Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1962

В. К. ГРИШИН

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАРЯЖЕННОГО ПУЧКА В НАКОПИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Методом кинетического уравнения исследуется влияние продольного поля заряженных частиц на их движение в системах $d\omega/dE < 0$. Показывается возможность существования ограниченных по азимуту сгустков частиц, сфазированных собственным полем. Находится наиболее устойчивая форма спусков.

В связи с предложениями различных авторов об осуществлении ядерных реакций на встречных релятивистских пучках большой интенсивности, весьма актуальным становится изучение эффектов пространственного заряда в накопительных системах. Несмотря на очевидную важность этих эффектов число работ, посвященных им, остается весьма малым, что объясняется, вероятно, сложностью проблемы.

В настоящей работе рассматривается действие собственного продольного поля частиц на их движения в пучках большой интенсивности в магнитных накопительных системах. В определенных условиях роль собственного продольного поля весьма существенна [1—4]. Было показано [3, 4], в частности, что в магнитных системах с $d\omega/dE \angle 0$ (ω — частота, E — энергия частиц) азимутально однородное распределение частиц неустойчиво и однородный пучок, по-видимому, разрушается. Этот интересный результат, получивший название эффекта отрицательной массы, необходимо принимать во внимание при анализе взаимодействия интенсивного пучка заряженных частиц с внешним ускоряющим полем. Однако дальнейшее изучение приводит к нелинейным задачам, решить которые не всегда удается. О решении одной такой задачи сообщается в предыдущей работе автора [5]: оказалось, что в системах с $d\omega/dE \angle 0$ существует азимутально неоднородное устойчивое распределение частиц.

Условию $d\omega/dE < 0$ удовлетворяют все слабофокусирующие системы и сильнофокусирующие системы за критической энергией. Поэтому, ввиду большой практической важности плазменных эффектов в накопительных системах, на последних целесообразно остановиться подробнее.

Движение частиц вблизи средней энергии E_c в магнитных циклических системах удобно рассматривать в канонических переменных

$$\vartheta;\ z = \int\limits_{E_c}^{E} \frac{dE}{v}\ , \tag{1}$$

где ϑ — азимут, v — скорость частиц с энергией E (индексом c отмечаются величины, относящиеся к средней энергии частиц). Состояние пучка будем характеризовать функцией распределения плотности частиц $F = F(z, \vartheta, t)$. Тогда, полагая, что взаимодействие частиц является чисто электромагнитным, приходим к следующему кинетическому уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + e\mathbf{E}\frac{\partial F}{\partial z} + \omega(z)\frac{\partial F}{\partial \vartheta} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{E}$ — суммарное продольное электрическое поле частиц, e — заряд частиц. Магнитным полем частиц пренебрегаем. В общем случае $\mathbf{E}$ должно включать в себя еще внешнее ускоряющее поле, однако для понимания физики процесса целесообразно сначала рассмотреть более простой случай, когда изменение состояния пучка частиц происходит лишь под действием собственного поля *.

Прежде всего возникает вопрос о равновесном состоянии пучка, обусловленном собственным полем. При равновесном распределении плотности «самосфокусированный» пучок частиц движется, не изменяя своей формы со скоростью v_c, так что в этом случае $F = F(z, \vartheta - \omega_c t)$. Перейдя к новой переменной

$$\varphi = \theta - \omega_c t \tag{3}$$

приходим к уравнению

$$e\mathbf{E}\frac{\partial F}{\partial z} + (v\omega')_c z\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0, \tag{4}$$

где полагается, что $\omega - \omega_c \cong \left(v\frac{d\omega}{dE}\right)_c z$. Нужно заметить, что электрическое поле $\mathbf{E}$ пучка сильно экранируется крышками камеры и фактически совпадает с полем прямолинейного тока, расположенного между проводящими плоскостями. Поэтому [2, 3]

$$\mathbf{E} \cong -\frac{e\lambda}{R\gamma^2}\frac{d\xi}{d\varphi}, \tag{5}$$

где ξ — линейная плотность частиц; R — средний радиус орбиты пучка; $\gamma = E/E_0$; δ — коэффициент, зависящий от отношений поперечных размеров пучка к зазору камеры; обычно $\delta \cong 2 \div 3$. Следовательно, равновесное распределение плотности частиц с учетом связи между ξ и F описывается следующим нелинейным интегро-дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial F}{\partial z}\frac{d}{d\varphi}\int_{-\infty}^{\infty} F dz + \alpha z\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0, \tag{6}$$

$$\alpha = -\frac{(R^2\gamma^2 v\omega')_c}{e^2\delta}.$$

Очевидным решением (6) является любая функция z, удовлетворяющая условию $\partial F/\partial\varphi \equiv 0$. Но, поскольку известно, что однородное распределение при малом энергетическом разбросе неустойчиво, ищем решение

* Взаимодействие интенсивных заряженных пучков с внешним полем будет рассмотрено в следующих публикациях.

с $\partial F/\partial\varphi \neq 0$. Такое решение записывается в общей форме как

$$F = \Phi\left(\int\limits_{-\infty}^{\sigma} F dz - \frac{\alpha}{2} z^2\right), \tag{7}$$

где Φ — произвольная пока функция (непрерывная и дифференцированная). Но так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} F dz - \frac{\alpha}{2} z^2\right) dz, \tag{8}$$

то удается выделить единственное решение уравнения (6), удовлетворяющее условию (8) (см. приложение). Такое решение, описывающее равновесное распределение, записывается при $\alpha > 0$ $(\omega' < 0)$ как

$$F = \begin{cases} \left(\psi^2 - \dfrac{\alpha^2}{\pi^2} z^2\right)^{1/2} \\ 0 \end{cases}, \quad |z| \lessgtr \frac{\pi}{\alpha}\psi, \tag{9}$$

где $\psi = \psi(\varphi)$ — периодическая, но произвольная функция, что является следствием неоднозначности решения уравнения в частных производных. Однако эта произвольность ограничивается условиями применимости уравнения (6): ψ должна быть такой функцией аргумента, чтобы размеры азимутальных неоднородностей выбираемого распределения были больше апертуры камеры. Вопрос о существовании очень коротких сгустков здесь не рассматривается.

При $\alpha < 0$ $(\omega' > 0)$ единственным решением (6) является азимутально однородное решение.

Полученный результат является весьма показательным: существование сгустков, форма которых может быть очень произвольна, не зависит от числа частиц в пучке, а определяется лишь энергией пучка и параметрами магнитной системы.

Поскольку нельзя сделать каких-либо выводов о предпочтительной форме сгустков исходя из уравнения (6), попытаемся получить такие данные, исследуя исходную форму сгустка на устойчивость. Помимо прочего, эта задача сама по себе представляет интерес как задача об исследовании устойчивости однокомпанентной плазмы, локализованной внутренним полем. Так как такая задача вряд ли может быть решена при любой величине возмущения, ограничимся случаем малых возмущений плотности. Итак, пусть

$$F = F_0(z, \varphi) + f(z, \varphi) + f(z, \varphi, t), \tag{10}$$

где F_0 то же, что и в (9), $f \ll F_0$. Получаем следующее линеаризованное по f кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{e^2\delta}{(R\gamma)_c^2}\frac{\partial F_0}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial\varphi}dz - \frac{e^2\delta}{(R\gamma)_c^2}\frac{\partial f}{\partial z}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial F_0}{\partial\varphi}dz + (v\omega')_c z\frac{\partial f}{\partial\varphi} = 0. \tag{11}$$

Уравнение (11) отличается от ранее изученных уравнений плазменных колебаний дополнительным членом $e\mathrm{E}\partial f/\partial z$, описывающим действие поля исследуемой конфигурации. Поэтому не удается получить дисперсионное уравнение обычным способом освобождения от зависимости по φ разложением f по соответствующий системе собственных функций [6].

Ниже уравнение (11) исследуется методом моментов. Предварительно преобразуем это уравнение. Введем новые переменные

$$x = \frac{\alpha}{\pi} \frac{z}{\psi}, \quad \varphi, \quad \tau = \pi \frac{e^2\lambda}{(R\gamma)_c^2}, \quad \widetilde{f} = \psi f, \tag{12}$$

после чего уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \tau} = X\psi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi} dx + \psi' (1 - x^2) \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x} + x\psi \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi} - x\psi' \widetilde{f}, \tag{13}$$

где

$$X = \begin{cases} -\dfrac{x}{\pi\sqrt{1+x^2}} & |x| \lesseqgtr 1. \\ 0 & \end{cases} \tag{13a}$$

Произведем далее преобразование Лапласа

$$f(p) = \int_0^{\infty} \widetilde{f}(\tau) \exp(-p\tau)\, d\tau \tag{14}$$

и обозначим n-й момент $f(p)$ как

$$f_n(p, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(p, x, \varphi)\, dx. \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что, вычисляя из уравнения (13) нулевой, первый и т. д. моменты (15), получаем бесконечную систему, зацепляющихся уравнений, которую можно оборвать на n-м уравнении, если ввести функцию связи между f_{n-1} и f_{n+1} (отбрасываемые уравнения не накладывают дополнительных ограничений на p). Обозначим

$$\mu(\varphi) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 0{,}5) f dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f dx}. \tag{16}$$

После некоторых преобразований получаем следующую систему, которая является исходной для определения частоты плазменных колебаний

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(q_i \frac{\partial u_i}{\partial \varphi}\right) + \lambda \rho_i u_i = A_i, \qquad i = 0{,}1, \tag{17}$$

где

$$u_0 = \psi^2 \mu f_0, \; u_1 = \psi f_1, \; \lambda = -p^2, \tag{18}$$

$$q_0 = 1, \; q_1 = \psi^2 \mu, \; \rho_0 q_1 = 1, \; \rho_1 = 1,$$

а A_i учитывают начальные условия в момент времени $t = 0$. Функции u_i, p_i и q_i по определению являются периодическими с периодом 2π. Решения уравнений (17) можно записать в виде

$$u_i = \sum \frac{u_i^{(k)}(\varphi)}{\lambda - \lambda_k} \frac{\int_0^{2\pi} A_i u_i^{(k)}\, d\varphi}{\int_0^{2\pi} \rho_i u_i^{(k)2}\, d\varphi}, \tag{19}$$

где λ_k, $u_i^{(k)}$ — собственные значения и функции однородных уравнений (17). Следовательно, асимптотическое поведение флуктуации плотности f[7] при $t \to \infty$ будет определяться знаком собственных значений однородных уравнений (17),

$$f_i(t) \sim \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} u_i(p) \exp(pt)\, dp \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} \sum_k C_k \exp(\pm i \sqrt{\lambda_k} t);$$

при $\lambda_k > 0$ возмущения ограничены, при $\lambda_k < 0$ возмущения растут.

Задача о нахождении собственных значений однородного уравнения (17) с нулевыми граничными условиями (это всегда можно сделать, добавляя к u_i соответствующие постоянные, определяемые начальными условиями) хорошо изучена [8]. При нетривиальном решении существует счетное множество собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, которое соответствует собственным функциям $u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \ldots, u_i^{(n)}, \ldots$; $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$, причем при q и $\rho > 0$ все собственные значения положительны.

Следовательно, условием устойчивости возмущений является требование $\mu > 0$. Но, вычисляя различные моменты, мы обязаны учитывать возмущения, простирающиеся за границы ($x_{\text{гр}} = \pm 1$) пучка. Вне пучка до появления возмущений частиц нет, и имеет смысл говорить только о положительных возмущениях ($f > 0$) при $|x| \gtrsim 1$. Поэтому оба интеграла в (16) положительны при соответствующих радиальных размерах возмущений, неравенство $\mu > 0$ является очевидным, и конфигурация (9) устойчива*. Причем ответ однозначен независимо от вида $\psi = \psi(\varphi)$ (формы пучка). Этот несколько неожиданный вывод подтверждается следующими соображениями. Любой рост нестабильности в каком-либо неустойчивом распределении сопровождается увеличением энергетического разброса в пучке. При определенной критической величине последнего, определяемой линейной плотностью частиц, энергетическое перемешивание компенсирует рост нестабильности, и устанавливается окончательное распределение типа (9). Для распределения (9) отношение линейной плотности ξ к энергетическому разбросу, пропорциональному $z_{\text{гр}}$, не зависит от ψ и остается постоянным при любой форме пучка. В частности, при $\psi' \equiv 0$ выполняется критерий устойчивости однородного пучка, найденный в (3), $\alpha z^2_{\text{гр}} > \xi$.

Несмотря на то что распределение (9) устойчиво при любом виде $\psi(\varphi)$ (в частности, при любом числе и произвольной форме сгустков), можно сделать некоторое заключение о предпочтительном виде $\psi(\varphi)$. Линейная система обладает тем большим запасом устойчивости, чем больше величина $\lambda_{\min}$, следующая из (17). Действительно, с увеличением величины флуктуации изменяется (с учетом нелинейных членов) вид уравнений (17), изменяется и величина $\lambda_{\min}$. При определенном возмущении определяемом $\lambda_{\min}$, может оказаться, что $p^2 > 0$, и распределение будет неустойчиво. Нечто аналогичное будет происходить также при возникновении некоторых малых возмущений специального вида (например, локализованных при $z \simeq 0$), при которых знак параметра μ некоторое время остается неопределенным.

Поэтому наиболее устойчивым будет распределение (9) с таким $\psi(\varphi)$, при котором $\lambda_{\min}$ максимально. Последняя задача может быть решена в общей форме лишь численными методами. Были исследованы

* В общем случае $\mu = \mu(p)$ — величина комплексная. Но можно показать, что это не меняет конечного результата.

лишь простейшие типы возмущения, при которых $\mu = \text{const}$, $\lambda_{\min}$ вычислялись вариационным методом, по которому задача определения собственных значений сводится к нахождению минимума интеграла [9].

$$\int_0^{\pi} (qu'^2 - \lambda \rho u^2)\, d\varphi$$

при $u \neq 0$. Форма пучка задавалась функцией ψ^2 вида $1 + \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_k \cos km\varphi$ (m — число сгустков в пучке).

Оказалось, что $\lambda_{\min}$ наиболее чувствительно к форме пучка при $m = 1$. Вероятность существования 2, 3 и т. д. сгустков примерно одинакова и мало зависит от формы и размеров их. Для образования одного сгустка требуются особые начальные условия и естественно ожидать, что первоначально однородный пучок разобьется на несколько сгустков.

К аналогичным выводам можно прийти, считая, что система обладает тем большим запасом устойчивости, чем интенсивнее происходит энергетическое перемешивание частиц, упомянутое выше:

$$T \sim \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\psi}$$

Период обращения (граничных) частиц не имеет резких минимумов при конечных ψ, хотя и обращается в бесконечность при специальной форме сгустков типа $\psi^2 = 1 + \cos m\varphi$ (для таких сгустков $\lambda_{\min} \simeq 0$). Вероятнее всего, отдельные сгустки будут иметь форму близкую к эллипсам, при которой период T мало зависит от их размеров.

Эффекты отрицательной массы экспериментально исследовались Самойловым и Соколовым [10] и Сейдлом [11]. Полученные выше результаты полностью совпадают с выводами этих работ.

Итак, в накопительных системах циркулирующий ток разобьется на отдельные сгустки. Благодаря собственному полю, в пучке создаются условия для своеобразных фазовых колебаний, причем в зависимости от конкретного распределения траектории частиц могут быть как финитными, так и простираться вдоль всего пучка. Поэтому взаимодействие внешнего высокочастотного поля с накапливаемым током требует всестороннего исследования. По-видимому, здесь следует ожидать новых эффектов.

Автор выражает искреннюю благодарность А. А. Коломенскому и А. Н. Лебедеву за помощь в работе и обсуждение полученных результатов.

Приложение

Из (8) следует

$$\psi^2 = \int_{\infty}^{\infty} \Phi\left(\psi^2 - \frac{a}{2} z^2\right) dz = 2 \int_0^{\infty} \Phi(u)\, dz,$$

где

$$\psi^2 = \int_{\infty}^{\infty} F\, dz, \quad u = \psi^2 - \frac{a}{2} z^2.$$

После замены переменной $u = \alpha x\psi^2/2$ имеем уравнение

$$\psi = \text{const} \int_{-\infty}^{2/\alpha} \frac{\Phi(u)\,dx}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}x}}.$$

Продифференцируем это равенство по ψ (полагаем, что $\Phi(u)$ допускает такие операции), умножим на ψ и вычтем из получившегося соотношения ψ. Получаем

$$\int_{-\infty}^{2/\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}x}} \{2u\Phi_u' - \Phi(u)\}\,dx = 0.$$

Так как это равенство справедливо при любом виде ψ, приходим к уравнению

$$2u\Phi_u'(u) = \Phi(u),$$

которое и приводит к решению (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Symon K., Sessler A. CEKN Symposium, 1956.
2. Nielsen C., Sessler A. Rev. of. Sci. Jmstr., **30**, 80, 1959.
3. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. АЭ, 7, 549, 1959.
4. Nielsen C. et al. CERN Symposium, 1959.
5. Гришин В. К. АЭ, **11**, 183, 1961.
6. Ландау Л. Д. ЖЭТФ, **16**, 574, 1946.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. Физматгиз, М.—Л., 1958, стр. 460.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Методы математической физики. ГИТТЛ, 1953, стр. 425.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV. ГИТТЛ, 1951, стр. 568.
10. Самойлов И. М., Соколов А. А. ЖЭТФ, **39**, 257, 1960.
11. Seide M. Чехословацкий физический журнал, вып. 11, 390, 1961.

Поступила в редакцию
14. 8 1961 г.

НИИЯФ