

Ю. А. ИЛЬИНСКИЙ

## О ДВУХКОНТУРНОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ГЕНЕРАТОРЕ

Рассмотрен двухконтурный параметрический генератор с кратным соотношением частот в режиме деления частоты накачки. Рассмотрены также свойства автономного двухконтурного параметрического генератора.

### Двухконтурный параметрический генератор-делитель частоты

Двухконтурный параметрический генератор генерирует одновременно две частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , такие, что их сумма равна частоте накачки [1, 2]. Если в нелинейной системе есть две частоты, то появляются и всевозможные комбинационные частоты  $\pm n\omega_1 \pm m\omega_2$ . Пусть отношение  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  близко к рациональному числу  $\frac{p}{q}$  (где  $p$  и  $q$  небольшие целые взаимно простые числа). Тогда некоторые из этих комбинационных частот будут близки к частотам  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и могут оказать значительное влияние на характер колебаний. Колебания в контурах будут уже существенно отличаться от периодических гармонических с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно в первом и втором контурах. Эти колебания будут иметь характер биений основной частоты колебаний с комбинационными частотами. Это приводит, как и в случае воздействия внешней силы на генератор [2],

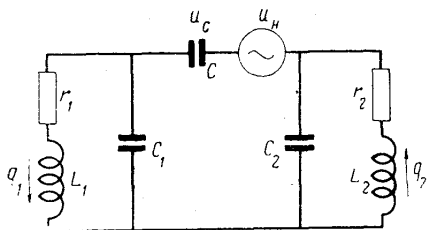


Рис. 1. Схема двухконтурного параметрического генератора

к изменению частот колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и даже к возникновению синхронного режима: отношение частот становится точно равным  $\frac{p}{q}$  (см. [1, 3]).

Рассмотрим случай, когда отношение частот контуров близко к 1:3.

Схема двухконтурного параметрического генератора изображена на рис. 1. Уравнения этого генератора имеют вид

$$L_i \ddot{q}_i + r_i (\dot{q}_i) \dot{q}_i = \frac{1}{C_i} (q_c - q_i). \quad (1)$$

Здесь  $i=1,2$ ;  $r_i$  — нелинейные сопротивления в контурах;  $u_n$  — напряжение накачки;  $q_i$  — заряд, протекающий через индуктивность  $L_i$ ;  $C$  — нелинейная емкость связи;  $u_c$  и  $q_c$  — напряжение на  $C$  и ее заряд. Так как

$$-u_n + u_c(q_c) + \frac{q_c - q_1}{C_1} + \frac{q_c - q_2}{C_2} = 0, \quad (2)$$

то

$$q_c = q_c(u), \quad u = u_n + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}, \quad (3)$$

где  $q_c(u)$  представляет собой зависимость заряда от напряжения на емкости, являющейся последовательным соединением  $C$ ,  $C_1$   $C_2$ .

Функцию  $q_c(u)$  возьмем в виде полинома третьей степени. Далее, разложим  $q_c\left(u_n + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}\right)$  по степеням  $\left(\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}\right)$ . Члены, содержащие  $\left(\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}\right)$  в четной степени, не дают вклада в укороченные уравнения. Кроме того, в балансной схеме накачки эти члены компенсируются. Поэтому не будем учитывать члены с четными степенями относительно  $\left(\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}\right)$ , и тогда уравнения получают вид

$$\ddot{x}_i + 2\sigma_i(\dot{x}_i)\dot{x}_i + \omega_{i0}^2 x_i = \alpha_i [f(\omega t)(x_1 + x_2) + \gamma(x_1 + x_2)^3]. \quad (4)$$

Обозначения

$$x_i = \frac{q_i}{C_i}; \quad 2\sigma_i(\dot{x}_i) = \frac{r_i(\dot{q}_i)}{L_i}; \quad \omega_{i0}^2 = \frac{1}{L_i C_i};$$

$\alpha_i = \frac{\omega_{i0}^2}{C_i}$ ,  $f$  — периодическая функция с периодом  $2\pi$ ,  $\omega$  — частота накачки,  $\gamma$  — коэффициент, характеризующий нелинейные свойства емкости  $C$ .

Пусть  $3\omega_{10} \approx \omega_{20}$ , а  $\omega_{10} + \omega_{20} \approx \omega$ , тогда подстановкой

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 e^{j\frac{\omega}{4}t} + z_{-1} e^{-j\frac{\omega}{4}t}, \\ \dot{x}_1 &= j\frac{\omega}{4} [z_1 e^{j\frac{\omega}{4}t} - z_{-1} e^{-j\frac{\omega}{4}t}], \\ x_2 &= z_2 e^{j\frac{3\omega}{4}t} + z_{-2} e^{-j\frac{3\omega}{4}t}, \\ \dot{x}_2 &= j\frac{3\omega}{4} [z_2 e^{j\frac{3\omega}{4}t} - z_{-2} e^{-j\frac{3\omega}{4}t}], \\ z_{-i} &= z_i^*, \quad f(\omega t) = \sum_k f_k e^{j\omega k t}, \end{aligned} \quad (5)$$

уравнения (4) приводятся к стандартной форме [2, 4]. И после усреднения получаем укороченные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -[\delta_1(|z_1|^2) + j\Delta_1] z_1 - j\frac{2\alpha_1 f_1}{\omega} z_{-2} - \\ &- j\frac{6\alpha_1 \gamma}{\omega} (|z_1|^2 + 2|z_2|^2) z_1 - j\frac{6\alpha_1 \gamma}{\omega} z_{-1}^2 z_2, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & - [\delta_2 (|z_2|^2) + j \Delta_2] z_2 - j \frac{2\alpha_2 f_1}{3\omega} z_{-1} - \\ & - j \frac{2\alpha_2 \gamma}{\omega} (|z_2|^2 + 2|z_1|^2) z_2 - j \frac{2\alpha_2 \gamma}{3\omega} z_1^3. \end{aligned}$$

В уравнениях (6)

$$\Delta_1 = \frac{\left(\frac{\omega}{4}\right)^2 - \omega_{10}^2}{2 \frac{\omega}{4}}; \quad \Delta_2 = \frac{\left(\frac{3\omega}{4}\right)^2 - \omega_{20}^2}{2 \frac{3\omega}{4}},$$

$\delta_i$  — усредненные затухания  $\sigma_i$  контуров [2].

Укороченные уравнения непосредственно нельзя решить даже при  $\delta_i = \text{const}$ . Рассмотрим случай, когда в уравнениях (6) члены с  $\gamma$  малы. Полагая  $z_i = A_i e^{i\varphi_i}$ ,  $f_1 = |f_1| e^{i\varphi}$ , перепишем уравнения (6) как уравнения для действительных амплитуд и фаз. Полагаем также  $\gamma = \mu \gamma'$ ,  $\Delta_1 = \mu \Delta'_1$ ,  $\Delta'_2 = \mu \Delta'_2$ ,  $\mu$  — малый параметр. Раскладывая, как в работе [2], укороченные уравнения по параметру  $\mu$ , получим для  $\Phi = 3\varphi_1 - \varphi_2$  уравнение

$$\dot{\Phi} = \mu \left[ -\frac{3\delta_{10} - \delta_{20}}{\delta_{10} + \delta_{20}} \Delta' + \frac{\gamma'}{|f_1|} \cdot \frac{8\delta_{10}\delta_{20}}{\delta_{10} + \delta_{20}} A_{10}^2 \cos \Phi \right]. \quad (7)$$

Здесь  $\Delta'$  — расстройка накачки:  $\mu \Delta' = \omega - \omega_0$ ,  $A_{10}$  — амплитуда колебаний при  $\mu = 0$ ,  $\delta_{i0} = \delta_i(A_{i0}^2)$ .

Стационарное решение этого уравнения ( $\dot{\Phi} = 0$ ) соответствует режиму деления частоты накачки, когда частоты, генерируемые схемой, равны  $\frac{\omega}{4}$  и  $\frac{3\omega}{4}$ . Ширина области расстроек накачки, в которой существует этот режим, как следует из (7), равна  $2 \left| \frac{\gamma'}{f_1} \cdot \frac{8\delta_{10}\delta_{20}}{3\delta_{10} - \delta_{20}} \right|$ . Таким образом, полоса делителя частоты будет большая, если  $3\delta_{10} \approx \delta_{20}$ , то есть  $Q_{10} \approx Q_{20}$ , где  $Q_{i0}$  — добротности контуров.

Смысл этих условий заключается в том, что при  $\gamma = 0$  или при расстройке контуров от соотношения  $3\omega_{10} \approx \omega_{20}$ , когда члены с  $\gamma$  уже мало влияют на колебания, крутизна зависимости частоты колебаний в  $i$ -м контуре от частоты накачки равна [2]  $\frac{\delta_{i0}}{\delta_{10} + \delta_{20}}$ . При  $3\delta_{10} = \delta_{20}$  эта крутизна равна соответственно  $1/4$  и  $3/4$  — как у делителя частоты накачки.

Вблизи полосы деления частоты согласно (7) должны наблюдаться биения такого же типа, как при воздействии на генератор малой внешней силой [2].

### Экспериментальное исследование двухконтурного параметрического делителя частоты

Экспериментально исследовался двухконтурный параметрический делитель частоты, в котором использовались кристаллические диоды в качестве нелинейной емкости. Частота первого контура была порядка 102 кГц. В этом контуре можно было включать точечный кристаллический диод и ограничивать амплитуду колебаний. Частота второго контура настраивалась так, чтобы получить соотношение частот 1:3 (то есть порядка 306 кГц).

При такой настройке контуров получались кривые типа рис. 2. На этом рисунке построена зависимость амплитуды колебаний в первом контуре  $V_1$  (в эффективных вольтах) и частоты этих колебаний  $\omega_1$  от частоты накачки  $\omega$ . Амплитуды ограничивались дополнительным диодом в первом контуре, смещение на котором было — 0,25  $v$ . В середине полосы возбуждения имеется область, где осуществляется режим деления частоты накачки. Эта область занимает примерно одну треть полосы возбуждения и хорошо видна на рис. 2. В этой области частоты и фазы колебаний жестко заданы частотой и фазой накачки, так, что на осциллографе можно наблюдать фигуры Лиссажу между колебаниями в контурах и между любым из этих колебаний и напряжением накачки (1:3, 1:4, 3:4 соответственно). Вне этой области, особенно у ее границы, имеют место биения того же типа, как при подаче на генератор малой внешней силы — рис. 3. Частота этих биений быстро растет при удалении от границы полосы деления частоты накачки. Их глубина постепенно падает при удалении от границы полосы. Фактически на рис. 2 построена амплитуда колебаний в первом контуре, усредненная прибором. Частота колебаний измерялась по фигурам Лиссажу с вспомогательным напряжением. Из-за биений фигуры Лиссажу были несколько размыты, особенно у границы области деления частоты накачки — рис. 4. Биения представляют собой амплитудную и фазовую модуляцию колебаний, как видно из рис. 4. И по фигурам Лиссажу измеряется средняя частота.

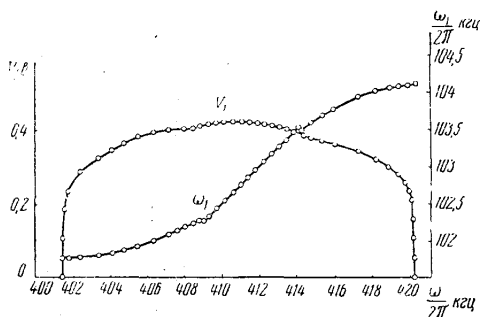


Рис. 2. Зависимость амплитуды колебаний в первом контуре  $V_1$  и частоты этих колебаний  $\omega_1$  от частоты накачки  $\omega$

Амплитуда колебаний во втором контуре изменялась так же, как и  $V_1$  вблизи полосы частот, где система работает как делитель частоты, наблюдались биения, как в первом контуре.

На рис. 5 построена зависимость частоты колебаний в первом контуре от частоты накачки при различной настройке второго контура. Кривые 1 и 5 соответствуют случаю, когда система расстроена от режима 1:3. Кривые 2 и 4 соответствуют такой настройке, когда частоты колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$  относятся как 1:3, при частоте накачки  $\omega$  на краю полосы возбуждения. Кривая 3 соответствует настройке, когда собственные частоты контуров относятся как 1:3, и область режима  $\omega_1 : \omega_2 = 1:3$  лежит в середине полосы возбуждения (как и на рис. 2). Пунктиром на рис. 5 проведена прямая  $\omega_1 = 1/4 \omega$ .

Крутизна кривых 1 и 5 на рис. 5 близка к  $1/4$ , что обеспечило относительно широкую полосу частот накачки, в которой частота  $\omega_1$  точно

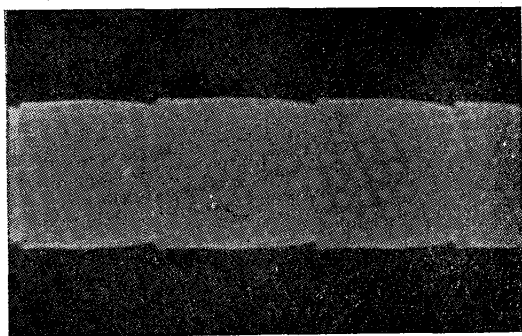


Рис. 3. Осциллограмма биений в двухконтурном параметрическом генераторе

равна  $\frac{1}{4}\omega$ . Если уменьшать добротность второго контура, то аналогичные кривые будут иметь меньшую крутизну и полоса уменьшается в несколько раз.

Возможен случай, когда в полосе возбуждения имеются две области, в которых  $\omega_1$  точно равна  $\frac{1}{4}\omega$ . Это осуществляется, когда  $\frac{d\omega_1}{d\omega} > \frac{1}{4}$ .

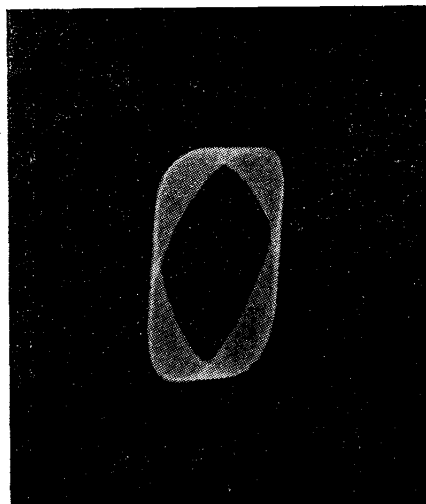


Рис. 4. Фигура Лиссажу между напряжением на первом контуре и вспомогательным синусоидальным напряжением при биениях

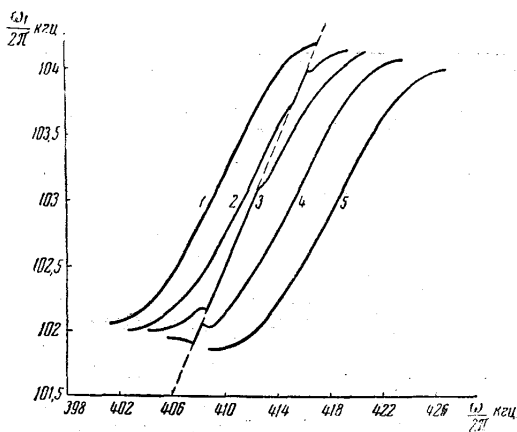


Рис. 5. Зависимость частоты колебаний в первом контуре  $\omega_1$  от частоты накачки  $\omega$  при различных настройках второго контура

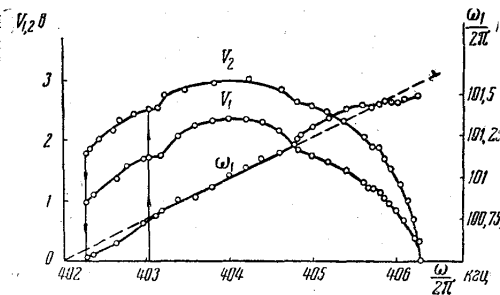


Рис. 6. Амплитуды колебаний в контурах  $V_1$  и  $V_2$  и частота колебаний  $\omega_1$  в генераторе без ограничительного диода

Для этого надо, чтобы была достаточно велика добротность второго контура ( $Q_{20} > Q_{10}$ ). Этот случай представлен на рис. 6. На рис. 6 построены  $V_1$ ,  $V_2$  и  $\omega_1$ , но для схемы без ограничительного диода. Пунктиром проведена прямая  $\omega_1 = \frac{\omega}{4}$ .

Соответствующим образом настраивая контуры, можно было получать режимы, когда  $\omega_1 : \omega_2$ , как 1 : 4 и 2 : 7, то есть получать в первом

контуре колебания с частотой  $\frac{\omega}{5}$  и  $\frac{\omega}{4,5}$ . Эти режимы имели значительно более узкую полосу, что для 1:4 объясняется применением балансной схемы накачки.

### Автономный двухконтурный параметрический генератор

В обычном параметрическом генераторе возбуждение и поддержание колебаний происходит благодаря дополнительному напряжению (так называемому напряжению накачки), подаваемому на нелинейный реактивный элемент [1, 2]. При этом в генераторе возникают колебания с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , сумма которых равна частоте накачки  $\omega$ .

Если с помощью смесителя получить из напряжений с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  снова напряжение с частотой  $\omega$  и подать его вместо напряжения накачки, то получим генератор, не требующий внешнего напряжения накачки. Такая схема предложена проф. С. М. Рытовым.

Это будет уже автономная система: уравнения этого генератора явно не содержат времени. Рассмотрим свойства такого генератора.

А. Параметрическое возбуждение возникает всегда при достаточной большой амплитуде накачки. При отсутствии колебаний в контурах, или при малых амплитудах этих колебаний, напряжение на выходе смесителя равно нулю, либо недостаточно для раскачивания колебаний. Поэтому невозможно мягкое возбуждение колебаний в таком генераторе. Состояние покоя всегда устойчиво и лишь с помощью внешних напряжений его можно привести в режим генерации.

Б. В обычном ламповом генераторе фаза автоколебаний произвольна, и путем подачи внешнего напряжения можно получить колебания, синхронные с этим внешним напряжением. То же имеет место в двухконтурном параметрическом генераторе с внешней накачкой, где фаза колебаний в одном из контуров произвольна (а фаза колебаний в другом контуре определяется этой фазой и фазой накачки), поэтому легко осуществляется синхронизация колебаний в одном из контуров такого генератора [1, 2, 3].

В исследуемом здесь автономном двухконтурном генераторе при несоизмеримых частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  фазы колебаний с обеими частотами произвольны. И можно осуществить синхронизацию обоих колебаний, одновременно подавая два внешних напряжения. Эта синхронизация будет при каких-то достаточно малых расстройках  $\Delta_1 = \omega_1 - \omega_{10}$  и  $\Delta_2 = \omega_2 - \omega_{20}$ , где  $\omega_{10}$  — собственные частоты контуров. При заданных амплитудах внешних сил расстройки  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ , при которых наблюдается такая двойная синхронизация, занимают некоторую область на плоскости  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ . Эту область назовем областью двойной синхронизации.

Можно показать, что если фильтр смесителя представляет собой контур, то при малых внешних силах эта область ограничена параллелограммом на плоскости  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ .

В. Если  $\omega_{20} \approx n\omega_{10}$ , то может возникнуть синхронный режим. Фаза и частота одного из колебаний уже определены частотой и фазой другого колебания.

Подавая напряжение, имеющее частоту, близкую к  $\omega_1$  либо к  $\omega_2$ , в соответствующий контур генератора, можно получить синхронизацию такого режима.

Эти особенности двухконтурного автономного параметрического генератора изучались экспериментально на генераторе с частотами контуров: около 100 кГц — первого контура, около 300—400 кГц — второго контура и соответственно 400—500 кГц — контура смесителя. Блок-схе-

ма экспериментальной установки приведена на рис. 7. В качестве параметрического генератора использовалась схема, применявшаяся при предыдущих исследованиях [2].

Для того чтобы возбудить генератор, сначала подавалась накачка от внешнего генератора, а затем амплитуда ее уменьшалась потенциометром до нуля, и колебания оставались. Если в контуры возбужденно-

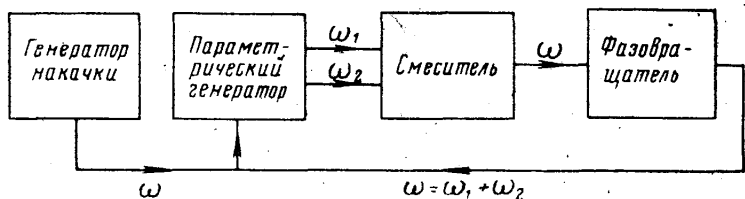


Рис. 7. Блок-схема экспериментальной установки для исследования автономного параметрического генератора

го таким образом генератора подавались напряжения с частотами, близкими к частотам колебаний в контурах генератора, то можно было получить синхронизацию одного из этих колебаний или обоих одновременно. На рис. 8 показана область частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , в которой наблюдалась такая двойная синхронизация при некоторых выбранных амплитудах внешних сил.

Если  $\omega_{20} \approx 3\omega_{10}$  или  $\omega_{20} \approx 4\omega_{10}$ , то возникал синхронный режим  $\omega_2 = 3\omega_1$  или  $\omega_2 = 4\omega_1$ . Внешней силой, имеющей частоту, близкую к одной из частот колебаний, можно было синхронизовать этот режим, так

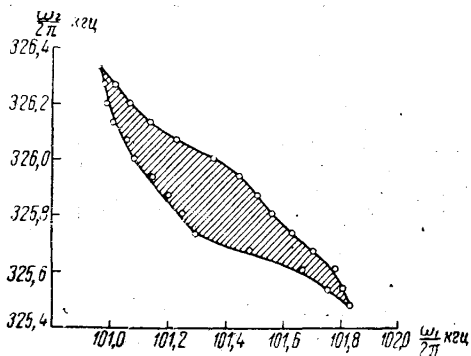


Рис. 8. Область двойной синхронизации

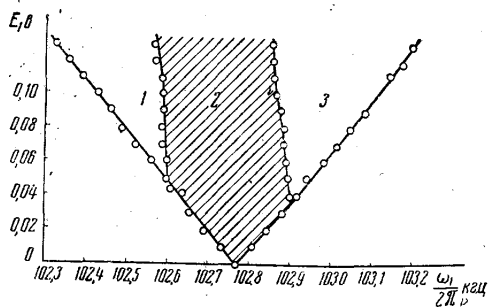


Рис. 9. Полоса синхронизации режима  $\omega_2 = 3\omega_1$

что получался делитель или умножитель частоты. На рис. 9 приведены кривые для случая, когда  $\omega_{20} \approx 3\omega_{10}$ , а частота внешней силы близка к частоте колебаний в первом контуре (около 100 кгц). По оси абсцисс отложена частота внешней силы (равная частоте колебаний в первом контуре при синхронизации), по оси ординат — амплитуда внешней силы. Заштрихованная область 2 соответствует таким условиям, когда частота колебаний в первом контуре  $\omega_1$  равна частоте внешней силы  $p$ , а  $\omega_2 = 3p$ , то есть получается во втором контуре умноженная частота. Области 1, 3 соответствуют расстройкам, при которых  $\omega_1 = p$  — есть синхронизация колебаний в первом контуре, но уже  $\omega_2 \neq 3p$ . Из рисунка видно, что полоса синхронизации колебаний с частотой  $\omega_1$  растет пропорционально амплитуде внешней силы, а полоса, где одновременно су-

существует синхронный режим ( $\omega_1 = p$ ,  $\omega_2 = 3p$ ), почти не зависит от амплитуды внешней силы. Это связано с тем, что полоса синхронного режима определяется амплитудами колебаний, а внешняя сила очень мало влияла на амплитуды колебаний. В некоторых режимах работы внешняя сила существенно влияла на амплитуды колебаний, и тогда полоса синхронного режима расширялась при увеличении амплитуды внешней силы  $E_1$ .

### Заключение

В двухконтурной системе легко осуществляются режимы, в которых частоты колебаний относятся как целые числа. Генератор с внешней накачкой может быть использован как эффективный делитель частоты. Если деление осуществляется на небольшое число раз, удобно использовать схему с диодом, ограничивающим амплитуду колебаний. Это дает при достаточно широкой полосе делитель частоты, амплитуда которого на выходе слабо зависит от частоты. Максимальная полоса получается приблизительно при равных добротностях контуров.

Экспериментальное исследование двухконтурного параметрического генератора с внешней накачкой [2] и в настоящей работе указывает на большую аналогию этой системы с потенциально автоколебательной системой с двумя степенями свободы, возбуждаемой внешней силой, с частотой, близкой к сумме частот контуров [5].

Синхронный режим легко осуществляется и в автономном параметрическом генераторе. Этот режим можно синхронизировать внешней силой и получить деление или умножение частоты.

В заключение автор выражает благодарность М. Д. Карасеву за обсуждение результатов настоящей работы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Уткин Г. М. «Радиотехника и электроника», № 11, 1867, 1960.
2. Ильинский Ю. А., Карасев М. Д. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрономия, № 6, 1961.
3. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Романюк А. К., Струков М. М. ПТЭ, № 5, 92, 1961.
4. Ильинский Ю. А., Карасев М. Д. «Радиотехника и электроника», № 8, 1397, 1961.
5. Мигулин В. В. ЖТФ, 6, 627, 1937.

Поступила в редакцию  
3. 7 1961 г.

Кафедра  
теории колебаний