Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1962

В. В. ГУЖАВИН

О ФУНКЦИИ УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛНОГО ЧИСЛА ЧАСТИЦ ОКОЛО ОСИ КАСКАДНОГО ЛИВНЯ

Получено аналитическое выражение функции углового распределения частиц с энергией $E>0$ в каскадном ливне около его оси.

При анализе ряда экспериментов в области космических лучей часто бывает важным знать функцию углового распределения полного числа электронов и фотонов в каскадном ливне около его оси. Полное решение угловой задачи в каскадном ливне в приближении многократного рассеяния без учета ионизационных потерь было дано в работе [1]. В этой работе были получены функции углового распределения каскадных частиц с энергиями E свыше β, где β — критическая энергия данного вещества [2]. При детальном анализе экспериментальных данных возникает вопрос, насколько сильно учет частиц с энергиями меньше β изменит угловое распределение каскадных частиц около оси ливня. Для решения этой задачи необходимо учесть ионизационные потери. В данной работе мы рассмотрим функцию углового распределения около оси ливня для полного числа частиц с энергией $E > 0$, т. е. включим в рассмотрение ионизационные потери.

Пусть $N_p(E_0, E, t, \theta)$ — функция распределения электронов с энергией свыше E по углу θ отклонения от оси ливня на глубине t (измеряемой в лавинных единицах) в ливне вызванном первичным электроном с энергией E_0. Согласно работе [3] эту функцию можно записать в виде

$$N_p(E_0, E, t, \theta) = -\frac{1}{8\pi^4 i}\int\int\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{ds\,dp\,dq}{s+2p+q}\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\left(\frac{E}{E_s}\right)^2\left(\frac{\beta}{E}\right)^q\left(\frac{E^2\theta^2}{E_s^2}\right)^{-p-1}\times$$
$$\times\Gamma(p+1)\Gamma(-q)M_1(p, q, s, t). \qquad (1)$$

Здесь s, p, q — комплексные переменные, путь интегрирования — линия, параллельная мнимой оси и лежащая справа от всех полюсов, $E_s=21$ *Мэв*, $\Gamma(p+1)$ и $\Gamma(-q)$ — гамма-функции. Функция $M_1(p, q, s, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\{\partial^2/\partial t^2 + [A(s+2p+q)+\sigma_0]\,\partial/\partial t + A(s+2p+q)\sigma_0 -$$
$$-B(s+2p+q)\,C(s+2p+q)\}\,M_1(p, q, s, t) =$$
$$= (\partial/\partial t + \sigma_0)\{pM_1(p-1, q, s, t) + (s+2p+q)\,qM_1(p, q-1, s, t)\}. \qquad (2)$$

Явные выражения и значения функций $A(s+2p+q)$, $B(s+2p+q)$, $C(s+2p+q)$ даны в [2], $\sigma_0 = 0{,}773$. В случае $E \to 0$ интеграл по q равен вычетам подынтегрального выражения при $q = -s-2p$; интеграл по p следует брать как сумму вычетов при $s+2p = -n$, где n — целое число, т. е. при $p = -(n+s)/2$. Вычислив интегралы по q и по p, получаем

$$N_p(E_0, 0, t, \theta) = \frac{1}{4\pi^2 i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} ds \left(\frac{E_0}{\beta}\right)^s \left(\frac{\beta}{E_s}\right)^2 \left(\frac{\beta\theta}{E_s}\right)^{s+n-2} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)} \times$$

$$\times \Gamma\left(-\frac{n+s}{2} + 1\right) M_1\left(-\frac{n+s}{2}, n, s, t\right). \tag{3}$$

Для произвольных n вычисление функции $M_1\left(-\frac{n+s}{2}, n, s, t\right)$ затруднительно. Однако в интересующем нас случае $\beta\theta/E_s \ll 1$, т. е. около оси каскадного ливня, функция $N_p(E_0, 0, t, \theta)$ вычисляется сравнительно легко, так как в этом случае всеми вычетами, кроме вычета при $n = 0$, можно пренебречь, поскольку n-й вычет $\sim (E\theta/E_s)^n$ (аналогичное приближение было сделано в [3]). Следовательно, при $\beta\theta/E_s \ll 1$ имеем

$$N_p = (E_0, 0, t, \theta)\,|_{\beta\theta/E_s \ll 1} = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} ds \left(\frac{E_0}{\beta}\right)^s \left(\frac{\beta}{E_s}\right)^2 \left(\frac{\beta\theta}{E_s}\right)^{s-2} \times$$

$$\times \Gamma\left(-\frac{s}{2} + 1\right) M_1\left(-\frac{s}{2}, 0, s, t\right). \tag{4}$$

Решение уравнения (2) для $p = -s/2$, $q = 0$ можно получить в виде бесконечного произведения функций, выражающихся через функцию ψ [2]. Используя замену ψ на ψ_0 [2], можно найти аналитическое выражение значения бесконечного произведения и представить полученное решение в виде

$$M_1(-s/2, 0, s, t) = H_1(s)\,\{f[\lambda_1(s)]\}^{s/2} e^{\lambda_1(s)t} / \Gamma(s/2 + 1), \tag{5}$$

где $H_1(s)$, $\lambda_1(s)$ — табулированные функции [2], а $f[\lambda_1(s)] = -s\lambda_1'(s)/H_1(s)$. Подставляя (5) в (4) и вычисляя интеграл по s методом перевала без учета зависимости $s(\theta)$, получаем функцию $N_p(E_0, 0, t, \theta)$ при $\beta\theta/E_s \ll 1$ для случая $E_0 = \infty$ в виде

$$N_p(E_0, 0, t, \theta)\,|_{\beta\theta/E_s \ll 1} = \frac{H_1(s) \exp\{ys + \lambda_1(s)t\}\, \Gamma(-s/2 + 1)\, z^s}{s\sqrt{2\pi\lambda_1''(s)t}\, 2\pi\theta^2 \Gamma(s/2)\, 2^{s-1}}, \tag{6}$$

где $z = \beta\theta/p$; $p = E_s/2\sqrt{f(\lambda_1)}$; $y = \ln(E_0/\beta)$. Величины y, s и t связаны соотношением $y + \lambda_1'(s)t = 0$. Если в (4) вычислять интеграл по s с учетом зависимости s от θ, т. е. для случая $E_0 \neq \infty$, то получим выражение

$$N_p(E_0 \neq \infty, 0, t, \theta)\,|_{\beta\theta/E_s \ll 1} =$$

$$= \frac{H_1(s) \exp\{ys + \lambda_1(s)t\}\, \Gamma(-s/2 + 1)\, z^s 2^{1-s}}{s\sqrt{2\pi\{\lambda_1''(s)t - (d/ds)[(1/2)\psi(1 - s/2) - 1/(2-s)]\}}\, 2\pi\theta^2 \Gamma(s/2)}, \tag{7}$$

где величины y, s и t связаны соотношением $y + \lambda_1'(s)t + \ln z - (1/2)\ln 2 - (1/2)\psi(1 - s/2) + 1/(2-s) = 0$; $\psi(x) = (d/dx)\ln\Gamma(x+1)$. Формулы (6) и (7), которые дают окончательное решение задачи с учетом ионизационных потерь, отличаются от аналогичных формул для функции $N_p(E_0, E, t, \theta)$, полученной в [1] без учета ионизационных потерь, заменой E на β. При заданных значениях E_0 и t такая замена E на β приводит к уменьшению соответствующего значения параметра s, что, в свою очередь, изменяет форму функции углового распределения и увеличивает полное число рассматриваемых частиц. Аналогичные результаты получаются и для функции углового распределения фотонов.

В заключение автор выражает глубокую благодарность И. П. Иваненко за ценные советы и обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гужавин В. В., Иваненко И. П. ЖЭТФ, **40**, 1682, 1961.
2. Беленький С. З. Лавинные процессы в космических лучах. Гостехиздат, 1946.
3. Nishimura F. Kamata K. Suppl. Progr. Theor. Phys., **6**, 93, 1958.

Поступила в редакцию
27. 9 1961 г.

НИИЯФ