Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 2 — 1962

А. Ф. ДЮБЮК, В. М. БЕРЕЗИН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОГНОЗА ПОЛЯ АТМОСФЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ

В данной статье рассматривается задача прогноза поля атмосферного давления путем решения полной системы уравнений гидродинамики. Решение задачи находим в объеме, ограниченном координатными плоскостями, за исключением вертикальной координаты. По вертикали задача неограниченная. При решении используется геострофическое приближение и вводится основной поток. Используются данные атмосферного давления за два срока.

В настоящее время все больше внимания уделяется задачам краткосрочного прогноза для атмосферного давления путем решения полной системы уравнений гидродинамики. Эта проблема очень важна с точки зрения разработки общей теории прогноза погоды.

Предположим, что атмосфера — идеальная жидкость, причем условимся считать, что $\frac{1}{c^2} \approx 0$, где c — скорость звука. Решение будем искать в предположении, что в атмосфере существует основной перенос воздушных масс с геострофической скоростью, компоненты которой обозначим $\overline{U}$ и $\overline{V}$. Систему координат, в которой запишем исходную систему уравнений, выберем неподвижную, связанную с землей. Рассмотрим адиабатический процесс, где T и p — температура и давление атмосферного воздуха; u, v, w — компоненты скоростей, g — ускорение силы тяжести; $l=2\,\omega\sin\varphi$ — параметр Кориолиса, где ω — угловая скорость вращения земли, φ — широта места. В локальной задаче будем считать $l=\text{const}$. Кроме того, полагаем $T'=T-T_0$, где T_0 — постоянная величина (например, 273°), $V=\frac{T'}{T_0}$, $Q=RT_0 \ln\frac{p}{p_0}+gz$, $c^2=\frac{c_p}{c_v}RT_0$, где $p_0=1000$ *мб*, R — газовая постоянная, A — термический эквивалент работы. Заметим, что $Q=g\,[z-H_{1000}^{p}\,(273^0)]$, где $H_{1000}^{p}\,(273^0)$ — высота изобарической поверхности p над изобарической поверхностью 1000 *мб* при температуре слоя $T=273°$. Задачу решаем в объеме, ограниченном плоскостями, параллельными координатным плоскостям, за исключением вертикальной координаты z. По вертикали вверх задача неограниченная. При решении задачи используем геострофическое приближение. Обозначим буквами с чертой вверху элементы, относящиеся к основному потоку. Предположим, что $u=\overline{U}+u'$, $v=\overline{V}+v'$, $w=w'$ (так как вертикальные потоки малы по сравнению с горизонтальными потоками).

$\vartheta = \vartheta'$, $Q = \overline{Q} + Q'$, причем $\overline{U}_x = \overline{V}_y = \overline{U}_y = \overline{V}_x = \overline{U}_z = \overline{V}_z = \overline{Q}_z = 0$, $\overline{U}_t = \overline{V}_t = 0$, $\overline{Q}_t = 0$, $\overline{Q}_x = l\overline{V}$, $\overline{Q}_y = -l\overline{U}$, где величины со штрихами—отклонение от основных значений.

Исходную систему уравнений нашей задачи запишем в виде

$$\begin{aligned} &u'_t - lv' + Q'_x = -(\vartheta'\overline{Q}_x + \overline{U}u'_x + \overline{V}u'_y),\\ &v'_t + lu' + Q'_y = -(\vartheta'\overline{Q}_y + \overline{U}v'_x + \overline{V}v'_y),\\ &w'_t + Q'_z - g\vartheta' = -(\overline{U}w'_x + \overline{V}w'_y),\\ &u'_x + v'_y + w'_z = 0,\\ &\vartheta'_t = -(\overline{U}\vartheta'_x + \overline{V}\vartheta'_y). \end{aligned} \tag{1}$$

Система (1) линеаризованная, то есть было принято $v'v'_x \approx 0$ и т. п. Обозначим начальные значения при $t = 0$; $u = \mathring{u}$, $v = \mathring{v}$; $w = \mathring{w}$, $Q = \mathring{Q}$, $\vartheta = \mathring{\vartheta}$. Перейдем далее к новой системе координат, движущейся со скоростью основного потока, при этом $t = \tau$:

$$\xi = x - \overline{U}\tau, \quad \eta = y - \overline{V}\tau, \quad \frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial t} - \overline{U}\frac{\partial}{\partial\xi} - \overline{V}\frac{\partial}{\partial\eta},$$

тогда

$$z = z, \quad \frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial y}. \tag{2}$$

В новой системе координат (1) можем переписать так:

$$\begin{aligned} &u'_\tau - lv' + Q'_\xi + \vartheta'\overline{Q}_x = 0,\\ &v'_\tau + lu' + Q'_\eta + \vartheta'\overline{Q}_y = 0,\\ &w'_\tau + Q'_z - g\vartheta' = 0,\\ &u'_\xi + v'_\eta + w'_z = 0,\\ &\vartheta'_\tau = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Из (3) видно, что $\vartheta' = \mathring{\vartheta}(\xi, \eta, z)$, то есть ϑ' в подвижной системе координат не зависит от времени и выражается через начальные значения при $t = 0$. Перепишем (3), перенеся все постоянные члены в правую часть, после чего получим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} &u'_\tau - lv' + Q'_\xi = -\overline{Q}_x\mathring{\vartheta}',\\ &v'_\tau + lu' + Q'_\eta = -\overline{Q}_y\mathring{\vartheta}',\\ &w'_\tau + Q'_z = g\mathring{\vartheta}',\\ &u'_\xi + v'_\eta + w'_z = 0,\\ &\vartheta'_\tau = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Сведем (4) к одному дифференциальному уравнению в частных производных относительно Q' путем исключения u', v', w'.

Получим

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Delta Q' + l^2\frac{\partial^2 Q'}{\partial z^2} = gl^2\frac{\partial\mathring{\vartheta}'}{\partial z}. \qquad (5)$$

Таким образом, мы получили уравнение типа С. Л. Соболева. Здесь $\Delta Q' = \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)Q'$. Обозначим $\Delta' Q' = \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)Q'$. Запишем граничные условия в новой системе координат в виде

$$Q'/_{\xi=0} = 0; \quad Q'/_{\eta=0} = 0; \quad Q'/_{z=\infty} = 0.$$

$$Q'/_{\xi=L_1} = 0; \quad Q'/_{\eta=L_2} = 0; \quad Q'_z/_{z=0} = g\mathring{\vartheta}'/_{z=0} = g\overset{\circ\circ}{\vartheta}{}'_{(x,y)},$$

где L_1 и L_2 — длина и ширина области, для которой дается прогноз.

Применим к (5) преобразования Лапласа — Карсона относительно τ, причем

$$\frac{\partial^2\overline{Q}'}{\partial z^2} + \frac{p^2}{p^2+l^2}\overline{\Delta' Q'} = \frac{1}{p^2+l^2}\left(p^2\Delta\mathring{Q}' + p\Delta\mathring{Q}'_t + gl^2\frac{\partial\mathring{\vartheta}'}{\partial z}\right) = \overline{F}, \qquad (6)$$

где $\overline{Q}'$, $\overline{\Delta' Q'}$, $\overline{F}$ — изображения функций. Решение для (6) будем искать в виде

$$\overline{Q}' = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_m(\xi)\,B_n(\eta)\,D_{mn}(z),$$

где

$$A_m(\xi) = \sin\frac{m\pi\xi}{L_1}; \qquad B_n(\eta) = \sin\frac{n\pi\eta}{L_2}. \qquad (7)$$

Подставим (7) в (6), причем отметим, что (6) справедливо для каждого слагаемого из суммы по m и n. Получим уравнение относительно z $\left(\text{полагая } \overline{F} = \sum_m\sum_n \overline{f}_{mn}\sin\frac{m\pi\xi}{L_1}\sin\frac{n\pi\eta}{L_2}\right)$,

$$D''_{mn}(z) - \frac{p^2 d^2_{mn}}{p^2+l^2}D_{mn}(z) = \overline{f}_{mn}, \qquad (8)$$

где

$$\overline{f}_{mn} = \frac{4}{L_1L_2}\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}\overline{F}\sin\frac{m\pi\xi}{L_1}\sin\frac{n\pi\eta}{L_2}\,d\xi\,d\eta.$$

Обозначим $\frac{p^2 d^2_{mn}}{p^2+l^2} = \varkappa^2_{mn}$, где $d^2_{mn} = \pi^2\left(\frac{m^2}{L_1^2} + \frac{n^2}{L_2^2}\right)$. Решение для (8) будем искать при следующих граничных условиях: при $z = 0$, $D'_{mn}(z) = g\overset{\circ\circ}{\vartheta}_{mn}$, где $\overset{\circ\circ}{\vartheta}_{mn}$ — значение для поверхности земли при $t = 0$, это равносильно удовлетворению уравнения статики. При $z \to \infty$ используем условие ограниченности. Решение будет

$$D_{mn}(z) = c_1 e^{\varkappa_{mn}z} + c_2 e^{-\varkappa_{mn}z}. \qquad (9)$$

Причем

$$\overset{\circ\circ}{\vartheta}_{mn}(x, y) = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \overset{\circ\circ}{\vartheta}(x, y) \sin \frac{m\pi\xi}{L_1} \sin \frac{n\pi\eta}{L_2} \, d\xi \, d\eta,$$

$$\overset{\circ\circ}{\vartheta}(x, y) = \sum_m \sum_n \overset{\circ\circ}{\vartheta}_{mn}(x, y) \sin \frac{m\pi\xi}{L_1} \sin \frac{n\pi\eta}{L_2}.$$

Пользуясь методом вариации произвольных постоянных и граничными условиями, находим значения c_1 и c_2, тогда

$$D_{mn}(z) = -\frac{g\overset{\circ\circ}{\vartheta}_{mn}}{\varkappa_{mn}} e^{-\varkappa_{mn} z} - \int_0^\infty \overline{f}_{mn} \frac{1}{2\varkappa_{mn}} \left(e^{-\varkappa_{mn}|z-z'|} + e^{\varkappa_{mn}|z+z'|}\right) dz'. \tag{10}$$

Получено решение, похожее на (6). Напишем подробнее выражение (10)

$$\overline{f}_{mn} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \left(\frac{p^2 \Delta \mathring{Q}'}{p^2 + l^2} + \frac{p \Delta \mathring{Q}_t'}{p^2 + l^2} + \frac{g l^2}{p^2 + l^2} \cdot \frac{\partial \mathring{\vartheta}'}{\partial z} \right) \frac{1}{2\varkappa_{mn}} \times$$

$$\times \sin \frac{m\pi\xi}{L_1} \sin \frac{n\pi\eta}{L_2} \, d\xi d\eta. \tag{11}$$

Тогда

$$\overline{Q}' = \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \left[-\frac{g}{\varkappa_{mn}} e^{-\varkappa_{mn} z} \overset{\circ\circ}{\vartheta}{}'_{mn} - \int_0^\infty \overline{f}_{mn} \frac{1}{2\varkappa_{mn}} \left(e^{-\varkappa_{mn}|z-z'|} + e^{\varkappa_{mn}|z+z'|} \right) dz' \right] \times$$

$$\times \sin \frac{m\pi\xi}{L_1} \sin \frac{n\pi\eta}{L_2}, \tag{12}$$

где $\overline{f}_{mn}$ — выражение (11).

Проведя в (12) обратные преобразования Лапласа — Карсона, получим

$$Q' = \sum_m^\infty \sum_n^\infty \left[-\frac{g\overset{\circ\circ}{\vartheta}{}'_{mn}}{d_{mn}} \int_0^\infty \left(\frac{tl}{\tau}\right)^{1/2} J_1 (2\sqrt{lt\tau})\, \varphi_1(\tau, z)\, dz - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty (f_{mn}(t, z - z') + f_{mn}(t, z + z'))\, dz' \right] \sin \frac{m\pi\xi}{L_1} \sin \frac{n\pi\eta}{L_2},$$

где

$$\varphi(\tau, z) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \left\{ \int_0^{\tau - \tau_1} J_0 \left(\sqrt{(\tau - \tau_1)^2 - \Theta^2}\right) J_0 \left(2\sqrt{z\Theta d_{mn}}\right) d\Theta \right\} \times$$

$$\times \left\{ 2J_0(\tau_1) + \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - \Theta) J_0(\Theta)\, d\Theta + \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} J_0(\tau_1) \right\} d\tau_1.$$

$$f_{mn}(t, z) = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \left\{ \frac{\Delta \mathring{Q}'}{2d_{mn}} \, l \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \varphi_1(\Theta, z) \cos l (t - \Theta) \, d\Theta \right) - \right.$$

$$- \frac{\Delta \mathring{Q}'_t}{2d_{mn}} \, l \int_0^t \varphi_1(\Theta, z) \cos l (t - \Theta) \, d\Theta - \frac{gl^2}{2d_{mn}} \frac{\partial \mathring{\vartheta}'_{mn}}{\partial z} \times$$

$$\left. \times \int_0^t \frac{1}{l} \varphi_1(\Theta, z) \sin l (t - \Theta) \, d\Theta \right\} \sin \frac{m\pi\xi}{L_1} \sin \frac{n\pi\eta}{L_2} \, d\xi d\eta,$$

где

$$\varphi_1(\Theta, z) = \frac{1}{d_{mn}} \int_0^\infty J_1(2 \sqrt{l\Theta\tau_2}) \left(\frac{l\Theta}{\tau_2} \right)^{1/2} \varphi(\Theta, z) \, d\tau_2.$$

Таким образом, решение получим в виде несобственных интегралов от бесселевых функций по координате z и тригонометрических и бесселевых функций относительно временной переменной.

Решение представляет определенный интерес с точки зрения подсчета на электронной вычислительной машине. Счет можно вести с большим шагом, для каждого узла сетки, задав определенный, интересующий нас срок $\Delta t = t - t_0$. Полученные значения Q' прибавляем к $\overline{Q}$ и получим искомые значения Q. В решении следует перейти к первоначальным координатам или если использовать подвижную систему координат, то надо учитывать, что она движется вместе с основным потоком.

ЛИТЕРАТУРА

Березин В. М. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрономии, № 4, 1960.

Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. Гостехтеориздат, М., 1951.

Дюбюк А. Ф. К гидродинамическому прогнозу барического и кинематического полей. ДАН СССР, 123, № 2, 1958.

Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. Гостехтеориздат, М., 1957.

Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. Гостехтеориздат, М., 1950.

Рыжик Н. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехтеориздат, М., 1951.

Поступила в редакцию
22. 5 1961 г.

Кафедра
физики атмосферы