Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1962

С. В. НЕСТЕРОВ, Г. Н. МЕДВЕДЕВ

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО БЕСКОНЕЧНО ГЛУБОКОГО БАССЕЙНА

В настоящей статье излагается общий метод вычисления нелинейных колебаний свободной поверхности тяжелой жидкости, заключенной в бесконечно глубокий прямоугольный бассейн. Найдены квадратичные поправки по амплитуде к линейной теории.

Пусть движение жидкости, заключенной в прямоугольный бесконечно глубокий бассейн, описывается потенциалом u. На свободной поверхности жидкости должны выполняться условия:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}(\operatorname{grad} u)^2 + g\eta = 0, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

где $\eta(x, y, t) = z$ — уравнение свободной поверхности. Кроме того, потенциал u внутри жидкости ($z<0$) должен удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ и на стенках бассейна условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Граничные условия (1) и (2) должны выполняться на поверхности, вид которой априори неизвестен, поэтому введем новые независимые переменные $x=x$; $y=y$; $z_1 = z - \eta(x, y, t)$. В дальнейшем вместо z_1 будем писать просто z.

При такой замене переменных граничные условия будут выполняться на поверхности $z=0$, при этом граничное условие для потенциала имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{g}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[(\nabla u)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial z}\nabla u \nabla \eta + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 (\nabla \eta)^2\right]\right\} + \nabla u \nabla \eta + \frac{\partial u}{\partial z}(\nabla \eta)^2\Bigg]\Bigg|_{z=0}. \tag{3}$$

Уравнение свободной поверхности $\eta(x, y, t)$ определяется из краевого условия (1), которое в новых переменных имеет вид

$$\eta(x, y, t) = -\frac{1}{g}\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[(\nabla u)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial z}\nabla u \nabla\eta + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 (\nabla\eta)^2\right]\right\}. \tag{4}$$

Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в новых переменных имеет вид

$$\Delta u + 2\frac{\partial}{\partial z}(\nabla u \nabla\eta) + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta\eta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\nabla\eta)^2 = 0. \tag{5}$$

Пусть $G(r/r')$ — функция Грина задачи Неймана для области, представляющей исследуемый бассейн. Функция u, удовлетворяющая краевому условию (3) и уравнению (5), определится с помощью функции Грина $G(r/r')$ из интегрального уравнения

$$u(r) = -\frac{1}{q}\iint\limits_S G(r\,|\,r')\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[(\nabla u)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial z'}\nabla u \nabla\eta + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z'}\right)^2 (\nabla u)^2\right]\right\} dx'dy' + \iint\limits_S G(r\,|\,r')\left[\nabla u \nabla\eta + \frac{\partial u}{\partial z'}(\nabla\eta)^2\right] dx'dy' +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{0}\iint\limits_S G(r\,|\,r')\left[2\frac{\partial}{\partial z'}(\nabla u \nabla\eta) + \frac{\partial u}{\partial z'}\Delta\eta + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}(\nabla\eta)^2\right] dx'\,dy'\,dz'\,\Bigg|_{z=0}. \tag{6}$$

Функция Грина задачи Неймана для бесконечно глубокого прямоугольного бассейна длиной a и шириной b имеет вид

$$G(r\,|\,r') = \frac{4}{\pi ab}\sum_{l,m}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi l x}{a}\cos\frac{\pi l x'}{a}\cos\frac{\pi m y}{b}\cos\frac{\pi m y'}{b}}{\sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}}\times$$
$$\times\begin{cases}\operatorname{ch}\pi\mu_{lm} z' e^{\pi\mu_{lm} z} & (z < z')\\ \operatorname{ch}\pi\mu_{lm} z e^{\pi\mu_{lm} z'} & (z > z'),\end{cases}$$

где

$$\mu_{lm} = \sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}},$$

а индексы l и m не равны 0 одновременно.

Задача состоит в том, чтобы найти стационарные решения уравнения (6). Будем искать их методом Н. Н. Боголюбова в следующем виде:

$$\begin{aligned} u &= \lambda u_0 + \lambda^2 u_1 + \lambda^3 u_2 + \ldots \\ \eta &= \lambda\eta_0 + \lambda^2\eta_1 + \lambda^3 u_2 + \ldots, \end{aligned} \tag{7}$$

где λ считается малым параметром.

Функции нулевого приближения выберем в виде

$$u_0(r) = A\cos\frac{\pi k_1}{a}x\cos\frac{\pi k_2}{b}y e^{\pi\sqrt{\frac{k_1^2}{a^2}+\frac{k_2^2}{b^2}}z}\cos\psi,$$

$$\eta_0(r) = \frac{A\sigma_0}{g}\cos\frac{\pi k_1}{a}x\cos\frac{\pi k_2}{b}y\sin\psi,$$

где k_1 и k_2 — произвольные целые числа. Функции u_0 и η_0 являются решениями соответствующей линейной задачи.

Изменение фазы $\psi(t)$ и амплитуды $A(t)$ со временем определяется системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} &= \sigma_0 + \lambda\sigma_1 + \lambda^2\sigma_2 + \ldots\\ \frac{dA}{dt} &= \lambda b_1 + \lambda^2 b_2 + \ldots\end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя ряды (7) в уравнение (6) и вычисляя производные по времени с помощью системы (8), получим уравнения, определяющие последовательные приближения:

$$u_0 = -\frac{\sigma_0^2}{g}\int\limits_0^a\int\limits_0^b G(r\,|\,r')\frac{\partial^2 u_0}{\partial\psi^2}dx'\,dy',$$

$$\begin{aligned}u_1 = &-\frac{\sigma_0^2}{g}\int\limits_0^a\int\limits_0^b G(r\,|\,r')\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} - \frac{2}{\sigma_0}\nabla u_0\nabla\eta_0\right]dx'dy' -\\ &-2\frac{\sigma_0}{g}\int\limits_0^a\int\limits_0^b G(r\,|\,r')\left\{\sigma_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial\psi^2} + b_1\frac{\partial^2 u_0}{\partial\psi\partial A} + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\psi}(\nabla u_0)^2\right\}dx'\,dy' +\\ &+\int\limits_{-\infty}^0\int\limits_0^a\int\limits_0^b G(r\,|\,r')\left[2\frac{\partial}{\partial z}(\nabla u_0\,\nabla\eta_0) + \frac{\partial u_0}{\partial z'}\Delta\eta_0\right]dx'\,dy'\,dz'\,\Bigg|_{z=0},\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}u_2 = &-\frac{\sigma_0^2}{g}\int\limits_0^a\int\limits_0^b G(r\,|\,r')\frac{\partial^2 u_2}{\partial\psi^2}dx'dy' -\\ &-\frac{1}{g}\int\limits_0^a\int\limits_0^b G(r\,|\,r')\left\{(\sigma_1^2 + 2\sigma_0\sigma_2)\frac{\partial^2 u_0}{\partial\psi^2} + 2(\sigma_0 b_2 + b_1\sigma_1)\frac{\partial^2 u_0}{\partial\psi\partial A} +\right.\\ &\left.+ b_1^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial A^2} + \sigma_1' b_1\frac{\partial u_0}{\partial\psi} + b_1 b_1'\frac{\partial u_0}{\partial A} + 2\sigma_0\sigma_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} + 2\sigma_0 b_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi\partial A}\right\}dx'dy' +\\ &+\Phi(u_0, \eta_0, u_1, \eta_1),\end{aligned}$$

где $\Phi(u_0, \eta_0, u_1, \eta_1)$ означает функцию, вычисляемую через предыдущие приближения u_0, η_0, u_1, η_1.

Подстановка u_0 в уравнение нулевого приближения определяет частоту

$$\sigma_0^2 = \pi g \sqrt{\frac{k_1^2}{a^2} + \frac{k_2^2}{b^2}}\,.$$

Во всех последующих приближениях должны отсутствовать гармоники вида

$$\cos\frac{\pi k_1}{a}x\cos\frac{\pi k_2}{b}y\cos\psi; \qquad \cos\frac{\pi k_1}{a}x\cos\frac{\pi k_2}{b}y\sin\psi,$$

то есть все последующие приближения должны быть ортогональными к этим функциям, чем обеспечивается отсутствие вековых членов в последующих приближениях.

Из условия ортогональности u_1 к указанным гармоникам получим $\sigma_1 = b_1 = 0$. Решение уравнения первого приближения имеет вид

$$u_1 = \frac{A^2\sigma_0}{8g}\left\{\frac{\pi_2\left[\frac{4\sigma_0^2}{g}\left(\frac{k_2^2}{b^2}-\frac{k_1^2}{a^2}\right)+\frac{\pi k_1}{a}\left(\frac{3k_2^2}{b^2}-\frac{k_1}{a^2}\right)\right.}{\left(\frac{\pi k_1}{a}-\frac{4\sigma_0^2}{g}\right)\left(\frac{\pi k_1}{a}+\frac{\sigma_0^2}{g}\right)}\cos\frac{2\pi k_1}{a}x e^{\frac{2\pi k_1}{a}z} -\right.$$

$$-\frac{\pi^2\left[\frac{4\sigma_0^2}{g}\left(\frac{k_1^2}{a^2}-\frac{k_2^2}{b^2}\right)+\frac{\pi k_2}{b}\left(\frac{3k_1^2}{a^2}-\frac{k_2^2}{b^2}\right)\right.}{\left(\frac{\pi k_2}{b}-\frac{4\sigma_0^2}{g}\right)\left(\frac{\pi k_2}{b}+\frac{\sigma_0^2}{g}\right)}\cos\frac{2\pi k_2}{b}y e^{\frac{2\pi k_2}{b}z} +$$

$$\left.+\frac{\sigma_0^2}{g}\cos\frac{2\pi k_1}{a}x\cos\frac{2\pi k_2}{b}y e^{\frac{2\sigma_0^2}{g}z}\right\}\sin 2\psi.$$

Первое приближение поверхности $\eta_1(x, y, t)$ выражается через

$$\eta_1 = \frac{A^2}{4g}\left\{\left[\frac{\frac{4\sigma_0^4\pi^2}{g^2}\left(\frac{k_2^2}{2b^2}-\frac{k_1^2}{a^2}\right)+\frac{\pi^3 k_1\sigma_0^2}{ag}\left(\frac{3k_2^2}{2b^2}-\frac{k_1^2}{a^2}\right)+\frac{\pi^4 k_1^2 k_2^2}{2a^2b^2}}{\left(\frac{4\sigma_0^2}{g}-\frac{\pi k_1}{a}\right)\left(\frac{\pi k_1}{a}+\frac{\sigma_0^2}{g}\right)}\cos\frac{2\pi k_1}{a}x -\right.\right.$$

$$-\frac{\frac{4\sigma_0^4\pi^2}{g^2}\left(\frac{k_1^2}{2a^2}-\frac{k_2^2}{b^2}\right)+\frac{\pi^3 k_2\sigma_0^2}{bg}\left(\frac{3k_1^2}{2a^2}-\frac{k_2^2}{b^2}\right)+\frac{\pi^4 k_1^2 k_2^2}{2a^2b^2}}{\left(\frac{4\sigma_0^2}{g}-\frac{\pi k_2}{b}\right)\left(\frac{\pi k_2}{b}+\frac{\sigma_0^2}{g}\right)}\cos\frac{2\pi k_2}{b}y -$$

$$\left.-\frac{\sigma_0^4}{g^2}\cos\frac{2\pi k_1}{a}\cos\frac{2\pi k_2}{b}y+\frac{\sigma_0^4}{2g}\right]\cos 2\psi - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2 k_1^2}{a^2}\cos\frac{2\pi k_2}{b}y+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\pi^2 k_2^2}{b^2}\cos\frac{2\pi k_1}{a}x\right]\right\}.$$

Рассматривая $\eta=\lambda\eta_0+\lambda^2\eta_1$, можно утверждать, что ни в какой момент времени свободная поверхность не становится плоской, так как η_1 содержит член, не зависящий от времени; узловые линии свободной поверхности движутся.

Следует отметить, что несовпадение выражения η, вычисленного вышеприведенным методом, с результатом, полученным в работе (1), объясняется тем, что в указанной работе находится разложение решения по безразмерному параметру.

Можно сказать, что на конечном промежутке изменения времени $0\leqslant t\leqslant t_0$ имеет место асимптотическая оценка

$$\left(\int\limits_0^a\int\limits_0^b\left[u(r,t)-\sum_{n=0}^{N}\lambda^n u_n(r,t)\right]^2 dx\,dy\right)^{1/2}\Big|_{z=0}<\lambda^{N+1}t_0M(N),$$

где $M(N)$ — постоянная, зависящая от числа членов.

В заключение авторы выражают свою признательность члену-корреспонденту Л. Н. Сретенскому за ценное обсуждение настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Секерж-Зенькович Я. И. ДАН СССР, **86**, № **1**, 1952.
2. Сретенский Л. Н. «Вестн. Моск. ун-та», сер. матем., мех., астрон., физ., химии, № 5, 1954.
3. Моисеев Н. Н. ПММ, **22**, № 5, 612—622, 1958.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, М., 1958.

Поступила в редакцию
5. 5 1961 г.

Кафедра
математики физического ф-та