot{x}$, получим точное уравнение для E

$$\dot{E} = -\gamma \dot{x}^2 + \dot{x}\xi(t). \tag{34}$$

Будем считать, что действующий на систему шум мал, так что

$$\left\langle \left[\int\limits_t^{t+\tau} \dot{x}\xi(t)\,dt \right]^2 \right\rangle^{1/2} \ll U_{\max}, \tag{35}$$

где τ — время порядка среднего периода колебаний.

Тогда в силу малости затухания и условия (35) правую часть уравнения (34) можно усреднить по периоду (см. [6])

$$\dot{E} = -\gamma \frac{I_1(E)}{I_2(E)} + \dot{x}\xi(t), \tag{36}$$

где

$$I_1(E) = \int\limits_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{2[E-U(x)]}\,dx; \quad I_2(E) = \int\limits_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{2[E-U(x)]}};$$

$x_{\min}$ и $x_{\max}$ — крайние значения x при колебаниях, приближенно совпадающие с соответствующими корнями уравнения $U(x) = E$.

Если время корреляции шума мало по сравнению с $1/\gamma$, то уравнение (36) описывает марковский процесс, и в этом случае справедливы результаты первой части работы.

Учитывая корреляцию между $\dot{x}$ и ξ, найдем среднее значение и спектральную плотность случайного процесса $\dot{x}\xi(t)$

$$m(E) = \langle \dot{x}\xi(t) \rangle = \frac{\varkappa}{2}; \quad N(E) = \varkappa \frac{I_1(E)}{I_2(E)},$$

где $\varkappa$ — спектральная плотность процесса $\xi(t)$.

Пусть устойчивое стационарное состояние соответствует $E = 0$, а неустойчивое $E = U_{\max}$. Легко показать, что при малых значениях E

$$\frac{I_1(E)}{I_2(E)} \approx E, \text{ т. е. } N(E) \to 0 \text{ при } E \to 0.$$

Следовательно, в этом случае так же, как и в первом примере, для вычисления математического ожидания времени достижения границы надо воспользоваться формулой (9) с учетом ограниченности функции $M(E)$

$$M(E) = \int\limits_E^{U_{\max}} \left\{ \frac{2}{\varkappa} \int\limits_0^{E'} \frac{I_2(E)}{I_1(E)} \exp[\psi(E)]\,dE \right\} \exp[-\psi(E')]\,dE' +$$

$$+ C \int\limits_E^{U_{\max}} \exp[-\psi(E')]\,dE',$$

где

$$\psi(E) = -2\frac{\gamma}{\varkappa}E + \int \frac{I_2(E)}{I_1(E)}\,dE.$$

Учитывая, что $\int \frac{I_2(E)}{I_1(E)}\,dE = \ln I_1(E)$, получим

$$M(E) = \int\limits_E^{U_{\max}} \left\{ \int\limits_0^{E'} \frac{2}{\varkappa} I_2(E)\exp\left(-\frac{2\gamma}{\varkappa}E\right)dE \right\} \frac{1}{I_1(E')}\exp\left(\frac{2\gamma}{\varkappa}E'\right)dE' +$$

$$+ C\int\limits_E^{U_{\max}} \frac{1}{I_1(E')}\exp\left(\frac{2\gamma}{\varkappa}E'\right)dE'.$$

Условие ограниченности $M(E)$ при $E=0$ выполняется только в случае $C=0$.

Следовательно, аналогично изложенному ранее можем записать

$$M(E) \approx \int\limits_0^{U_{\max}} \frac{2}{\varkappa} I_2(E')\,e^{-\frac{2\gamma}{\varkappa}E'}dE' \int\limits_E^{U_{\max}} \frac{1}{I_1(E')}\,e^{\frac{2\gamma}{\varkappa}E'}dE' \approx$$

$$\approx \frac{\varkappa}{2\gamma^2}\,\frac{I_2(0)}{I_1(U_{\max})}\,e^{\frac{2\gamma}{\varkappa}U_{\max}}, \tag{37}$$

где $I_2(0) = 2\pi\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=0}^{-1/2}$.

Рассмотренные примеры показывают, как вычислять математическое ожидание времени перехода, если не выполняются условия (12). В противном случае результат можно получить непосредственной подстановкой конкретных выражений для $f(z)$ и $N(z)$ в формулу (13).

Как и следовало ожидать, вероятность перехода в основном определяется высотой потенциального барьера, который требуется преодолеть для перехода системы из одного состояния в другое.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть имеется система с n-степенями свободы, описываемая уравнениями

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$

причем функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ могут содержать случайные составляющие.

Введем новые переменные

$$
\begin{aligned}
&y_1 = x_1;\\
&y_2 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t); \qquad (2)\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&y_n = \frac{d^{(n-2)}}{dt^{(n-2)}} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t).
\end{aligned}
$$

Будем считать, что систему уравнений (2) можно однозначно разрешить относительно $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \varphi_1 = y_1;\\
&x_2 = \varphi_2(y_1, \dots, y_n, t); \qquad (3)\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&x_n = \varphi_n(y_1, y_2, \dots, y_n, t).
\end{aligned}
$$

В этом случае систему уравнений (1) можно представить в виде одного дифференциального уравнения n-го порядка.

Действительно, из уравнений (2) следует

$$
\begin{aligned}
&\dot{y}_1 = y_2;\\
&\dot{y}_2 = y_3;\\
&\dots\\
&\dots \qquad (4)\\
&\dots\\
&\dot{y}_{n-1} = y_n.
\end{aligned}
$$

Производную $\dot{y}_n$ найдем путем дифференцирования одного из уравнений (3), содержащего y_n, например, i-го уравнения

$$\dot{x}_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_1}\dot{y}_1 + \dots + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n}\dot{y}_n + \frac{\partial\varphi_i}{\partial t}. \qquad (5)$$

Разрешая уравнение (5) относительно $\dot{y}_n$ и учитывая (4), найдем

$$\dot{y}_n = F(y_1, y_2, \dots, y_n, t), \qquad (6)$$

где

$$F(y_1, \dots y_2, y_n, t) = \frac{f_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, t) - \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_1} y_2 - \dots - \frac{\partial\varphi_i}{\partial y_{n-1}} y_n - \frac{\partial\varphi_i}{\partial t}}{\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n}}.$$

Система уравнений (4) и (6) эквивалентна одному уравнению n-го порядка

$$y^{(n)} = F(y, y', \dots, y^{(n-1)}, t), \qquad (7)$$

где $y = y_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стратонович Р. Л., Ланда П. С. Воздействие шумов на генератор с жестким возбуждением. «Изв. вузов», радиофизика, 2, № 1, 37—44, 1959.

2. Гудзенко Л. И. О флуктуациях амплитуды колебаний автономного лампового генератора. «Радиотехника и электроника», 4, № 1, 97—108, 1959.

3. Ланда П. С. Об устойчивости систем с сервоуправлением при наличии случайных воздействий. «Автоматика и телемеханика», XXI, № 1, 36—41, 1960.

4. Ланда П. С., Стрелков С. П. Об устойчивости системы управления электроном при наличии турбулентных возмущений. «Автоматика и телемеханика», XXI, № 10, 1352—1364, 1960.

5. Васильев А. М. Применение теории броуновского движения к исследованию помехоустойчивости импульсных радиотехнических следящих устройств, II, НДВШ, радиотехника и электроника, № 2, 1959.

6. Ланда П. С. О потерях электронов в синхротроне вследствие квантового характера излучения. ЖЭТФ, № 5, 1961.

7. Kramer H. A. Brownian Motion in a Field of Force and the Diffusion Model of Chemical Reactions, Physica, VII, No. 4, 284—304, 1940.

8. Стратонович Р. Л. Синхронизация автогенератора при наличии помех. «Радиотехника и электроника», 3, № 4, 497—506, 1958.

9. Понтрягин Л., Андронов А., Витт А. О статистическом рассмотрении динамических систем. ЖЭТФ, 3, № 3, 165—180, 1933.

10. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. ИЛ, М., 1947.

Поступила в редакцию
7. 4 1961 г.

Кафедра
общей физики для механико-
математического факультета