ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1962

В. М. ЛИНКИН, Н. Н. КОЛЕСНИКОВ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Исследуется взаимодействие частиц в общем случае нелинейной электродинамики. Показывается, что взаимодействие точечной частицы с протяженной в нелинейной электродинамике приближенно совпадает с взаимодействием двух частиц с протяженными зарядами и магнитными моментами в линейной теории.

Введение

В последние годы в ряде экспериментов [1—4], в том числе в экспериментах по рассеянию быстрых электронов на протонах и легких ядрах [1], были обнаружены отклонения от законов взаимодействия точечных частиц линейной электродинамики. Эти отклонения, как известно [1—5], были приписаны эффектам электромагнитной структуры протонов и нейтронов. Поскольку при этом не исключено, что часть эффекта была обязана электрону, подготавливаются эксперименты по изучению взаимодействия быстрых электронов во встречных пучках. В связи с теоретическим исследованием различных сторон проблемы структуры элементарных частиц [5] представляет интерес рассмотрение вопроса о возможностях еще слабо исследованной нелинейной электродинамики [6—9], в которой проявляется эффект эквивалентный наличию электромагнитной структуры при взаимодействии точечных частиц [10]. Привлекательным моментом нелинейной теории является принципиальная возможность избежания трудностей расходимости собственных энергий.

Будем исходить из функции Лагранжа L, удовлетворяющей обычным требованиям релятивистской инвариантности [6, 11], и ограничимся лагранжианами, зависящими только от инварианта

$$I = \frac{1}{16\pi} f_{\mu\nu} f_{\mu\nu}, \tag{1}$$

где $f_{\mu\nu}$ — определяемый обычным образом антисимметричный тензор электромагнитного поля. Тогда уравнения поля, получаемые из вариационного принципа, запишутся как

$$\frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \tag{2}$$

где

$$P_{\mu\nu} = \varepsilon(I) f_{\mu\nu}, \quad \varepsilon(I) = \frac{\partial L}{\partial I}. \tag{3}$$

С помощью того же лагранжиана $L(I)$ нелинейного поля могут быть получены и уравнения движения самих частиц (см. приложение 1).

Не нарушая общности, можно считать

$$L = -\frac{1}{16\pi} \varepsilon(I) f_{\mu\nu} f_{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi} P_{\mu\nu} f_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Систему (2) при учете антисимметричности $f_{\mu\nu}$ можно переписать в виде

$$\frac{\partial \tilde{f}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \qquad \tilde{f}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} f_{\lambda\rho}, \tag{5а}$$

$$\frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \tag{5б}$$

что соответствует в обычной трехмерной записи системе уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \vec{D} = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где согласно (3) $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{H} = \varepsilon \vec{B}$. При этом в каждой конкретной задаче предполагается задание граничных условий на некоторых поверхностях*. Тензор энергии-импульса $H_{\mu\nu}$ определяется в нелинейной теории в точности так же, как в линейной электродинамике. При этом компонента

$$H_{44} = \frac{1}{8\pi} (\vec{D}\vec{E} + \vec{H}\vec{B}) \tag{7}$$

представляет плотность энергии нелинейного электромагнитного поля.

Статическое поле

В общем случае уравнениями нелинейного электростатического поля в пустоте являются

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \tag{8}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0, \tag{9}$$

---

* Заметим, что вместо граничных условий можно задавать источники j_μ и, модифицировав уравнение (5б) путем добавления в правую часть члена $\frac{4\pi}{c} j_\mu$, переписать его в виде

$$\frac{\partial p_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\mu. \tag{5б'}$$

которые не отличаются по форме от соответствующих уравнений линейной теории. Однако в то время, как в линейной электродинамике $\vec{D}_л = \vec{E}_л$, в нелинейной теории

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon(D^2)}\vec{D}. \tag{10}$$

В соответствии с (9) можно написать

$$\vec{D} = -\operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\vec{c} \tag{11}$$

и положить $\operatorname{div}\vec{c} = \vec{c}$, поскольку для нахождения $\vec{D}$ достаточно определить $\vec{c}$ с точностью до градиента произвольной функции. Подставляя далее (10) и (11) в (8), найдем

$$\nabla^2\vec{c} = -[\operatorname{grad} D^2\cdot\vec{D}]\,\frac{d}{dD^2}\ln\varepsilon(D^2), \tag{12}$$

причем согласно (11) и (9)

$$\nabla^2\varphi = 0 \tag{13}$$

(12) можно также переписать в виде интегрального уравнения

$$\vec{c}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{[\operatorname{grad} D^2\cdot\vec{D}]\,\frac{d}{dD^2}\ln\varepsilon(D^2)}{|\vec{R}-\vec{r}|}\,dv \tag{14}$$

функцию $\frac{1}{\varepsilon(I)}$, зависящую от характера нелинейности всегда можно записать в виде

$$\frac{1}{\varepsilon(I)} = \int\limits_0^{\sqrt[4]{\frac{e^2}{8\pi|I_1|}}}\rho' dv', \tag{15}$$

где

$$I_1 = \frac{1}{16\pi}p^2_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}(D^2 - H^2),$$

и таким образом введение нелинейности сводится к заданию функции ρ'. Отсюда в частном случае электростатического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon(D^2)} = \vec{D}\int\limits_0^{\sqrt{\frac{e}{D}}}\rho' dv'. \tag{16}$$

В дальнейшем мы будем ограничиваться такими лагранжианами нелинейной теории, которые приводят в случае не слишком сильных полей к результатам, не отличающимся от выводов линейной теории. Для этого необходимо, чтобы ρ' в (16) обладало тем свойством, что интеграл $\int\limits_0^{\sqrt{\frac{e}{D}}}\rho' dv'$

равнялся бы 1 при достаточно слабых полях $\vec{D}$. Простейшим в линейной теории является поле точечного заряда

$$\vec{E}_л = \vec{D}_л = \frac{e\vec{r}}{r^3}, \qquad (17)$$

которое становится сколь угодно слабым при достаточно больших r.

Рассмотрим нелинейное поле, совпадающее при достаточно больших r с линейным (17),

$$\vec{D} = \frac{e\vec{r}}{r^3} = \vec{D}_л. \qquad (18)$$

Условие (18) удовлетворяется, если выбрать среди решений уравнения (13) $\varphi = \frac{e}{r}$. Тогда $\vec{c} = 0$ является решением уравнения (14). Таким образом, в данном случае $\vec{D} = \frac{e\vec{r}}{r^3} = \vec{D}_л$ годится для всех r, включая и область нелинейности. Учитывая последнее соотношение, а также (16), находим

$$\vec{E} = \vec{D}\int_0^r \rho'\,dv' = \frac{e\vec{r}}{r^3}\int_0^r \rho'\,dv' = e - \nabla\int\frac{\rho'(r')\,dv'}{|\vec{R}-\vec{r}'|}. \qquad (19)$$

В соответствии с (19) величине $\rho'(r')$ можно придать следующий физический смысл. Это есть с точки зрения линейной теории плотность того распределения заряда e, которое создавало бы в точности такое же поле $\vec{E}$, какое в нелинейной теории создает точечный заряд e.

Рассмотрим теперь более сложный случай нелинейного поля, переходящего на больших расстояниях в поле диполя $\vec{p}$:

$$\vec{D}_л = \nabla(\vec{P}\nabla)\frac{1}{r}. \qquad (20)$$

Общее решение уравнения (13), соответствующее полю, убывающему на бесконечности не медленнее, чем r^{-2}, можно записать в виде

$$\varphi = (\vec{a}_1\nabla)\frac{1}{r} + (\vec{a}_2\nabla)(\vec{a}_2'\nabla)\frac{1}{r} + \dots \qquad (21)$$

Асимптотическое для больших r решение уравнения (14) для $\vec{c}$ можно представить в форме

$$\vec{c}(\vec{r}) = \frac{\vec{b}_1}{r} + [\vec{b}_2\nabla]\frac{1}{r} + \dots, \qquad (22)$$

где

$$\vec{b}_1 = \int[\operatorname{grad} D^2\,\vec{D}]\frac{d}{dD^2}\ln\varepsilon(D^2)\,dv,$$

$$\vec{b}_2 = \int\frac{d}{dD^2}\ln\varepsilon(D^2)\,[\vec{r}\,[\operatorname{grad} D^2\cdot\vec{D}]]\,dv$$

. . . .

являются, очевидно, функциями параметров $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots$. Подбирая параметры $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots$ можно удовлетворить требованию (20). Однако теперь уже $\vec{D} = -\operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\vec{c}$ будет совпадать с $\vec{D}_л$ лишь в области не слишком сильных полей, т. е. при не слишком малых расстояниях r. Конкретный вид решения уравнений (13) и (14) может быть найден с помощью метода последовательных приближений, при условии задания явной зависимости ε от D^2. Случай стационарного магнитного поля аналогичен электростатическому.

Взаимодействие электрических зарядов

В нелинейной электродинамике реальный физический смысл имеют не $\vec{E}$ и $\vec{D}$ ($\vec{H}$ и $\vec{B}$), а сила, действующая на заряд, и энергия взаимодействия. Определим энергию электромагнитного взаимодействия двух частиц W_{12} как разность между энергией результирующего электромагнитного поля и суммой энергий H_1 и H_2 этих же частиц, удаленных на бесконечность и движущихся с прежними скоростями.

В частности, в случае электростатического взаимодействия

$$H = \int H_{44}\, dv = \frac{1}{8\pi} \int D^2\, dv \int\limits_0^{R_3} \rho'\, dv', \tag{23}$$

$$H_1 + H_2 = \frac{1}{8\pi} \int D_1^2\, dv \int\limits_0^{R_1'} \rho'\, dv' + \frac{1}{8\pi} \int D_2^2\, dv \int\limits_0^{R_2'} \rho'\, dv', \tag{24}$$

$$W_{12} = H - (H_1 + H_2), \tag{25}$$

где

$$R_1' = \sqrt{\frac{e}{D_1}}, \qquad R_2' = \sqrt{\frac{e}{D_2}}, \qquad R_3 = \sqrt{\frac{e}{D}}. \tag{26}$$

В общем случае взаимодействия двух частиц (например, двух точечных частиц), как это следует из (11—14), $\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2$ лишь в области не слишком сильных полей. Однако положение существенно упрощается в случае взаимодействия точечной частицы с протяженной частицей (см. приложение II). Поле протяженной частицы (1) $\vec{D}_1 = -e_1 \nabla \int \frac{\rho_1(\vec{r}_1)\, dv_1}{|\vec{R} - \vec{r}_1|}$ можно считать всюду линейным (т. е. $\vec{D_1'} = \vec{D}_{1л} = \vec{E}_{1л} = \vec{E}_1$), если плотность распределения заряда $\rho_1(\vec{r}_1)$ нигде не будет слишком велика.

В случае взаимодействия протяженной частицы 1 с точечной частицей 2 (для последней $\vec{D}_2(\vec{R}_2) = \frac{e\vec{R}_2}{R_2^3}$) $\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2$, ввиду чего (25) перепишется в виде

$$W_{12} = H_{11} + H_{12} + H_{22}, \tag{27}$$

$$H_{ii} = \frac{1}{8\pi} \int D_i^2\, dv \int\limits_{R_i'}^{R_3} \rho'\, dv' \quad (i = 1{,}2) \tag{28}$$

$$H_{12} = \frac{1}{4\pi} \int \vec{D}_1 \vec{D}_2\, dv \int\limits_0^{R_3} \rho'\, dv' \tag{29}$$

$$R_3 = \{(R_1')^{-4} + (R_2')^{-4} + 2\,(R_1')^{-2}(R_2')^{-2}\cos\chi\}^{-\frac{1}{2}}, \qquad (30)$$

где χ — угол между векторами $\vec{D}_1$ и $\vec{D}_2$.

При этом основной вклад в энергию взаимодействия W_{12}, как видно из формул (28—30) и (26), вносит член H_{12}. Можно показать [10], что в рассматриваемом случае можно приближенно заменить предел интегрирования R_3 в (29) на R_2, после чего выражение $\vec{D}_2 \int\limits_0^{R_3} \rho'\,dv'$ примет вид

$$\frac{e\vec{R}_2}{R_2^3}\int\limits_0^{R_2}\rho'\,dv' = -e\nabla_2\int\frac{\rho'(r')\,dv'}{|\vec{R}_2-\vec{r}'|}.$$

Подставляя последнее в (29), получим

$$W_{12} \approx H_{12} = \frac{1}{4\pi}\int\left(e_1\nabla_1\int\frac{\rho_1(\vec{r}_1)\,dv_1}{|\vec{R}_1-\vec{r}_1|}\right)\left(e\nabla_2\int\frac{\rho'(r')\,dv'}{|\vec{R}_2-\vec{r}'|}\right). \qquad (31)$$

Согласно (31) взаимодействие заряда e_1, распределенного с плотностью $\rho_1(\vec{r}_1)$, и точечного заряда e в нелинейной теории такое же, как взаимодействие в линейной теории протяженных зарядов e_1 и e, распределенных с плотностями $\rho_1(\vec{r}_1)$ и $\rho'(r')$.

Взаимодействие дипольных моментов

Формулы (26—30) остаются справедливыми и для случая взаимодействия электрического дипольного момента $\vec{p}_1$, распределенного с плотностью $p_1\cdot{}_1\rho_1(\vec{r}_1),(\int\rho_1(\vec{r}_1)\,dv_1 = 1)$ и точечного диполя $\vec{p}_2^{\,0}$, поскольку приближенно справедлив линейный закон сложения индукций $\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2$. Различие будет состоять лишь в том, что

$$\vec{D}_1(\vec{R}_1) = \nabla_1(\vec{p}_1\nabla_1)\int\frac{\rho_1(\vec{r}_1)\,dv_1}{|\vec{R}_1-\vec{r}_1|} \approx \vec{E}_1(\vec{R}_1), \qquad (32)$$

а $\vec{D}_2(\vec{R}_2)$ является решением уравнения (8) и (9), равным вне области нелинейности

$$\nabla_2(\vec{p}_2^{\,0}\nabla_2)\frac{1}{R_2} = \vec{E}_2(\vec{R}_2). \qquad (33)$$

В выражении для энергии взаимодействия диполей $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2^{\,0}$

$$W_{12} \approx H_{12} = \frac{1}{4\pi}\int\vec{D}_1(\vec{R}_1)\,\vec{D}_2(R_2)\,dv\int\limits_0^{R_3}\rho'\,dv' \qquad (34)$$

можно аналогично случаю взаимодействия зарядов заменить предел интегрирования R_3 на $R_2' = \sqrt{\frac{e}{D_2}} = R_2'(R_2, \theta_2)$, где θ_2 — угол, образуемый радиусом-вектором $\vec{R}_2$ и дипольным моментом $\vec{p}_2^{\,0}$. Произведение $\vec{D}_2(\vec{R}_2)\int\limits_0^{R_2'(R_2,\theta_2)}\rho'\,dv' \equiv$

$\equiv \vec{D}_2'$ оказывается при этом функцией лишь от $\vec{R}_2$. С точки зрения линейной теории $\vec{D}_2'(\vec{R}_2)$ можно представить как поле $\vec{D}_2^0 = \nabla_2(\vec{p}_2^0 \Delta_2)\frac{1}{R_2}$, создаваемое точечным дипольным моментом $\vec{p}_2^0$ и некоторым распределением дипольного момента с плотностью:

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi}\left\{\vec{D}_2(\vec{R}_2)\int\limits_0^{R_2'(R_2, \theta_2)} \rho'\,dv' - \vec{D}_2^0\right\}. \tag{35}$$

Следовательно, поскольку согласно (34) $W_{12} = \frac{1}{4\pi}\int \vec{D}_1(\vec{R}_1)\vec{D}_2'(\vec{R}_2)dv$, взаимодействие точечного диполя $\vec{p}_2^0$ с дипольным моментом $\vec{p}_1$, распределенным с плотностью $\vec{p}_1\rho(\vec{R}_1)$, происходит в нелинейной теории приближенно так же, как взаимодействие распределенного с плотностью $\vec{p}_1\rho(\vec{R}_1)$ момента $\vec{p}_1$ с моментом $\vec{p}_2$, распределенным с плотностью

$$\vec{P} + \vec{p}_2^0\,\delta(\vec{R}_2), \tag{36}$$

где $\vec{p}$ определяется формулой (35).

Общий случай статического взаимодействия

Будем теперь учитывать одновременно как электрическое, так и магнитное взаимодействия протяженной и точечной частиц. Согласно (15), теория становится линейной в тех областях пространства, где $\frac{1}{\varepsilon(I_1)} = 1$, т. е. при $|I_1| = \frac{1}{8\pi}|D^2 - H^2|$, меньших некоторого предельного значения I_1^0. Для точечной частицы с зарядом e и магнитным моментом μ $D = \frac{e}{r^2}$, а магнитное поле имеет порядок $\frac{\mu}{r^3}$, ввиду чего функция $|I_1|$ в зависимости от r имеет вид, изображенный на рис. 1.

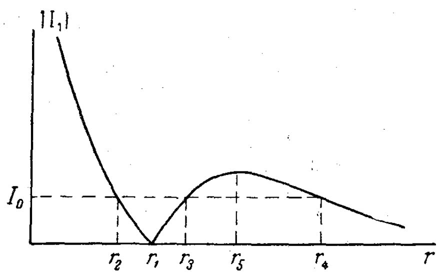

Рис. 1

Как видно из рис. 1, при $r<r_2$, а также при $r_3<r<r_4$ теория существенно нелинейна; наоборот, при $r>r_4$ и при $r_2<r<r_3$ электродинамика становится линейной.

Используя экспериментально известные e и μ для электрона и для протона, получаем в первом случае $r_1^{(e)} \sim 2{,}3\cdot 10^{-11}$ *см*, во втором — $r_1^{(p)} \sim 3\cdot 10^{-14}$ *см* (если считать протон точечным). Поскольку величина r_1 для электрона намного превышает хофстадтеровское значение квадратичного радиуса при рассеянии электрон — протон, следует допустить, что $|I_1^0|$ лежит выше максимума функции $|I_1|$ (см. рис. 1) для электрона. В таком случае радиус нелинейности протона должен быть очень мал, и поэтому создаваемое им поле можно практически считать линейным (даже если бы протон был точечным), т. е., например, не взаимодействовал бы с мезонным полем.

В соответствии со сказанным выше при взаимодействии электрона 1 с протоном 2 предел интегрирования в выражении (16) для $\frac{1}{\varepsilon}$ будет практически определяться лишь полем электрона и, более того, магнитным полем $\vec{H}$, обязанным наличию у него магнитного момента $\vec{\mu}$. Поэтому

$$H_{12} \approx \frac{1}{4\pi} \int \vec{D}_1 \vec{D}_2 \, dv \int_0^{\sqrt{\frac{e}{H}}} \rho' \, dv' + \frac{1}{4\pi} \int \vec{H}_1 \vec{H}_2 \, dv \int_0^{\sqrt{\frac{e}{H}}} \rho' \, dv'. \tag{37}$$

Произведя в (37) преобразование предела интегрирования аналогично (34), получим

$$H_{12} \approx \frac{1}{4\pi} \int \vec{D}_1 \vec{D}_2'' \, dv + \frac{1}{4\pi} \int \vec{H}_1 \vec{H}_2'' \, dv. \tag{38}$$

Полученное выражение аналогично формуле для энергии взаимодействия двух частиц в линейной электродинамике, обладающих распределенными зарядами и магнитными моментами. При этом распределение заряда $\rho_1 (\vec{r}_1)$ первой частицы, соответстующее $\vec{D}_1$, совпадает с той же величиной для изолированного протона в линейной теории. Плотность распределения магнитного момента $\vec{\mu}_1$ первой частицы, соответствующего $\vec{H}_1$, — такая же, как и для изолированного протона. Плотность распределения заряда ρ'' второй частицы, которая в линейной теории создавала бы поле $\vec{D}_2'' = \frac{e\vec{r}}{r^3} \int_0^{\sqrt{\frac{e}{H_2}}} \rho' \, dv'$, определяется из условия $\rho'' = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{D}_2''$. Наконец, эффективная плотность распределения магнитного момента $\vec{\mathfrak{M}}$ второй частицы определяется из $\vec{H}'' = \vec{H}_2 \int_0^{\sqrt{\frac{e}{H_2}}} \rho' \, dv'$ выражениями, аналогичными (36) и (37).

Авторы глубоко благодарны проф. Д. Д. Иваненко и В. И. Григорьеву за обсуждение результатов работы и за ряд сделанных ими ценных замечаний.

Приложение

ЛАГРАНЖИАН НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В обычной линейной электродинамике интеграл действия S записывается в виде суммы членов [6, 11]: $S = S_1 + S_2 + S_3$. В нелинейной теории достаточно задать лишь действие электромагнитного поля S_2. Тогда, если масса имеет чисто электромагнитное происхождение, из S_2 можно выделить части S_1 и S_3, соответствующие свободным частицам и их взаимодействию с электромагнитным полем, а с помощью варьирования определить как уравнения поля, так и уравнения движения частиц.

Ограничиваясь по-прежнему лагранжианами L, зависящими от инварианта I_1 (см. стр. 18—19), получим для случая n произвольным образом движущихся частиц с неприкрывающимися областями нелинейности:

$$L = -\frac{1}{16\pi\varepsilon} \sum_{i,k=1}^{n} p_{\mu\nu}^{(i)} p_{\mu\nu}^{(k)}, \tag{39}$$

т. е. результирующее поле $p_{\mu\nu}$ можно считать аддитивно складывающимся из полей $p_{\mu\nu}^{(i)}$, создаваемых каждой (i-й) из n частиц. При этом в области нелинейности i-й частицы

$$L \approx -\frac{1}{16\pi\varepsilon_i} p_{\mu\nu}^{(i)} p_{\mu\nu}^{(i)},$$

где

$$\varepsilon_i = \varepsilon\left(p_{\mu\nu}^{(i)} p_{\mu\nu}^{(i)}\right), \text{ а } \varepsilon_k \approx 1 \qquad (k \neq i).$$

Учитывая это и (39), можно переписать выражение для S в виде

$$S = S_2 \approx -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{i>k} \int f_{\mu\nu}^{(i)} f_{\mu\nu}^{(k)} d\tau - \frac{1}{16\pi} \sum_{i=1}^{n} \int p_{\mu\nu}^{(i)} f_{\mu\nu}^{(i)} d\tau_i, \tag{40}$$

где

$$f_{\mu\nu}^{(i)} = \frac{p_{\mu\nu}^{(i)}}{\varepsilon_i}.$$

Ввиду инвариантности $^1/_2\, f_{\mu\nu}^{(i)} p_{\mu\nu}^{(i)}$ по отношению к преобразованиям Лоренца можно положить

$$\frac{1}{2} p_{\mu\nu}^{(i)} f_{\mu\nu}^{(i)} = \vec{D}_i^0 \vec{E}_i^0 - \vec{H}_i^0 \vec{B}_i^0,$$

где величины, снабженные значком 0, относятся к полю частицы i в той системе координат, где она в данный момент времени покоилась. Учитывая соотношение

$$d\tau_i = dV_i\, dx_4 = dV_0 \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}\, dx_4,$$

получаем

$$-\frac{1}{16\pi} \int p_{\mu\nu}^{(i)} f_{\mu\nu}^{(i)} d\tau_i = \int m_i c^2 \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}\, dt, \tag{41}$$

где было обозначено

$$m_i c^2 = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{D}_i^0 \vec{E}_i^0 - \vec{H}_i^0 \vec{B}_i^0)\, dV_0, \tag{42}$$

v_i — скорость частицы.

Выразив далее $f_{\mu\nu}^{(i)}$ через потенциалы $A_\mu^{(i)}$, можно первый член в (40) привести к виду

$$-\frac{1}{16\pi} \int \left(\frac{\partial f_{\mu\nu}^{(i)}}{\partial x_\nu} A_\mu^{(k)} + \frac{\partial f_{\mu\nu}^{(k)}}{\partial x_\nu} A_\mu^{(i)} \right) d\tau. \tag{43}$$

Но поскольку

$$\frac{\partial P_{\mu\nu}^{(i)}}{\partial x_\nu} = 0, \qquad \frac{\partial f_{\mu\nu}^{(i)}}{\partial x_\nu} = -\frac{1}{\varepsilon_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_\nu} f_{\mu\nu}^{(i)}.$$

Поэтому, обозначая через

$$j_\mu^{(i)} = -\frac{1}{16\pi} \sum_{k \neq i} \frac{1}{\varepsilon_k} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial x_\nu} f_{\mu\nu}^{(k)}$$

и учитывая (41—43), можно переписать (40) в виде

$$S = -\sum_{i=1}^{n} \int m_i c^2 \sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}\, dt + \sum_{i=1}^{n} \int j_\mu^{(i)} A_\mu^{(i)} d\tau = S_1 + S_3.$$

Полученное выражение совпадает по форме с обычным выражением для функции действия системы частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем.

ПРОТЯЖЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Уравнения нелинейной электродинамики в виде (6), (8) и (9) для случая статического поля не содержат явным образом источников поля, и поэтому необходимо выяснить, в какой мере применимы выводы нелинейной теории к протяженным частицам. Поле точечной заряженной частицы совпадает с соответствующим полем линейной теории, за исключением области сильных полей. Размер этой области зависит от характера нелинейности (что определяется формой Лагранжа либо величиной ρ'), а также от заряда частицы. Представим теперь заряд частицы e состоящим из n равных частей и распределим их равномерно по объему области, размер которой много больше радиуса области нелинейности исходной частицы. Тогда в соответствии с (16) радиус нелинейности каждого из зарядов уменьшится в n раз, а суммарный объем областей нелинейности — в $n^{3/2}$ раз и будет стремиться к нулю в пределе больших n. Суммарная индукция $\vec{D}$ будет складываться линейно из индукции отдельных зарядов везде, за исключением областей нелинейности, причем по мере увеличения числа n суммарная индукция не будет практически отличаться (вне малых областей вблизи каждого из $\frac{e}{n}$ зарядов) от поля $\vec{D}$, создаваемого зарядом e, непрерывным образом распределенные по объему V с плотностью $\rho = \frac{e}{V}$. Аналогичные рассуждения можно провести и для случая неравномерных распределений заряда, а также и для дипольных моментов. Если только плотность ρ нигде не будет слишком велика, поле протяженных частиц в нелинейной теории будет практически тем же, что и в случае линейной теории, причем

$$\vec{D}_{\text{нелин}} \approx \int \frac{\rho(\vec{r})\,dv}{|\vec{R}-\vec{r}|} = \vec{D}_{\text{л}} = \vec{E}_{\text{л}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Hofstadter R. Rev. Mod. Phys., **28**, 214, 1956; Hofstadter R., Bumiller F. и др. Rev. Mod. Phys., **30**, 482, 1958; Yerian M. R., Hofstadter R. Phys. Rev., **110**, 552, 1958; **111**, 934, 1958; Sobbotka S. Phys. Rev., **118**, 831, 1960; Хофстадтер Р. Сообщение на конференции по физике высоких энергий. Киев, 1959.
2. Melkonian E. и др. Phys. Rev., **114**, 1571, 1959; Bull. Amer. Phys. Soc., **2**, 1, 62, 1956; Hughes F. и др. Phys. Rev., **90**, 407, 1953.
3. Lamb W., Tribwasser E. S., Dayhoff E. S. Phys. Rev., **89**, 98, 1953, Sessler A. M., Mills R. L. Phys. Rev., **110**, 1453, 1958.
4. Panofsky W. K. H., Allton E. S. Phys. Rev., **110**, 1155, 1958.
5. Шифф Л. И. Сообщение на конференции по физике высоких энергий. Киев, 1959. Пановский В. Сообщение на конференции по физике высоких энергий. Киев. 1959; Yennri D., Levy M., Ravenhall D. Rev. Mod Phys., **29**, 114, 1959; Блохинцев Д. И., Барашенков В. С., Барбашов Б. М. УФН, **68**, 417, 1959; Isaev P. S., Zlatev I. S. Nuovo Cim., **13**, 1, 1959; Gartenhaus S., Linder C. N. Phys. Rev., **113**, 917, 1959; Hiilda K., Sawamura. Progr. Theor. Phys., **18**, 451, 1957.
6. Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля. ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
7. Born M. Proc. Roy. Soc. A **143**, 410, 1934.
8. Born M. Infeld L. Proc. Roy. Soc. A **144**, 425, 1934; Infeld L. Proc. Roy. Soc. A **143**, 1410, 1934; Proc. Camb. Phil. Soc., **32**, 127, 1936; **33**, 70, 1936, 1937.
9. Born M. Ann. Inst. Henri Poincaré. Paris, **7**, 1937.
10. Колесников Н. Н., Жакоби Ж. А. ЖЭТФ, **35**, 381, 1958; Compt. rend., **245**, 286, 1957.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц И. М. Теория поля. ОГИЗ, М.—Л., 1948.

Поступила в редакцию
6. 6 1961 г.

Кафедра
электродинамики и квантовой теории