

# Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 1 — 1962

Т. М. ИЛЬИНОВА, В. В. МИГУЛИН

## О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ КОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНОМ КОНТУРЕ

Исследовано параметрическое возбуждение колебаний в контуре, содержащем полупроводниковый диод с нелинейной проводимостью и нелинейной емкостью запертого  $p-n$ -перехода.

Рассмотрен стационарный режим колебаний с частотой, равной половине частоты накачки, при использовании нелинейной проводимости диода для ограничения амплитуды возбужденных колебаний. Влияние нелинейной проводимости диода учитывается через автоматическое смещение, величина которого принимается равной амплитуде параметрически возбужденных колебаний.

1. Рассмотрим колебательный контур (рис. 1), содержащий полупроводниковый диод,  $p-n$ -переход которого, как известно, обладает нелинейной проводимостью, имея весьма большое сопротивление при приложении к нему обратного напряжения и большую проводимость в прямом направлении, а также при обратном напряжении обладает емкостью, нелинейно изменяющейся с изменением этого напряжения [1].

Для диодов типа ДГЦ-27 соответствующие характеристики имеют вид, изображенный на рис. 2. При этом с достаточной степенью точности можно считать, что в прямом направлении сопротивление диода  $R_+$  меньше 200  $\text{ом}$ , а в обратном направлении  $R_-$  — больше 1  $\text{мгом}$ . Реальная кривая зависимости емкости  $C_{\text{дифф}}$  от обратного напряжения на диоде показана на том же рис. 2.

При подаче на контур (рис. 1) напряжения накачки  $E_0 \cos 2pt$  с частотой, примерно в два раза большей собственной частоты контура, в нем за счет периодического изменения емкости, вызванного этим напряжением накачки, при выполнении определенных условий возможно параметрическое возбуждение колебаний половинной частоты [2, 3].

Эти параметрически возбужденные колебания при возрастании их амплитуды могут вызвать ток через диод в прямом направлении, кото-

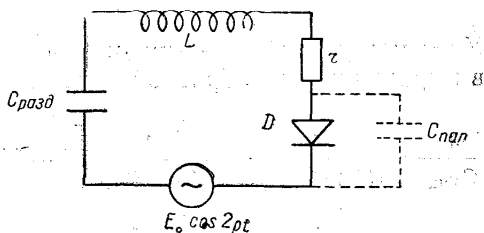


Рис. 1. Колебательный контур с полупроводниковым диодом

рый будет заряжать разделительный конденсатор  $C_{\text{разл}}$  и создавать дополнительное постоянное смещающее напряжение на диоде. Считая проводимость диода в прямом направлении весьма большой, а в обратном очень малой, можно принять, что диод в комбинации с разделительным конденсатором действует как пиковый вольтметр, и величина возникающего подобным образом смещения приблизительно равна амплитуде возбужденных колебаний, которая много больше амплитуды накачки. За счет этого смещения будет иметь место ограничение возбуждаемых колебаний, и при сделанных предположениях можно считать, что напряжение на диоде всегда остается в области отрицательных значений.

2. Теория  $p$ — $n$ -перехода полупроводникового диода в согласии с экспериментальными данными приводит к следующему выражению для емкости перехода:

$$C_{\text{диф}} = \frac{A}{(\varphi_0 - u)^{1/k}}, \quad (1)$$

где  $A$  — постоянная, зависящая от размеров перехода и типа использованных полупроводников;  $\varphi_0$  — контактная разность потенциалов;  $U$  — напряжение, приложенное к переходу;  $k = 2$  или  $3$  в зависимости от типа диода.

При этом под  $C_{\text{диф}}$  понимается величина  $C_{\text{диф}} = \frac{\Delta q}{\Delta U}$  для достаточно малых значений  $\Delta U$  ( $\Delta U \ll U$ ).

Если величина емкости  $p$ — $n$ -перехода диода существенно больше паразитных емкостей патрона диода и монтажа, то исходя из выражения  $C_{\text{диф}} = \frac{dq}{dU} = \frac{A}{V_{\varphi_0 - U}}$ , после интегрирования при условии  $q = 0$  при  $U = 0$  получаем

$$[U(q) = \frac{q}{C_0} (1 - \beta' q)] = \frac{q}{C(q)}, \quad (2)$$

где

$$C(q) = \frac{C_0'}{1 - \beta' q}, \quad C_0' = \frac{A}{V_{\varphi_0}}, \quad \beta' = \frac{1}{4A V_{\varphi_0}}.$$

Учет паразитной емкости, параллельной диоду, приводит к появлению в выражении для обратной емкости членов с  $q^2$ ,  $q^3$  и т. д.

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{\text{общ}}} &= \frac{1}{C(q) + C_{\text{пар}}} = \frac{1}{C_0' + C_{\text{пар}}} \left[ 1 - \beta' \frac{C_0'}{C_0' + C_{\text{пар}}} q - \beta'^2 \frac{C_0' C_{\text{пар}}}{(C_0' + C_{\text{пар}})^2} q^2 - \dots \right] = \\ &= \frac{1}{C_0} [1 - \beta q - \gamma q^2 - \varepsilon q^3 - \dots]. \end{aligned} \quad (3)$$

Для реальных диодов  $\beta$  всегда меньше 1 и  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  — величины высшего порядка малости, нежели  $\beta$ . В связи с этим члены разложения с  $\varepsilon$  и последующие можно не учитывать при дальнейшем рассмотрении. Уравнение Кирхгофа для контура на рис. 1 имеет вид

$$LI + rI + U(q) + E_0 \cos 2\pi t = 0, \quad (4)$$

где

$$U(q) = \frac{q}{C_{\text{общ}}} = \frac{q}{C_0} [1 - \beta q - \gamma q^2], \quad I = \dot{q}.$$

Напряжением на  $C_{разд}$  пренебрегаем, считая его весьма малым по сравнению с другими членами уравнения ( $C_{разд}$  велико). Переходя к безразмерным переменным  $y = \frac{q}{q_0}$ , получим уравнение вида

$$\ddot{y} + 2\delta y + \omega_0^2(1 - \beta_1 y - \gamma_1 y^2) y = -P_0 \cos 2pt, \quad (5)$$

где

$$2\delta = \frac{r}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC_0}, \quad P_0 = \frac{E_0}{Lq_0},$$

$$\beta_1 = \beta q_0, \quad \gamma_1 = \gamma q_0^2.$$

Решение этого уравнения найдем в виде суммы  $y = x_1 + z$ , где  $x_1$  — колебания с частотой  $2p$  и  $z$  — параметрически возбужденные колебания с частотой  $p$ . При малом затухании и малых значениях нелинейных членов  $x_1$  может быть с достаточной точностью определено из уравнения

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -P_0 \cos 2pt, \quad (6)$$

откуда

$$x_1 = \frac{P_0}{p^2(3 + \zeta)} \cos 2pt = \lambda(\zeta) \cos 2pt, \quad \text{где } \zeta = \frac{p^2 - \omega_0^2}{p^2}.$$

Амплитуда и фаза параметрически возбуждаемых колебаний может быть найдена из уравнения

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + z = \zeta z - 2\theta \frac{dz}{d\tau} + \beta_1(1 - \zeta)(z^2 + 2\lambda z \cos 2\tau) +$$

$$+ \gamma_1(1 - \zeta)\left(z^3 + 3z^2\lambda \cos 2\tau + \frac{3}{2}\lambda^2 z\right) = F(z, \dot{z}, \tau), \quad (7)$$

где  $\tau = pt$ ,  $2\theta = \frac{2\delta}{p}$ . Полагаем  $\zeta$ ,  $2\theta$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  малыми величинами, тогда правая часть уравнения (7) будет порядка малости этих величин.

Решение такого уравнения будем искать с учетом сделанного предположения о существовании за счет детектирования на  $p$ - $n$ -переходе постоянного отрицательного смещения такой величины, что напряжение на нем никогда не заходит в область положительных значений.

Будем считать

$$z = a \cos \tau + b \sin \tau - z_0(a, b, \lambda), \quad (8)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $z_0$  — функции, медленно меняющиеся со временем.

Принимаем, что функции  $a$ ,  $b$ ,  $z_0$  удовлетворяют условию

$$\dot{a} \cos \tau + \dot{b} \sin \tau - \dot{z}_0 = 0. \quad (9)$$

Тогда уравнение (7) с учетом (8) и (9) принимает вид

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + z = -\dot{a} \sin \tau + \dot{b} \cos \tau - z_0 = F(a, b, \tau). \quad (10)$$

Из (10) и (9) получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -F(a, b, \tau) \sin \tau - z_0 \sin \tau + \dot{z}_0 \cos \tau, \\ \dot{b} &= F(a, b, \tau) \cos \tau + z_0 \cos \tau + \dot{z}_0 \sin \tau. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Медленное изменение  $a$ ,  $b$ ,  $z_0$  позволяет после усреднения по периоду перейти от системы уравнений (11) к системе укороченных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a, b, \tau) \sin \tau d\tau, \\ \bar{b} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a, b, \tau) \cos \tau d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Считая амплитуду  $\lambda$  вынужденных колебаний с частотой  $2p$  много меньшей амплитуды  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  колебаний частоты  $p$ , можно  $z_0$  положить равным  $A$ . Тогда решение системы укороченных уравнений (12) для стационарного случая  $\dot{\bar{a}} = \dot{\bar{b}} = 0$  будет иметь вид

$$\xi = 2\beta_1 A - \gamma_1 \left( \frac{15}{4} A^2 + \frac{3}{2} \lambda^2 \right) \pm \sqrt{(\beta_1 - 3\gamma_1 A)^2 \lambda^2 - \frac{1}{Q^2} (\xi + 1)}, \quad (13)$$

$$\sin 2\theta = \frac{1}{Q(\beta_1 - 3\gamma_1 A)\lambda} \sqrt{\xi + 1}, \quad (14)$$

где  $A^2 = a^2 + b^2$ ,  $\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}$ ,  $\frac{\omega L_0}{r} = Q$  — добротность системы,  $\xi = \frac{\zeta}{1 - \zeta}$  —

расстройка половины частоты внешнего воздействия относительно собственной частоты контура.

Для реальных диодов  $\beta' < 1$ ,  $\frac{C'_0 C_{\text{пар}}}{(C'_0 + C_{\text{пар}})^2} < 1$  и членами, содержащими  $\gamma_1 = \beta'^2 \frac{C'_0 C_{\text{пар}}}{(C'_0 + C_{\text{пар}})^2} q_0^2$ , можно пренебречь. Тогда для стационарной амплитуды и фазы получим следующие выражения:

$$A = \frac{1}{2\beta_1} \left[ \xi \pm \sqrt{\beta_1^2 \lambda^2 - \frac{1}{Q^2} (\xi + 1)} \right], \quad (15)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{Q\beta_1 \lambda} \sqrt{\xi + 1}. \quad (16)$$

Так как  $A$  — вещественная положительная величина, то параметрическое возбуждение будет иметь место лишь при условии

$$\beta_1^2 \lambda^2 > \frac{1}{Q^2} (\xi + 1). \quad (17)$$

Для точной настройки контура на половину частоты внешнего воздействия условие возбуждения (17) принимает вид

$$\lambda > \frac{1}{Q\beta_1} = \lambda_{\min}.$$

Если условие (17) выполнено, то существует конечная область расстройки  $\xi$ , внутри которой имеет место параметрическое возбуждение. Границы этой области определяются из условия

$$\xi \pm \sqrt{\beta_1^2 \lambda^2 - \frac{1}{Q^2} (\xi + 1)} = 0.$$

Откуда получаем

$$-\frac{1}{2Q^2} - \sqrt{\beta_1^2 \lambda^2 - \frac{1}{Q^2}} \leq \xi \leq -\frac{1}{2Q^2} + \sqrt{\beta_1^2 \lambda^2 - \frac{1}{Q^2}}$$

Для  $\lambda > \lambda_{\min}$  значение расстройки, при которой происходит срыв колебаний (точка С на рис. 5), определяется из условия

$$\xi_c = Q^2 \beta_1^2 \lambda^2 - 1.$$

Рассмотрение устойчивости соответствующих ветвей кривых параметрического возбуждения  $A(\xi)$  показывает, что устойчивыми являются лишь верхние части этих кривых (ветвь АС). Нижняя ветвь кривых (ВС) является неустойчивой и служит лишь разделом между областями начальных условий, приводящих или к состоянию покоя, или к стационарному режиму с конечной амплитудой, соответствующей ветви АС.

3. Экспериментально изучался контур с полупроводниковым диодом типа ДГЦ-27, изображенный на рис. 1. Собственная частота контура 250 кгц, добротность контура порядка 10; частоту накачки можно было изменять от 400 кгц до 1,5 мкгц, напряжение накачки изменялось в пределах от 0,1 в до 1 в,  $C_{\text{разл}} = 500 \text{ нф}$ .

Величина разделительной емкости подбиралась экспериментально с тем, чтобы избежать прерывистой генерации. Прерывистая генерация возникает в системе, когда постоянная времени заряда емкости  $C_{\text{разл}}$  становится сравнимой с временем установления стационарной амплитуды. Отсюда вытекает желательность уменьшения  $C_{\text{разл}}$ , однако при этом должно соблюдаться условие  $C_{\text{разл}} \gg C_0$ , ибо малое  $C_{\text{разл}}$  будет существенно снижать глубину модуляции нелинейной емкости диода.

Исследовалась зависимость амплитуды и фазы параметрически возбуждаемых колебаний от относительной расстройки  $\xi$  для разных значений амплитуды накачки  $\lambda_0$ . Кривые этих зависимостей изображены на рис. 3 и 4.

Теоретические амплитудные и фазовые характеристики (уравнения 15 и 16) с учетом зависимости амплитуды накачки от относительной расстройки  $\xi$ :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{4\xi + 3} \sqrt{\xi + 1};$$

( $\sqrt{\xi + 1}$  в выражении для  $\lambda$  учитывает индуктивную связь генератора накачки с параметрическим контуром) при тех же значениях  $\lambda_0$  построены на рис. 5, 6.

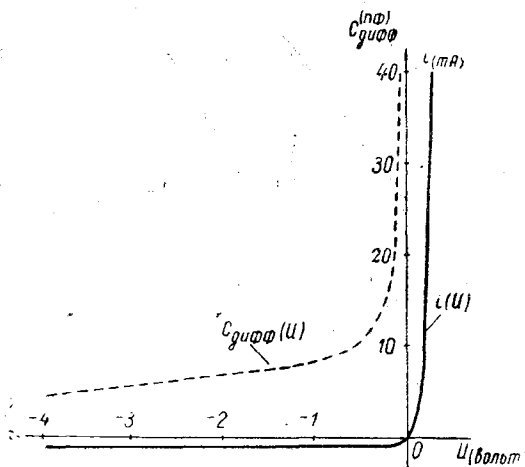


Рис. 2. Характеристики  $i(U)$  и  $C_{\text{диф}}(U)$  для полупроводникового диода типа ДГЦ-27

Сдвиг экспериментальных кривых для разных значений  $\lambda_0$  по оси  $\xi$  объясняется влиянием амплитуды накачки на величину постоянного автоматического смещения. Это можно учесть и теоретически, вводя в выражение для  $z_0$  зависимость от амплитуды накачки  $\lambda$ .

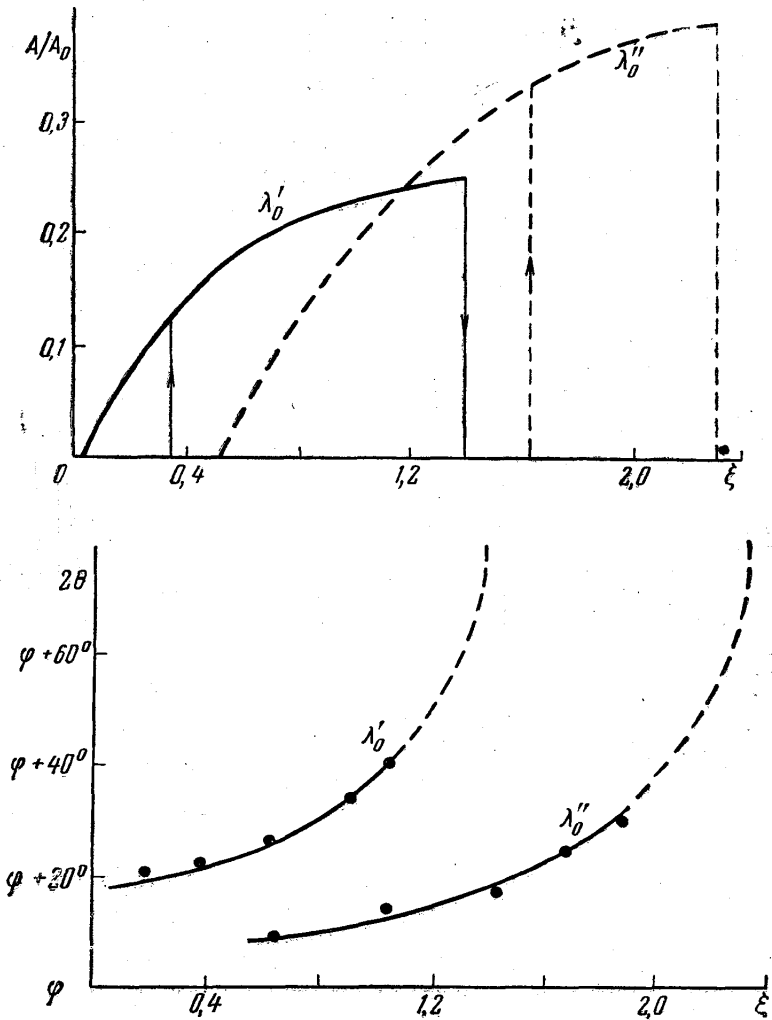


Рис. 3 и 4. Экспериментальные кривые зависимости амплитуды и фазы колебаний половинной частоты от относительной расстройки  $\xi$  для двух значений амплитуды накачки:  $\lambda_0' = 1,8 \cdot 10^{-10} k$ ;  $\lambda_0'' = 2,6 \cdot 10^{-10} k$

Сравнение теоретических и экспериментальных кривых свидетельствует об удовлетворительном их согласовании.

Некоторое расхождение теоретических и экспериментальных результатов при больших значениях амплитуды параметрически возбужденных колебаний можно объяснить влиянием проводимости диода в обратном направлении на процессы, происходящие в системе. При расчете она считалась, равной нулю.

Кроме того, при построении теоретических кривых не принимались во внимание члены с  $\gamma_1$ , которые появляются при учете паразитных ем-

костей, параллельных диоду. Они приводят к зависимости коэффициента модуляции параметра  $m=2(\beta_1-3\gamma_1A)\lambda$  от амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний. Это может также играть роль в процессе установления стационарной амплитуды.

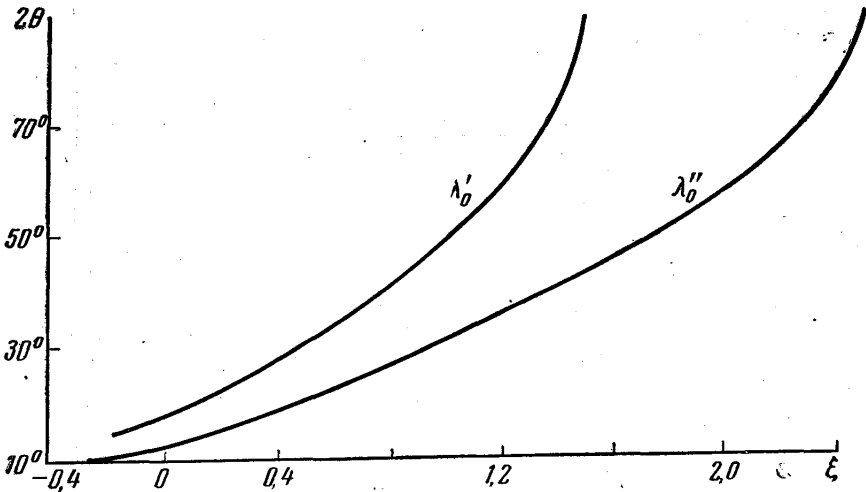
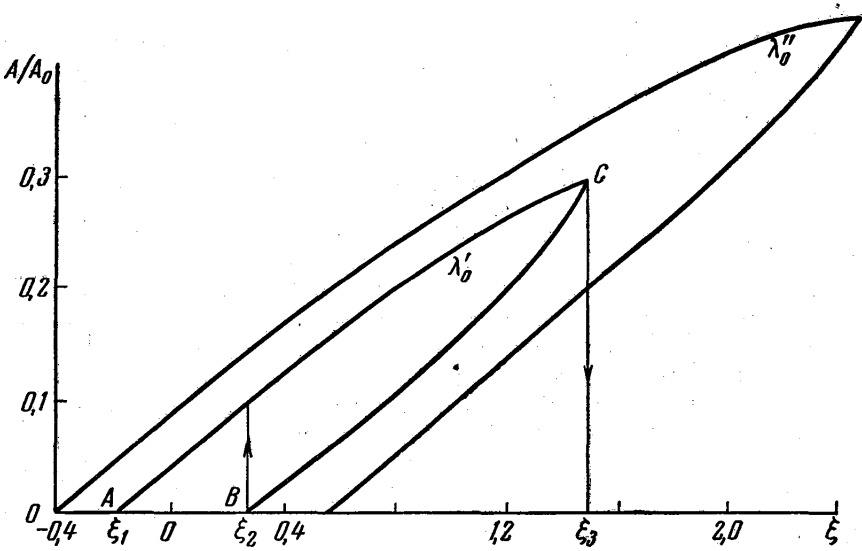


Рис. 5 и 6. Теоретические амплитудные и фазовые характеристики при тех же значениях  $\lambda_0' = 1,8 \cdot 10^{10} \text{ к}$ ;  $\lambda_0'' = 2,6 \cdot 10^{10} \text{ к}$ ;  $Q = 10$ ;  $2\beta = 10^{-10} \text{ к}^{-1}$ ;  $f_0 = 250 \text{ кгц}$

Удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных амплитудных и фазовых характеристик показывает применимость к данному случаю приближенного метода расчета, основанного на идеализации характеристики проводимости диода.

## Выводы

В результате теоретического и экспериментального изучения параметрического возбуждения электрического колебательного контура с использованием полупроводникового диода было установлено следующее.

1. В контуре, содержащем полупроводниковый диод и разделительную емкость, заряжающуюся за счет нелинейной проводимости диода, возможно устойчивое параметрическое генерирование колебаний без задания принудительного постоянного смещения на диод.

2. Установление стационарной амплитуды параметрически возбужденных колебаний с частотой в два раза меньшей частоты накачки происходит за счет автоматического смещения рабочей точки в область отрицательных напряжений смещения на диоде.

3. Малое сопротивление диода в прямом направлении при большом обратном его сопротивлении позволяет считать величину автоматического смещения равной амплитуде колебаний в контуре и применить для расчета процесса метод медленно меняющихся амплитуд.

Подобная система может с успехом использоваться в качестве параметрического делителя частоты, обладающего большой широкополосностью и значительной фазовой стабильностью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вул Б. М. ЖТФ, 25, № 1, 3, 1955.
2. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. ЖТФ, 4, № 1, 5, 1934.
3. Гуляев В. П., Мигулин В. В. ЖТФ, 4, № 1, 48, 1934.

Поступила в редакцию  
22. 4 1961 г.

Кафедра  
теории колебаний физического  
факультета МГУ