Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 3 — 1962

Ю. П. ПЫТЬЕВ

ГЕОМЕТРИЯ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В работе рассматриваются геометрические свойства движения заряженных частиц в электромагнитном поле.

Движение заряженных частиц в электромагнитном поле описывается следующим уравнением

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{e}{mc}\,\frac{d\vec{x}}{dt}\,\vec{H} + \frac{e}{m}\,\vec{E}. \qquad (1.1)$$

Здесь e — заряд частицы, m — масса, c — скорость света, $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — электрическое и магнитное поля соответственно. При решении практических задач обычно исследуются движения в заданном поле, т. е. поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ считаются заданными функциями координат и исследуются решения уравнения (1. 1). Эту классическую задачу описания движений в заданных полях в дальнейшем будем называть задачей А. Сравнительно недавно в применение к электронной оптике была поставлена и решена обратная задача. В этой задаче считаются заданными траектории заряженных частиц, характер движения частиц по траекториям и рассматривается вопрос о том, с какой степенью произвола могут быть заданы траектории и в какой мере при этом определяются поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ [1, 2, 3]. Эту задачу будем называть задачей Б. В настоящей работе и работе [4] рассматриваются геометрические свойства движений, описываемых уравнением (1. 1). В § 4, 5 работы [4] рассматривается задача, аналогичная задаче А, причем определению подлежат магнитные поверхности, на которых лежат траектории. В § 6 упомянутой работы и в настоящей работе рассматривается задача Б.

§ 1. УРАВНЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ В КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Уравнение (1. 1) допускает первый интеграл следующего вида:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2_0\right\} = \frac{e}{m}(V - V_0). \qquad (1.2)$$

где V — потенциал электрического поля, связанный с полем $\vec{E}$ посредством равенства

$$\vec{E} = \nabla V \tag{1.3}$$

(нулик внизу означает, что величина берется в начале траектории). Полагая

$$\Phi = \frac{e}{m}(V - V_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_0^{2\,*} \tag{1.4}$$

и учитывая, что

$$\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

где s — длина дуги траектории, получаем равенство, позволяющее в уравнении (1. 1) перейти от дифференцирования по времени t к дифференцированию по длине дуги s

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\Phi. \tag{1.5}$$

Кроме того, нетрудно проверить, что вдоль траектории имеет место равенство

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{ds}. \tag{1.6}$$

Пусть пространство, в котором происходит движение, отнесено к произвольным криволинейным координатам ξ^1, ξ^2, ξ^3 [4]. Тогда

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{x}_i \dot{\xi}^i \frac{ds}{dt}, \qquad \dot{\xi}^i = \frac{d\xi^i}{ds},$$

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{x}_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{x}_i\ddot{\xi}^i\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{x}_i\dot{\xi}^i\frac{d^2 s}{dt^2}$$

и, учитывая (1.5) и (1.6), находим

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{x}_i\dot{\xi}^i\sqrt{2\Phi},$$

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \{\vec{x}_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j + \vec{x}_i\ddot{\xi}^i\}\,2\Phi + \vec{x}_i\dot{\xi}^i\frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Подставляя найденные выражения в уравнение (1. 1), после несложных преобразований получаем искомые уравнения траектории

$$\ddot{\xi}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{\xi}^j\dot{\xi}^k = \varepsilon^{i}_{\cdot jk}\dot{\xi}^j h^k + G^{ij}\varphi_j - \dot{\xi}^i\varphi_j\dot{\xi}^j. \tag{1.7}$$

Здесь

$$\varphi_i = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi^i} = \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^i}\Big/2\Phi, \quad h^i = \frac{e}{mc}H^i/\sqrt{2\Phi} \tag{1.8}$$

---

* В дальнейшем всюду $\frac{e}{m}V_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_0^2$.

и остальные обозначения те же, что и в [4]. Так как уравнения (1.7) отнесены к длине дуги как к параметру, то каждое их решение следует нормировать таким образом, чтобы

$$G_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j = 1. \tag{1.9}$$

Время вдоль траектории связано с длиной дуги посредством равенства

$$\frac{ds}{dt} = v_0 \exp \varphi, \tag{1.10}$$

в котором v_0 является начальной скоростью, если в начале траектории считать $\varphi = 0$. Последнего равенства можно добиться всегда, так как из (1.8) φ определяется с точностью до аддитивной константы.

§ 2. УРАВНЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим траекторию, лежащую на поверхности

$$\vec{X} = \vec{X}(\xi^1, \xi^2), \tag{2.1}$$

где $\vec{X}$ — радиус-вектор точек поверхности, ξ^1 и ξ^2 — криволинейные координаты на поверхности. Координацию пространства вблизи поверхности будем считать нормально связанной с координацией поверхности, т. е., как и в [4],

$$\vec{R} = \vec{X}(\xi^1, \xi^2) + \vec{q}(\xi^1, \xi^2)\,\xi^3. \tag{2.2}$$

Здесь $\vec{R}$ — радиус-вектор точек пространства, $\vec{q}$ — вектор единичной нормали к поверхности (2.1). Равенство (2.2) позволяет выразить величины Γ^i_{jk}, G^{ij}, $\xi^i_{.jk}$ при $\xi^3 = 0$ через основные тензоры и христоффели поверхности (2.1). Производя все необходимые вычисления (см. приложение) и подставляя найденные величины в уравнения (1.7), находим, что первые два уравнения принимают следующий вид:

$$\ddot{\xi}^\alpha + \gamma^\alpha_{\mu\nu}\dot{\xi}^\mu\dot{\xi}^\nu = \varepsilon^{\alpha}_{.\beta}\dot{\xi}^\beta h^3 + g^{\alpha\beta}\varphi_\beta - \dot{\xi}^\alpha\varphi_\beta\dot{\xi}^\beta. \tag{2.3}$$

Причем, так как

$$g^{\alpha\beta}\varphi_\beta - \dot{\xi}^\alpha\varphi_\beta\dot{\xi}^\beta = \varepsilon^{\alpha}_{.\mu}\dot{\xi}^\mu\,\varepsilon^{\beta}_{.\nu}\dot{\xi}^\nu\varphi_\beta,$$

то правая часть уравнений (2.3) несколько упрощается, и они могут быть переписаны следующим образом:

$$\gamma^\alpha = \ddot{\xi}^\alpha + \gamma^\alpha_{\mu\nu}\dot{\xi}^\mu\dot{\xi}^\nu = \varepsilon^{\alpha}_{.\beta}\dot{\xi}^\beta(h^3 + \varepsilon^{\mu}_{.\nu}\dot{\xi}^\nu\varphi_\mu). \tag{2.3a}$$

Полагая в уравнениях (1.7) $i = 3$, получаем (см. приложение)

$$\chi = \pi_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha\dot{\xi}^\beta = \varepsilon_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha h^\beta + \varphi_3. \tag{2.4}$$

Это равенство дает выражение для нормальной кривизны траектории, лежащей на поверхности. Уравнения (2.3а) в свою очередь, позволяют записать выражение для геодезической кривизны γ траектории. Так как для любой кривой, лежащей на поверхности [5],

$$\gamma = \varepsilon_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha\gamma^\beta, \tag{2.5}$$

то, подставляя (2.3а) в (2.5), находим

$$\gamma + h^3 = \varepsilon^{\mu}_{\nu.}\varphi_\mu\dot{\xi}^\nu. \tag{2.6}$$

Наконец, равенство (1.9), записанное для траектории, расположенной на поверхности, приводит к соотношению

$$g_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha\dot{\xi}^\beta = 1. \qquad (2.7)$$

Нетрудно убедиться, что левая часть (2.7) является интегралом системы (2.3а). Если, следовательно, $\dot{\xi}^\alpha$ в начале траектори и подобраны таким образом, что (2.7) выполняется, то оно будет выполняться всюду вдоль траектории. Остановимся вкратце на геометрических свойствах траекторий, вытекающих из уравнений (2.3а) и (2.4). Как уже отмечалось в [4], траектории, лежащие на магнитной поверхности, являются геодезическими этой поверхности (определение магнитной поверхности см. [4]). Этот факт немедленно вытекает из (2.3), если положить $h^3 = 0$ и $\varphi_i = 0$. В этом случае траектория на поверхности характеризуется уравнениями

$$\begin{gathered} \gamma^\alpha = 0, \\ \chi = \pi_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha\dot{\xi}^\beta = \varepsilon_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha h^\beta. \end{gathered} \qquad (2.8)$$

Если траектория лежит на электрической поверхности (так будем называть поверхности $u = \mathrm{const}$, определенные уравнением $G^{ij}u_{,i}\varphi_j = 0$), то она является асимптотической линией этой поверхности. В самом деле, на электрической поверхности $h^i = 0$ и $\varphi_3 = 0$ (предполагается, что магнитное поле отсутствует), поэтому из (2.3а) и (2.4) следует, что

$$\begin{gathered} \chi = \pi_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha\dot{\xi}^\beta = 0, \\ \gamma^\alpha = \varepsilon^{\alpha}_{\cdot\beta}\dot{\xi}^\beta\varepsilon^{\mu}_{\cdot\nu}\dot{\xi}^\nu\varphi_\mu. \end{gathered} \qquad (2.9)$$

Первое уравнение (2.9) определяет асимптотические линии электрической поверхности [5], второе определяет их геодезическую кривизну. Отметим еще одно следствие уравнений (2.3а) и (2.4). Пусть частица движется в скрещенных ортогональных электрическом и магнитном полях. Проведем через траекторию электрическую и магнитную поверхности. Тогда траектория является асимптотической линией электрической поверхности и геодезической линией магнитной поверхности. Действительно, так как поля взаимно ортогональны, то на электрической поверхности $\varphi_3 = 0$ и $h^\alpha = 0$, а на магнитной $h^3 = 0$ и $\varphi_\alpha = 0$, откуда и следует наше утверждение.

§ 3. СЕМЕЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ, ЛЕЖАЩИХ НА ПОВЕРХНОСТИ, И ДОПУСТИМЫЕ ПОЛЯ

Пусть задана некоторая поверхность и на ней однопараметрическое семейство кривых

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(t^1, t^2), \qquad (3.1)$$

t^1 — параметр вдоль кривой, t^2 — параметр, к которому отнесена кривая семейства. Пусть, кроме того, в некоторой области поверхности

$$\frac{\partial(\xi^1, \xi^2)}{\partial(t^1, t^2)} \neq 0. \qquad (3.2)$$

Тогда в области (3.2) величины t^1 и t^2 могут быть выражены как функции координат ξ^α и, следовательно, как функции координат в указанной области могут быть выражены величины $\dot{\xi}^\alpha$ и $\ddot{\xi}^\alpha$. Из формул (2.4) и (2.5) следует, что величины χ и γ также выражаются как функции координат и, таким образом, в области (3.2) задаются два скалярных поля, порожденные семейством

$$\chi = \chi(\xi^1, \xi^2), \qquad \gamma = \gamma(\xi^1, \xi^2). \tag{3.3}$$

Эти два скалярных поля тесно связаны с векторными полями φ_i и h^i, допустимыми относительно кривых семейства (по аналогии с [4] поля φ_i и h^i называются допустимыми, если они удовлетворяют уравнениям (2.4), (2.6)). В этом параграфе мы решим задачу построения допустимых полей, причем начнем решение с определения возможного при этом произвола.

Пусть $\overset{\circ}{h}{}^\alpha, h^3$ допустимое поле, тогда поле вида $\overset{\circ}{h}{}^\alpha + \omega\dot{\xi}^\alpha, h^3$, где $\omega(\xi^\alpha)$ произвольная скалярная функция, также будет допустимым. Это утверждение проверяется непосредственной подстановкой указанных полей в уравнения (2.4) и (2.6). При этом, так как исходное поле удовлетворяет этим уравнениям, поле $\overset{\circ}{h}{}^\alpha + \omega\dot{\xi}^\alpha$ и h^3 так же будет удовлетворять им в силу того, что $\omega\varepsilon_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha\dot{\xi}^\beta = 0$. Точно так же можно убедиться в том, что если поле $\overset{\circ}{\varphi}_\alpha, \varphi_3$ допустимое, то допустимым является и поле $\overset{\circ}{\varphi}_\alpha + \lambda g_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\beta \varphi_3$. Таким образом, в общем случае допустимые поля имеют вид

$$\begin{aligned} h^\alpha &= \overset{\circ}{h}{}^\alpha = \omega g^\alpha_\beta \dot{\xi}^\beta, \\ \varphi_\alpha &= \overset{\circ}{\varphi}_\alpha + \lambda g_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\beta, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где под $\overset{\circ}{h}{}^\alpha$ и $\overset{\circ}{\varphi}_\alpha$ для определенности будем понимать допустимые поля, удовлетворяющие условиям ортогональности

$$g_{\alpha\beta}\overset{\circ}{h}{}^\alpha \dot{\xi}^\beta = 0, \qquad \overset{\circ}{\varphi}_\alpha \dot{\xi}^\alpha = 0.$$

Сделанные выше замечания позволяют построить поля, допустимые для кривых семейства (3.1). Считая величины φ_3 и h^3 заданными функциями координат, мы имеем следующую систему уравнений для определения величин $\overset{\circ}{\varphi}_\alpha$ и $\overset{\circ}{h}{}^\alpha$:

$$\left\{\begin{aligned} \gamma + h^3 &= \varepsilon^{\mu}_{\nu\cdot}\overset{\circ}{\varphi}_\mu \tau^\nu, \\ 0 &= \tau^\alpha \overset{\circ}{\varphi}_\alpha; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \chi - \varphi_3 &= \varepsilon_{\alpha\beta}\tau^\alpha \overset{\circ}{h}{}^\beta, \\ 0 &= g_{\alpha\beta}\tau^\alpha \overset{\circ}{h}{}^\beta. \end{aligned}\right. \tag{3.5}$$

Здесь τ^α — выраженные через координаты величины $\dot{\xi}^\alpha$

$$\tau^\alpha(\xi^1, \xi^2) = \dot{\xi}^\alpha(t^1, t^2). \tag{3.6}$$

Решая систему (3.5) и подставляя решение в (3.4), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &= \{(\gamma + h^3)\varepsilon_{\beta\alpha} + \lambda g_{\beta\alpha}\}\tau^\beta, \\ h^\alpha &= \{(\chi - \varphi_3)\varepsilon_\beta^{\cdot\alpha} + \omega g^\alpha_\beta\}\tau^\beta. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Это решение зависит от четырех произвольных функций λ, ω, h^3, φ_3 и дает общий вид допустимых полей.

§ 4. ДОПУСТИМЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ. ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЙ ВНЕ ПОВЕРХНОСТИ

Формулами (1.8) допустимым полям φ_i и h^i сопоставляются электрические и магнитные поля, которые также будем называть допустимыми. Так что допустимые электрические и магнитные поля могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha &= 2\Phi\{(\gamma + h^3)\,\varepsilon_{\beta\alpha} + \lambda g_{\beta\alpha}\}\,\tau^\beta, \\ H_\alpha &= \frac{mc}{e}\sqrt{2\Phi}\,\{(\chi - \varphi_3)\,\varepsilon_{\beta\alpha} + \omega g_{\beta\alpha}\}\,\tau^\beta. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Равенства (4.1) могут быть переписаны более компактно, если ввести новые величины по формулам

$$\begin{aligned} \overset{1}{P} &= 2\Phi\,(\gamma + h^3) & \overset{1}{Y} &= 2\Phi\lambda, \\ \overset{2}{P} &= \frac{mc}{e}\sqrt{2\Phi}\,\{\chi - \varphi_3) & \overset{2}{Y} &= \frac{mc}{e}\sqrt{2\Phi}\;\omega. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha &= (\overset{1}{P}\varepsilon_{\beta\alpha} + \overset{1}{Y}g_{\beta\alpha})\,\tau^\beta, \\ H_\alpha &= (\overset{2}{P}\,\varepsilon_{\beta\alpha} + \overset{2}{Y}g_{\beta\alpha})\,\tau^\beta. \end{aligned} \tag{4.1a}$$

Эти поля, как и поля φ_α, h^α зависят от четырех произвольных функций, из которых h^3 и φ_3 определяют компоненты электрического и магнитного полей, ортогональные кривым семейства, а λ и ω определяют касательные компоненты.

Потребуем, чтобы определяемые формулами (4.1a) поля были потенциальными, т. е., чтобы имели место равенства

$$\varepsilon^{\beta\alpha}\,(\Phi_{\beta,\alpha} - \Phi_{\alpha,\beta}) = 0, \qquad \varepsilon^{\beta\alpha}\,(H_{\beta,\alpha} - H_{\alpha,\beta}) = 0. \tag{4.3}$$

Подставляя (4.1a) в (4.3), получаем уравнения с частными производными для определения ранее произвольных величин $\overset{1}{Y}$ и $\overset{2}{Y}$. Так как эти уравнения совершенно одинаковые, мы будем рассматривать определение величины $\overset{1}{Y}$, величина $\overset{2}{Y}$ определяется аналогично. Уравнение для определения $\overset{1}{Y}$ имеет вид

$$\overset{1}{Y}_{,\beta}\varepsilon^{\beta}_{\cdot\mu}\,\tau^\mu + \overset{1}{Y}\,\varepsilon^{\beta}_{\cdot\mu}\,\tau^\mu_{,\beta} = -(\overset{1}{P}_{,\mu}\,\tau^\mu + \overset{1}{P}\,\tau^\mu_{,\mu}). \tag{4.4}$$

Запишем характеристическую систему этого уравнения

$$\frac{d\xi^1}{\varepsilon^1_{\cdot\mu}\,\tau^\mu} = \frac{d\xi^2}{\varepsilon^2_{\cdot\mu}\,\tau^\mu} = -\frac{d\overset{1}{Y}}{\overset{1}{Y}\,\varepsilon^{\beta}_{\cdot\mu}\,\tau^\mu_{,\beta} + (\overset{1}{P}_{,\mu}\,\tau^\mu + \overset{1}{P}\,\tau^\mu_{,\mu})}. \tag{4.5}$$

Характеристические кривые, т. е. решения системы

$$\frac{d\xi^\alpha}{dt} = \varepsilon^{\alpha}_{\cdot\mu}\,\tau^\mu, \tag{4.6}$$

образуют семейство, ортогональное исходному, так как

$$g_{\alpha\beta}\,\frac{d\xi^\alpha}{dt}\,\tau^\beta = g_{\alpha\beta}\,\varepsilon^{\alpha}_{\cdot\mu}\,\tau^\beta\,\tau^\mu = 0$$

и мы будем считать его заданным наравне с исходным семейством (3.1). Рассмотрим систему координат, в которой координатными линиями служат кривые семейства (3.1) и характеристические кривые уравнения (4.4). Пусть линии $t^2 = \text{const}$ представляют семейство (3.1), а линии $t^1 = \text{const}$ — характеристическое семейство. В новой системе координат $g_{12} = 0$, а в качестве единичных векторов, касательных к координатным линиям, имеем

$$\tau^\alpha = \begin{cases} 1/\sqrt{g_{11}}, & \alpha = 1, \\ 0, & \alpha = 2, \end{cases} \qquad \eta^\alpha = \begin{cases} 0, & \alpha = 1, \\ -1/\sqrt{g_{22}}, & \alpha = 2. \end{cases} \tag{4.6}$$

В этой системе координат уравнения (4.5) принимают простой вид

$$\frac{dt^2}{1/\sqrt{g_{22}}} = \frac{d\overset{1}{Y}}{-\dfrac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\dfrac{\partial\sqrt{g_{11}}}{\partial t^2}\overset{1}{Y} + \dfrac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\dfrac{\partial}{\partial t^1}\left(\sqrt{g_{22}}\,\overset{1}{P}\right)} \tag{4.7}$$

и могут быть проинтегрированы. В результате интегрирования получаем решение уравнения с частными производными (4.4)

$$\overset{1}{Y} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left\{\int \frac{\partial}{\partial t^1}\left[\sqrt{g_{22}}\,\overset{1}{P}\right] dt^2 + \overset{1}{\underset{0}{Y}}(t^1)\right\} \tag{4.8}$$

и по аналогии для магнитного поля

$$\overset{2}{Y} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left\{\int \frac{\partial}{\partial t^1}\left[\sqrt{g_{22}}\,\overset{2}{P}\right] dt^2 + \overset{2}{\underset{0}{Y}}(t^1)\right\}. \tag{4.9}$$

Полученные формулы позволяют найти потенциалы электрического и магнитного полей. В согласии с (4.1а) имеем

$$\Phi_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial t^1} = \overset{1}{Y}\sqrt{g_{11}}, \quad \Phi_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial t^2} = \overset{1}{P}\sqrt{g_{22}}.$$

Из первого соотношения определяется λ, а из второго — потенциал допустимого электрического поля Φ

$$\Phi = \underset{0}{\Phi}(t^1)\exp\left\{2\int\sqrt{g_{22}}\,(\gamma + h^3)\,dt^2\right\}. \tag{4.10}$$

Здесь $\underset{0}{\Phi}(t^1)$ произвольная функция. Что касается магнитного поля, то из (4.1а) и (4.9) следует, что

$$H_1 = \frac{\partial\Psi}{\partial t^1} = \int\frac{\partial}{\partial t^1}\left[\sqrt{g_{22}}\,\overset{2}{P}\right]dt^2 + \overset{2}{\underset{0}{Y}}(t^1), \quad H_2 = \frac{\partial\Psi}{\partial t^2} = \overset{2}{P}\sqrt{g_{22}},$$

откуда получаем выражение для потенциала допустимого магнитного поля Ψ

$$\Psi = \int\sqrt{g_{22}}\,\overset{2}{P}\,dt^2 + \underset{0}{\Psi}(t^1). \tag{4.11}$$

Подставляя в (4.11) значения величин из (4.2) и (4.10), окончательно находим

$$\Psi = \frac{mc}{e}\sqrt{2\underset{0}{\Phi}(t^1)}\int\sqrt{g_{22}}\,(\varkappa - \varphi_3)\exp\times$$
$$\times\left\{\int\sqrt{g_{22}}\,(\gamma + h^3)\,dt^2\right\}dt^2 + \underset{0}{\Psi}(t^1). \tag{4.11a}$$

Найденные таким образом потенциалы допустимых полей зависят от четырех произвольных функций $\varphi_3(t^1, t^2)$, $h^3(t^1, t^2)$, $\overset{\circ}{\Psi}(t^1)$ и $\overset{\circ}{\Phi}(t^1)$. Прежде чем переходить к задаче определения полей вне поверхности, рассмотрим в качестве примера построение характеристической системы координат и допустимых полей на магнитных поверхностях вращения [4]. В этом случае исходным семейством кривых на поверхности служит однопараметрическое семейство геодезических и характеристическая система координат совпадает с полугеодезической [5]. Для семейства геодезических поверхностей вращения имеем

$$\dot{\xi}^1 = \delta/\rho^2, \qquad \dot{\xi}^2 = \pm\sqrt{\rho^2 - \delta^2}/(\rho\sqrt{1+\rho'^2}). \tag{4.12}$$

Параметром, к которому отнесены геодезические этого семейства, служит азимут, под которым каждая геодезическая пересекает заданную параллель. В координатах, в которых выписаны уравнения геодезических, метрическая форма рассматриваемой поверхности имеет вид

$$d\sigma^2 = \rho^2 (d\xi^1)^2 + (1+\rho'^2)\,(d\xi^2)^2. \tag{4.13}$$

Здесь ξ^1 — азимут, ξ^2 — координата вдоль оси вращения. В системе координат, которую мы сейчас построим, параметром вдоль кривых семейства (геодезических) может служить длина дуги s. Так как эта система координат должна быть ортогональной, то должны иметь место уравнения

$$g_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial s}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial s} = 1, \quad g_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial s}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial t} = 0. \tag{4.14}$$

Здесь t — служит параметром вдоль характеристик. Величины (4.12) удовлетворяют первому уравнению. Второму уравнению можно удовлетворить, полагая

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial t} = f\,\frac{\sqrt{\rho^2-\delta^2}}{\rho^2}, \qquad \frac{\partial\xi^2}{\partial t} = \mp\frac{\delta f}{\rho\sqrt{1+\rho'^2}}. \tag{4.15}$$

Здесь f — произвольная функция, значение которой определится из требования, чтобы величины (4.12) и (4.15) были частными производными от функций $\xi^\alpha(s, t)$. Таким образом, f должна определиться из уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\xi^1}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\xi^1}{\partial t}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\xi^2}{\partial s}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\xi^2}{\partial t}\right).$$

Однако не трудно проверить, что эти уравнения не являются независимыми и, следовательно, из них можно рассматривать только первое

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta}{\rho^2}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(f\frac{\sqrt{\rho^2-\delta^2}}{\rho^2}\right),$$

которое в более подробной записи имеет вид

$$\frac{df}{d\xi^2} + f\left\{\frac{d}{d\xi^2}\left(\frac{\sqrt{\rho^2-\delta^2}}{\rho^2}\right) + \frac{\delta}{\sqrt{\rho^2-\delta^2}}\frac{d}{d\xi^2}\left(\frac{\delta}{\rho^2}\right)\right\}\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2-\delta^2}} = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$f = f_0\sqrt{\rho^2-\delta^2} \tag{4.16}$$

и получаем формулы перехода к новым характеристическим координатам

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi^1}{\partial s} &= \frac{\delta}{\rho^2}, & \frac{\partial \xi^1}{\partial t} &= \frac{f_0(\rho^2-\delta^2)]}{\rho^2}, \\ \frac{\partial \xi^2}{\partial s} &= \pm\frac{\sqrt{\rho^2-\delta^2}}{\rho\sqrt{1+\rho'^2}}, & \frac{\partial \xi^2}{\partial t} &= \mp\frac{\delta f_0\sqrt{\rho^2-\delta^2}}{\rho\sqrt{1+\rho'^2}}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Например, воспользовавшись формулами (4.17), можно получить компоненты метрического тензора в характеристических координатах

$$g_{11} = 1, \qquad g_{22} = f_0^2(\rho^2-\delta^2) = f^2 \tag{4.18}$$

и т. д. Из (4.17) нетрудно получить выражения для производных характеристических координат по старым координатам

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial \xi^1} &= \delta, & \frac{\partial s}{\partial \xi^2} &= \pm\frac{\sqrt{(\rho^2-\delta^2)(1+\rho'^2)}}{\rho}, \\ \frac{\partial t}{\partial \xi^1} &= \frac{1}{f_0}, & \frac{\partial t}{\partial \xi^2} &= \mp\frac{\delta\sqrt{1+\rho'^2}}{f_0\rho\sqrt{\rho^2-\delta^2}}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

а вслед за этим и выражение для характеристических координат

$$\begin{aligned} s &= \xi^1\delta \pm \int \frac{\sqrt{(\rho^2-\delta^2)(1+\rho'^2)}}{\rho}\, d\xi^2, \\ t &= \xi^1\frac{1}{f_0} \mp \int \frac{\delta\sqrt{1+\rho'^2}}{f_0\rho\sqrt{\rho^2-\delta^2}}\, d\xi^2. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Выписывая, наконец, выражение для потенциала магнитного поля (см. (4.11а)

$$\Psi = \frac{mvc}{e}\int \sqrt{g_{22}}\,\chi\, dt + \underset{0}{\Psi}(s), \tag{4.11б}$$

замечаем, что выражение для $\sqrt{g_{22}}$ заимствуется из (4.18), для dt — из (4.20), а χ — инвариант, т. е. вычисляется в любой системе координат, и, таким образом, потенциал допустимого магнитного поля построен.

Рассмотрим задачу определения полей вне поверхности. Как известно, электрические и магнитные поля, фигурирующие в уравнении (1.1), должны удовлетворять уравнениям Максвелла. Эти поля мы будем рассматривать вне поверхности, на которой лежат траектории, и будем предполагать, что в рассматриваемой области плотности токов и зарядов равны нулю. В этом случае упомянутые уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{E} &= 0, & \operatorname{div}\vec{H} &= 0, \\ \operatorname{rot}\vec{E} &= 0, & \operatorname{rot}\vec{H} &= 0. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Согласно вторым уравнениям можно считать

$$\vec{E} = \Delta V, \qquad \vec{H} = \nabla W, \tag{4.22}$$

где V и W — соответственно потенциалы электрического и магнитного полей. Из первых уравнений вытекает, что в рассматриваемой области потенциалы должны удовлетворять уравнениям Лапласа

$$\Delta V = 0, \qquad \Delta W = 0. \tag{4.23}$$

Потребуем, чтобы на поверхности потенциалы V и W принимали соответственно значения $\frac{m}{e}$ Φ и Ψ, а их производные по нормали к поверхности — значения $\frac{m}{e}\Phi_3$ и Ψ_3. Тем самым мы пришли к задаче Коши для уравнения Лапласа:

электрическое поле вне поверхности определяется из условий

$$\Delta V = 0, \qquad V|_{\xi^3=0} = \frac{m}{e}\Phi, \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial \xi^3}\right|_{\xi^3=0} = \frac{m}{e}\Phi_3; \tag{4.24}$$

магнитное

$$\Delta W = 0, \qquad W|_{\xi^3=0} = \Psi, \qquad \left.\frac{\partial W}{\partial \xi^3}\right|_{\xi^3=0} = \Psi_3, \tag{4.25}$$

где $\xi^3 = 0$ означает поверхность, на которой лежат траектории, а Φ_3 и ψ_3 определяются выражениями

$$\Phi_3 = 2\Phi\varphi_3, \qquad \Psi_3 = \frac{mc}{e}\sqrt{2\Phi}\, h^3, \tag{4.26}$$

которые получены из (1.8), причем использовано то обстоятельство, что при координации пространства, нормально связанной с координацией на поверхности

$$G_{33}|_{\xi^3=0} = 1, \qquad G_{3\alpha}|_{\xi^3=0} = 0$$

и поэтому $h^3 = h_3$. Мы не будем обсуждать здесь трудностей, характерных для задач Коши для уравнений эллиптического типа. Эти трудности подробно рассмотрены в специальной литературе, к которой мы и отсылаем читателя [6], [7], [8]. Отметим, однако, что в нашем случае неустойчивость задачи Коши не представляет принципиальных трудностей, так как в конечном счете нас интересуют поля на поверхности, а знание их в пространстве вблизи поверхности необходимо лишь для того, чтобы тем или иным способом реализовать их физически. Иными словами, малые ошибки в задании допустимых полей могут привести к большим ошибкам в определении полей вне поверхности, однако если эти поля будут построены и мы рассмотрим их значения на исходной поверхности, то они не будут сильно отличаться от допустимых полей.

В заключение автор выражает признательность Ю. Н. Днестровскому за просмотр рукописи и обсуждение результатов.

Приложение

Здесь мы приводим основные соотношения для величин Γ^i_{jk}, $\varepsilon^i_{\cdot jk}$, G^{ij}. Все расчеты проведены на основании равенства (2.2), причем в окончательных результатах положено $\xi^3 = 0$, т. е. все соотношения имеют место на исходной поверхности.

Христоффели пространства на поверхности

$$\Gamma^\alpha_{\beta\nu} = \gamma^\alpha_{\beta\nu}, \qquad \Gamma^3_{\alpha\beta} = \pi_{\alpha\beta},$$

$$\Gamma^\alpha_{3\beta} = -\pi^\alpha_\beta, \qquad \Gamma^3_{3i} = 0,$$

$$\Gamma^i_{33} = 0.$$

Дискриминантный тензор пространства

$$\varepsilon^{3}_{\cdot\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad \varepsilon^{\alpha}_{\cdot\beta 3} = \varepsilon^{\alpha}_{\cdot\beta},$$

$$\varepsilon^{3}_{\cdot 3i} = 0, \qquad \varepsilon^{i}_{\cdot 33} = 0.$$

Метрический тензор пространства

$$G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}, \qquad G_{\alpha 3} = 0, \qquad G_{33} = 1,$$

$$G^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}, \qquad G^{\alpha 3} = 0, \qquad G^{33} = 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. ДАН СССР, **37**, 197, 295, 1942; **38**, 89, 1943.
2. Гринберг Г. А. ЖТФ, **13**, 361, 1943.
3. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, 1948.
4. Пытьев Ю. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрономии, № 6, 1961.
5. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей, т. 1. ОГИЗ ГТТИ, М.—Л., 1947, стр. 11.
6. Лаврентьев М. М. ДАН СССР, **102**, 2, 1955; **106**, 3, 1956; **112**, 2, 1957.
7. Ландис Е. М. ДАН СССР, **107**, 5, 1956.
8. Мергелян С. Н. ДАН СССР, **107**, 5, 1956.

Поступила в редакцию
5. 7 1961 г.

Кафедра
математики физического
факультета