Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2—1962

ФИЗИКА

Ю. П. РЫБАКОВ

К ВОПРОСУ О ДВИЖЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ, ПЕРЕМЕЩАЮЩЕМСЯ С ФАЗОВОЙ СКОРОСТЬЮ, БОЛЬШЕЙ СКОРОСТИ СВЕТА

Рассматривается один из возможных вариантов линейного индукционного ускорителя с магнитным полем, перемещающимся со сверхсветовой скоростью. Для этого варианта вычисляется приобретаемая электроном энергия, оценивается излучение и исследуется устойчивость движения.

В работе [1] был предложен новый тип ускорителя, названный линейным бетатроном. Рассматривались три случая движения электрона в аксиально-симметричном магнитном поле, перемещающемся вдоль оси симметрии:

1) поле перемещается так, что радиус орбиты электрона остается постоянным;

2) поле перемещается равномерно со скоростью $u<c$;

3) поле перемещается со скоростью света.

В данной работе рассматривается еще один случай, имеющий место в обычных волноводах, когда скорость перемещения поля $u>c$. Для этого случая вычисляется энергия электрона, оценивается излучение и исследуется устойчивость движения.

1. Прежде всего мы должны найти подходящее магнитное поле «бочкообразного» типа с осью симметрии z. Выбираем вектор-потенциал в цилиндрической системе координат в следующем виде:

$$A_r = A_z = 0; \quad A_\varphi = A(r, z - ut).$$

Тогда уравнение для A имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(rA)\right] + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \qquad (1)$$

Учитывая, что $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$ и разделяя переменные, получаем частное решение в виде $A = B\ J_1\left(\frac{\omega a}{u}\ r\right) \cos\frac{\omega}{u}(ut - z)$, где $B = \mathrm{const}$; ω — частота волны,

$$a = \sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1}; \quad u = u(\omega).$$

Кроме того, мы можем добавить любое решение (1), не зависящее от времени; скажем, постоянное поле $A_1 = \frac{H_1 r}{2} + \frac{b}{r}$, где b — произвольная постоянная вследствие градиентной инвариантности.

Итак,

$$A = B\ J_1\left(\frac{\omega a}{u}\ r\right)\cos\frac{\omega}{u}\ (ut - z) + \frac{H_1 r}{2} + \frac{b}{r}. \tag{2}$$

Картина силовых линий $Ar = \mathrm{const}$ при $t = 0$ имеет вид

$$\cos\left(\frac{\omega z}{u}\right) = \frac{\mathrm{const} - \frac{H_1 r^2}{2}}{B\ r\ I_1\left(\frac{\omega a}{u}\ r\right)}.$$

Это поле имеет периодическую бочкообразную структуру.

2. Для вычисления энергии электрона в зависимости от траектории воспользуемся уравнением Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + c\ \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{e}{c}\ A\right)^2 m_0^2 c^2} = 0.$$

Здесь константа b в выражении для A не является уже произвольной, а выбирается исходя из начальных условий (учтен интеграл $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \mathrm{const}$). Это уравнение можно решить приближенно методом малого параметра, используя то обстоятельство, что возбужденное поле мало по сравнению с постоянным. Это необходимо для получения бочкообразного поля, способного обеспечить устойчивость движения.

В качестве параметра малости берется $\varepsilon = \frac{B\ 2\omega a}{H_1 u} < 1$. В результате главный член в выражении для энергии получается следующим:

$$E = E_0\ \left\{1 + \frac{B\omega}{H_1 y_0 c}\ \int\limits_{y_0}^{y} \sin(\Psi - x)\ f(y')\ dy'\right\}, \tag{3}$$

где

$$\Psi = +c_1 \int\limits_{y'}^{y} \frac{dy}{\sqrt{c_1^2 - \alpha - \left[y + \frac{\beta}{y}\right]^2}}; \quad f(y') = \frac{\left[y' + \frac{\beta}{y'}\right] I_1(y')}{\sqrt{c_1^2 - \alpha - \left[y' + \frac{\beta}{y'}\right]^2}};$$

$$\alpha = \left(m_0^2 + \frac{M_0^2}{a^2}\right)\cdot\left(\frac{2\omega a c^2}{eH_1 u}\right)^2; \quad \beta = \frac{2b}{H_1}\ \left(\frac{\omega a}{u}\right)^2; \quad E_0 = M_0 c^2;$$

$$y = \frac{\omega a}{u} r; \quad x = \omega\left(t - \frac{z}{u}\right);$$

$\left\{\begin{matrix} x_0 = -\pi \\ y_0 \end{matrix}\right\}$ — начальные координаты электрона;

c_1 — постоянная интеграции $\left(c_1 \sim \frac{1}{H_1};\quad c_1 > 0,\ \text{т. е.}\ \Psi > 0\right)$. При анализе этого выражения надо учесть, что $\Psi(y' = y_0) - x(0, z) = \pi + 0(\xi)$, что следует из уравнений движения. Величину же приобретенной энергии можно оценить, пренебрегая вкладом радиального движения, т. е. считая, что $\frac{\partial V}{\partial r} \ll \frac{\partial V}{\partial z}$. Тогда получим

$$\Delta E = \frac{E_0}{1-\frac{c^2}{u^2}} \left[\sqrt{1+\left(1-\frac{c^2}{u^2}\right)\left(\frac{A^2}{A_0^2}-1\right)}-1\right], \tag{4}$$

где $eA_0 = eH_1 r_0 \approx E_0$.

При $u \to c$ имеем

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} E_0 \left[\frac{A^2}{A_0^2} - 1\right].$$

Следовательно, энергия растет с ростом A.

3. Чтобы оценить величину излучаемой энергии, воспользуемся формулой мощности излучения [2]

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{m_0^2 c^3} \left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^2 \left[\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{dt}\right)^2\right]. \tag{5}$$

Дифференциальное отношение излученной энергии к приобретенной есть:

$$k = \frac{Pdt}{dE} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{m_0^2 c^3} \left(\frac{E}{m_0 c^2}\right)^2 \frac{dE}{dt}\left[\left(\frac{d\vec{p}}{dE}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\right].$$

Но

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dE}\right)^2 = \frac{([\vec{H}(\vec{u}-\vec{v})])^2}{(\vec{v}\,[\vec{H}(\vec{u}-\vec{v})])^2} \approx \frac{1}{(r\dot{\varphi})^2}\left[1+\left(\frac{Hv}{H_r u}\right)^2\right].$$

Поэтому

$$\left[\left(\frac{d\vec{p}}{dE}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\right] \approx \left(\frac{H}{H_r u}\right)^2;$$

$$k = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^4}{m_0^4 c^7} \quad E \left\langle A \quad \frac{\partial A}{\partial t}\left(\frac{H}{H_r u}\right)^2\right\rangle. \tag{6}$$

Численная оценка при $H_1 = 10^5$ *эрст*; $r_0 = 10$ *см*; $B = 0{,}2 H_1 r_0$ показывает, что $k \approx \frac{2 \cdot 10^5}{\omega} \ll 1$.

4. Исследуем устойчивость движения электрона. С помощью гамильтониана $H = c\sqrt{p_r^2 + p_z^2 + \left(\frac{e}{c} A\right)^2 + m_0^2 c^2}$ запишем уравнения возмущенного движения

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\xi_j}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial \eta_j} \\ \frac{d\eta_j}{dt} &= -\frac{\partial W}{\partial \xi_j} \end{aligned}\right.$$

где $j = 1,\ 2;\ \xi_1 = \Delta q_1 = \Delta r;\quad \xi_2 = \Delta q_2 = \Delta z;$

$\eta_1 = \Delta p_1 = \Delta p_r;\quad \eta_2 = \Delta p_2 = \Delta p_z;$

$$2W = \sum_{i,j=1}^{2} \left\{2\frac{\partial^2 H}{\partial p_j\,\partial q_i}\ \eta_j \xi_i + \frac{\partial^2 H}{\partial p_j\,\partial p_i}\eta_j \eta_i + \frac{\partial^2 H}{\partial q_j\,\partial_i}\ \xi_j \xi_i\right\}.$$

Теперь воспользуемся теоремой А. М. Ляпунова об устойчивости [3—4], согласно которой движение устойчиво, если форма $(2W)$ положительно определенна, а ее полная производная $\frac{d(2W)}{dt}$ отрицательно определенна, или наоборот. Форма $(2W)$ положительно определенна, если

$$\Delta_{11} = A\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} > 0; \quad \Delta_{22} = A\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} > 0 \quad \text{и}$$

$$\Delta_{11}\Delta_{22} - (\Delta_{12})^2 > 0, \quad \text{где } \Delta_{12} = A\frac{\partial^2 A}{\partial r\,\partial z}.$$

Эти условия могут быть удовлетворены подбором постоянного поля, что видно из уравнения

$$\underset{>0}{\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}} + \underset{>0}{\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}} - \underset{<0}{\frac{1}{r^2} A} + \underset{<0}{\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}} = 0.$$

Форма $\frac{d(2W)}{dt}$, вообще говоря, знакопеременна, но при рассмотрении траектории, на которой электрон ускоряется, т. е. $\dot{m} > 0$; $\frac{\partial A}{\partial r} < 0$; $\frac{\partial A}{\partial z} < 0$ и при выполнении условий

$$\frac{d\Delta_{11}}{dt} \equiv \dot{\Delta}_{11} < 0; \quad \dot{\Delta}_{22} < 0; \quad \dot{\Delta}_{11} \cdot \dot{\Delta}_{22} - (\dot{\Delta}_{12})^2 > 0$$

она оказывается отрицательно определенной. Таким образом, движение электрона на ускоряющем участке может быть сделано устойчивым.

Расчеты показывают, что линейный бетатрон с полем, перемещающимся со скоростью, большей скорости света, может быть практически осуществлен. Однако, как уже отмечалось, движение может быть устойчивым лишь при достаточно малом переменном поле по сравнению с постоянным, а это накладывает ограничение на величину энергии, приобретаемой электроном. Таким образом, требования устойчивости и большого прироста энергии противоречат друг другу. В этом недостаток ускорителя такого типа.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. Я. П. Терлецкому и С. И. Гуцунаеву за помощь и руководство в работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Решение уравнения Гамильтона — Якоби

Исходное уравнение можно упростить, если использовать связь между энергией и z-импульсом электрона, установленную в [1]

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -M_0c^2 + u\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Делая подстановку $V = \frac{M_0 u}{a^2} z + \frac{H_1 u^2 e}{2\omega^2 a^2 c}\varphi(r, z, t)$ и используя указанные выше обозначения, получим следующее уравнение для φ:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = \alpha + \left[y + \frac{\beta}{y} + \varepsilon I_1(y)\cos x\right]^2,$$

где $s = \frac{\omega z}{u}$.

Предполагая малость ε, ищем решение в виде ряда $\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \ldots$ В нулевом приближении имеем

$$\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial s}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\right)^2 = \alpha + \left[y + \frac{\beta}{y}\right]^2;$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial s} - c_1 = \mathrm{const}; \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = \sqrt{c_1^2 - \alpha - \left[y + \frac{\beta}{y}\right]^2};$$

$$\varphi_0 = c_1\, s + \int \sqrt{c_1^2 - \alpha - \left[y + \frac{\beta}{y}\right]^2}\, dy.$$

В первом приближении получим

$$c_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} - \sqrt{c_1^2 - \alpha - \left[y + \frac{\beta}{y}\right]^2}\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \left[y + \frac{\beta}{y}\right] I_1(y)\ \cos(\omega t - s).$$

Ищем φ_1 в виде $\varphi_1 = \mathrm{Re}\,\{R(y)\ e^{i(\omega t - s)}\}$. Тогда $R(y)$ удовлетворяет уравнению

$$-ic_1 R - \sqrt{c_1^2 - \alpha - \left[y + \frac{\beta}{y}\right]^2}\ R' = \left[y + \frac{\beta}{y}\right]\ I_1(y).$$

Решением его будет

$$R(y) = -e^{-i\Psi_0} \int \frac{\left[y + \frac{\beta}{y}\right] I_1(y)\ e^{i\Psi_0}\, dy}{\sqrt{c_1^2 - \alpha - \left[y + \frac{\beta}{y}\right]^2}},$$

где

$$\Psi_0 = \int \frac{c_1\, dy}{\sqrt{c_1^2 - \alpha - \left[y + \frac{\beta}{y}\right]^2}}.$$

Поэтому

$$\varphi_1 = -\int \cos(x - \Psi)\, f(y')\, dy'$$

и, следовательно,

$$\varphi = c_1 s + \int \sqrt{c_1^2 - \alpha - \left[y + \frac{\beta}{y}\right]^2}\ dy - \varepsilon \int \cos(x - \Psi)\, f(y')\, dy'.$$

Траектория электрона подчиняется условию $\dfrac{\partial \varphi}{\partial c_1} = \mathrm{const}$, которое выглядит так:

$$s + \Psi_0 + \varepsilon\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_1} = \mathrm{const}.$$

С помощью φ вычислим энергию электрона

$$E = M_0 c^2 - u\ \frac{\partial V}{\partial z} = M_0 c^2 - \frac{M_0 u^2}{a^2} - \frac{H_1 u^2 e}{2\omega a^2 c}\, \frac{\partial \varphi}{\partial s} = M_0 c^2 - \frac{M_0 u^2}{a^2} - c_1\, \frac{H_1 u^2 e}{2\omega a^2 c} -$$

$$- \frac{eBu}{ac} \int \sin(\Psi - x)\ \ f(y')\, dy',$$

что при учете начальных условий $\left.\dfrac{\partial V}{\partial z}\right|_{t=0} = \left.\dfrac{\partial V}{\partial r}\right|_{t=0} = 0$ и знака заряда электрона ($e < 0$) совпадает с приведенным в тексте.

Исследование знака квадратичных форм

$$\{2W\} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\{2W\}.$$

Квадратичная форма положительна, если положительны ее диагональные миноры (критерий Гурвица). В нашем случае имеем

$$D_1 = \{2W\}_{11} = \frac{e^2}{mc^2}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2 \left(1-\frac{e^2A^2}{m^2c^4}\right) + A \frac{\partial^2 A}{\partial r^2}\right] > 0,$$

если

$$\Delta_{11} = A \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} > 0;$$

$$\{2W\}_{22} = \frac{e^2}{mc^2}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 \left(1-\frac{e^2A^2}{m^2c^4}\right) + A \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right] > 0,$$

если

$$\Delta_{22} = A \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} > 0;$$

$$\{2W\}_{33} = \frac{1}{m}\left(1-\frac{p_1^2}{m^2c^2}\right) > 0; \quad \{2W\}_{44} = \frac{1}{m}\left(1-\frac{p_2^2}{m^2c^2}\right) > 0;$$

$$D_2 = (\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2) + \frac{e^2}{mc^2}\left(1-\frac{e^2A^2}{m^2c^4}\right)\left[\Delta_{11}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2 - 2\Delta_{12}\frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial A}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + \Delta_{22}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2\right] > 0,$$

если

$$\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2 > 0;$$

$$D_3 = (\Delta_{11}\ \Delta_{22} - \Delta_{12}^2)\left(\frac{1}{m} - \frac{p_1^2}{m^3c^2}\right) + \frac{e^2}{m^2c^2}\left(1-\frac{p_1^2c^2+e^2A^2}{m^2c^4}\right) \times$$

$$\times \left[\Delta_{11}\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 - 2\Delta_{12}\frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial A}{\partial z} + \Delta_{22}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2\right] > 0;$$

$$D_4 = (\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2)\frac{1}{m^2}\left(1-\frac{p_1^2+p_2^2}{m^2c^2}\right) + \left[\Delta_{11}\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 - 2\Delta_{12}\frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial A}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + \Delta_{22}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2\right]\frac{e^2m_0^2}{m^5c^2}.$$

Таким образом, при выполнении перечисленных условий квадратичная форма $\{2W\}$ будет положительно определенной. Найдем теперь, при каких условиях форма $\frac{d}{dt}\{2W\}$ будет отрицательной. Для этого необходимо, чтобы ее последовательные диагональные миноры имели противоположные знаки, начиная с отрицательного. Рассмотрим сначала диагональные элементы:

$$\Delta_1 = \frac{d}{dt}\{2W\}_{11} = -\frac{\dot m}{m}\{2W\}_{11} + \frac{e^2}{mc^2}\left[\dot\Delta_{11} + \left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2 \frac{d}{dt}\left(1-\frac{e^2A^2}{m^2c^4}\right)\right] +$$

$$+ \frac{e^2}{mc^2}\left(1-\frac{e^2A^2}{m^2c^4}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2.$$

Последним членом в Δ_1 можно пренебречь, так как $\frac{e^2 A^2}{m^2 c^4} = \left(\frac{r\dot{\varphi}}{c}\right)^2 \approx 1$. Поэтому $\Delta_1 < 0$, если $\dot{m} > 0$; $\dot{A} > 0$; $\dot{\Delta}_{11} < 0$. Аналогично $\frac{d}{dt}\{2W\}_{22} < 0$, если $\dot{m} > 0$; $\dot{A} > 0$; $\dot{\Delta}_{22} < 0$:

$$\frac{d}{dt}\{2W\}_{33} = \frac{e^2}{m^3 c^4}\left[2\frac{p_1}{m} A \frac{\partial A}{\partial r} + u A \frac{\partial A}{\partial z}\left(1 - \frac{3p_1^2}{m^2 c^2}\right)\right] < 0,$$

если учесть медленность радиального движения $\left(\frac{3p_1^2}{m^2 c^2} \ll 1\right)$ и считать, что $\frac{\partial A}{\partial r} < 0$, $\frac{\partial A}{\partial z} < 0$.

$$\frac{d}{dt}\{2W\}_{44} = A \frac{\partial A}{\partial z} \frac{e^2}{m^3 c^4}\left[2\frac{p_2 M_0}{m^2} + u\left(1 - \frac{p_2^2}{m^2 c^2}\right)\right] < 0,$$

если $\frac{\partial A}{\partial z} < 0$.

Второй диагональный минор имеет вид

$$\Delta_2 \approx \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left\{\left(\frac{\dot{m}}{m}\right)^2 (\Delta_{11} \Delta_{22} - \Delta_{12}^2) - \frac{\dot{m}}{m} \frac{d}{dt}(\Delta_{11} \Delta_{22} - \Delta_{12}^2) + \right.$$

$$+ \dot{\Delta}_{11} \dot{\Delta}_{12} - (\dot{\Delta}_{12})^2 + \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{e^2 A^2}{m^2 c^4}\right)\left[\left(-\frac{\dot{m}}{m}\Delta_{11} + \dot{\Delta}_{11}\right)\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 - \right.$$

$$\left.\left. - 2\left(-\frac{\dot{m}}{m}\Delta_{12} + \dot{\Delta}_{12}\right)\frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial A}{\partial z} + \left(-\frac{\dot{m}}{m}\Delta_{22} + \dot{\Delta}_{22}\right)\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2\right]\right\} > 0,$$

если $\dot{\Delta}_{11}\dot{\Delta}_{22} - (\dot{\Delta}_{12})^2 > 0$. Из этого же условия следует, что

$$\frac{d}{dt}(\Delta_{11} \Delta_{22} - \Delta_{12}^2) < 0.$$

Далее можно показать, что

$$\overline{\Delta}_2 \equiv (2\dot{W}_{33})(2\dot{W}_{44}) - (2\dot{W}_{34})^2 = \left(\frac{e^2}{m^3 c^4}\right)^2 A^2 \left\{\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2\left[u^2\left(1 - \frac{3p_1^2}{m^2 c^2}\right) - \frac{p_1^2}{m^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + c^2\left(-1 + 4\frac{M_0}{m} - 3\frac{M_0^2}{m^2}\right)\right] + 2\frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial A}{\partial z}\frac{p_1}{m}\left(u + \frac{p_2}{m}\right) - \left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2 \frac{p_2^2}{m^2}\right\} > 0,$$

если $M_0 \leqslant m \leqslant 3M_0$ и $u\frac{\partial A}{\partial z} - \dot{z}\frac{\partial A}{\partial r} < 0$.

Последнее неравенство выполняется, если $\frac{\partial A}{\partial r}$ и $\frac{\partial A}{\partial z}$ — величины примерно одного порядка $\left(\frac{\partial A}{\partial r} \geqslant \frac{\partial A}{\partial z}\right)$.

Рассмотрим теперь третий диагональный минор.

$$\Delta_3 = (2\dot{W}_{33})\,\Delta_2 - [(2\dot{W}_{32})^2 (2\dot{W}_{11}) - 2(2\dot{W}_{32})(2\dot{W}_{31})(2\dot{W}_{12}) + (2\dot{W}_{31})^2 (2\dot{W}_{22})].$$

Здесь появляются члены вида

$$-\frac{e^6}{m^5 c^8}\frac{\dot{m}}{m}\left[u^2 \frac{e^2 A^2}{m^2 c^4}\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 (\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{22}^2) - \left(\frac{e^2 A^2}{m^2 c^3}\right)^2 \left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^4 \Delta_{22} - \right.$$

$$\left. - \frac{p_1^2}{m^2 c^2} u^2 \Delta_{22}^3\right].$$

Они будут отрицательными, если

$$\left|\frac{\partial A}{\partial q_i} \quad \frac{\partial A}{\partial q_j} \Delta_{kl} \qquad \Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2, \right. \tag{a}$$

что возможно при достаточной малости $\frac{\partial A}{\partial q_i}$.

Четвертый диагональный минор, так же как и третий, содержит положительную часть

$$\Delta_4^{(+)} = \Delta_2\overline{\Delta}_2 + [(2\dot{W}_{13})(2\dot{W}_{24}) - (2\dot{W}_{23})(2\dot{W}_{14})]^2$$

и отрицательную часть $\Delta_4^{(-)}$, состоящую из членов, похожих на соответствующие члены в Δ_3, но с коэффициентами $(2\dot{W}_{33})$, $(2\dot{W}_{34})$ и $(2\dot{W}_{44})$. Поэтому при выполнении условия (*a*) Δ_4 будет положительным, что обеспечит отрицательность формы $\frac{d}{dt}\{2W\}$, а тем самым и устойчивость движения.

Следует отметить, что условие (*a*) уже заключает в себе требование малости переменного поля по сравнению с постоянным, да и все остальные условия могут быть выполнены только путем подбора постоянного поля в пренебрежении переменным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Конюков М. В., Терлецкий Я. П. Il. Nuovo Cimento, **9**, № 6, 1958.
2. Schwinger J. Phys. Rev., 75, 1912, 1949.
3. Ляпунов А. М. Общая задача устойчивости движения. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
4. Дубошин Г. Н. ДАН СССР, 1, 1935.

Поступила в редакцию
10. 4 1961 г.

Кафедра
статистической физики и механики
физического факультета