Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1962

АСТРОНОМИЯ

А. А. ОРЛОВ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЯДОВ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИХ КООРДИНАТЫ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ВОЗМУЩЕННОМ ДВИЖЕНИИ

Задача об интегрировании дифференциальных уравнений по способу малого параметра сводится к решению бесконечной последовательности систем линейных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты рядов, представляющих искомые функции. Таким образом, указанные коэффициенты определяются не однозначно, так как интегрирование линейных дифференциальных уравнений вводит в них произвольные постоянные.

В настоящей статье устанавливается зависимость между решениями, соответствующими различному выбору этих постоянных для случая, когда при нулевом значении малого параметра задача сводится к дифференциальным уравнениям движения материальной точки в поле ньютоновского тяготения неподвижного центра.

Введение

Как известно, задача об интегрировании дифференциальных уравнений возмущенного движения по методу малого параметра сводится к нахождению решений последовательности систем линейных неоднородных уравнений. Каждая из систем этой последовательности определяет совокупность коэффициентов рядов, представляющих координаты движущейся точки при некоторой определенной степени малого параметра. Отсюда следует, что при определении каждой такой совокупности коэффициентов в выражения возмущенных координат будут вводиться произвольные постоянные интегрирования, число которых равно порядку указанной системы линейных дифференциальных уравнений. При неограниченном продолжении процесса вычисления коэффициентов рядов количество этих постоянных будет неограниченно возрастать. Но число произвольных постоянных, входящих в окончательные выражения возмущенных координат, должно равняться порядку исходной системы дифференциальных уравнений возмущенного движения. Следовательно, не все произвольные постоянные, возникающие при последовательном определении коэффициентов указанных рядов, будут между собой независимы. Любое изменение любой из этих постоянных приведет лишь к изменению начальных условий, которым удовлетворяют возмущенные координаты.

В различных задачах небесной механики этими произвольными постоянными распоряжаются по-разному. Например, их значения можно выбирать так, чтобы коэффициенты рядов, представляющих возмущенное движение, удовлетворяли заданным начальным условиям. При отыскании периодических возмущений эти постоянные выбираются так, чтобы в выражениях координат уничтожались непериодические члены и т. д. .

В некоторых случаях возникает необходимость перехода от аналитических выражений координат, соответствующих одному способу выбора произвольных постоянных интегрирования линейных дифференциальных, уравнений к выражениям, соответствующим другому способу выбора этих постоянных. В настоящей работе даются формулы для такого перехода в предположении, что дифференциальные уравнения невозмущенного движения являются уравнениями движения материальной точки в поле тяготения одного неподвижного притягивающего центра. При выводе этих формул мы ограничились учетом величин второго порядка относительно малого параметра.

Предварительные замечания

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t, \alpha) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — искомые функции, t — время, α — малый параметр.

Дифференциальные уравнения, которые получаются из системы (1.1) при $\alpha = 0$, мы будем в дальнейшем называть уравнениями невозмущенного движения. Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = X_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, t, 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.2}$$

Предположим, что общее решение системы дифференциальных уравнений невозмущенного движения нам известно. Запишем его следующим образом:

$$x_i^{(0)} = x_i^{(0)}(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.3}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные интегрирования.

Предположим теперь, что при некоторых фиксированных значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ правые части уравнений (1.1) голоморфны относительно α и $x_i - x_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, если эти величины по модулю достаточно малы и непрерывны относительно t, если $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Из теории дифференциальных уравнений известно, что при этих условиях система (1.1) имеет решение, голоморфное относительно α и непрерывное относительно t в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t' \leqslant t_1$, если модуль α достаточно мал. Это решение можно записать в виде

$$x_i = x_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k x_i^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.4}$$

где $x_i^{(0)}, x_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots)$ суть функции переменной t.

Если значения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ получат некоторые приращения $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, решение дифференциальных уравнений изменится. Запишем новое решение в виде

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \bar{x}_i^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.5}$$

где $\bar{x}_i^{(0)}$ и $\bar{x}_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots)$ будут функциями t и приращений β_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Предположим теперь, что постоянные $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ заданы в виде сходящихся степенных рядов относительно параметра α:

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \beta_i^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.6}$$

Учитывая эти выражения, разложим правые части равенств (1.5) по степеням α. Мы будем иметь

$$\bar{x}_i = x_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k y_i^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.7}$$

где

$$\begin{aligned}
y_i^{(1)} &= x_i^{(1)} + \beta_1^{(1)} \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial C_1} + \beta_2^{(1)} \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial C_2} + \ldots + \beta_n^{(1)} \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial C_n}, \\
y_i^{(2)} &= x_i^{(2)} + \beta_1^{(2)} \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial C_1} + \beta_2^{(2)} \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial C_2} + \ldots + \beta_n^{(2)} \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial C_n} + \\
&+ \frac{1}{2} \beta_1^{(1)2} \frac{\partial^2 x_i^{(0)}}{\partial C_1^2} + \beta_1^{(1)} \beta_2^{(1)} \frac{\partial^2 x_i^{(0)}}{\partial C_1 C_2} + \ldots + \frac{1}{2} \beta_n^{(1)2} \frac{\partial^2 x_i^{(0)}}{\partial C_n^2} + \\
&+ \beta_1^{(1)} \frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial C_1} + \beta_2^{(1)} \frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial C_2} + \ldots + \beta_n^{(1)} \frac{\partial x_i^{(1)}}{\partial C_n}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(i = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

В последующих параграфах настоящей работы мы применим изложенные выше рассуждения к случаю, когда невозмущенное движение материальной точки определяется силовым полем одного неподвижного притягивающего центра.

Движение материальной точки под действием неподвижного притягивающего центра и малой возмущающей силы

Предположим, что в невозмущенном движении материальная точка описывает эллиптическую орбиту, подчиняясь законам Кеплера. Обозначим через a большую полуось орбиты, через e — ее эксцентриситет, через i — наклон орбиты к некоторой фиксированной плоскости, через T — момент прохождения через перицентр, через Ω — долготу восходящего узла, отсчитываемую от некоторого направления в указанной выше плоскости, и через ω — угловое расстояние перицентра орбиты от восходящего узла. Пусть, далее, $p = a(1 - e^2)$ будет параметр невозмущенной орбиты, n — невозмущенное среднее движение материальной точки, $M = n(t - T)$ — невозмущенная средняя аномалия, $u = \omega + v$ — невозмущенный аргумент широты, $r = \frac{p}{1+e\cos v}$ — невозмущенный радиус-вектор.

Введем неподвижную прямоугольную систему координат $Oxyz$, начало которой совпадает с центральной притягивающей точкой O. Направление координатных осей выберем так, чтобы угол наклона плоскости невозмущенной орбиты к плоскости Oxy, долгота восходящего узла и угловое расстояние перицентра орбиты от восходящего узла имели указанные выше значения i, Ω и ω. В таком случае невозмущенные координаты $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ и $z^{(0)}$ материальной точки будут иметь вид

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= r^{(0)}(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i), \\ y^{(0)} &= r^{(0)}(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i), \\ z^{(0)} &= r^{(0)}\sin u\sin i. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для того чтобы получить явные выражения u и r в виде функций времени, следует воспользоваться равенством

$$t - T = \int\limits_0^v \frac{{r^{(0)}}^2 dv}{\sqrt{\mu p}}, \tag{2.2}$$

где μ — произведение постоянной всемирного тяготения на массу центральной притягивающей точки.

Координаты $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ и $z^{(0)}$, определяемые равенствами (2.1), зависят от шести постоянных интегрирования: a, e, i, T, ω и Ω.

Предположим теперь, что кроме центральной притягивающей силы на материальную точку действует возмущающая сила, сообщающая ей ускорение, составляющие которого по осям координат суть X, Y и Z. В общем случае эти составляющие зависят от времени t координат x, y, z и составляющих скорости материальной точки $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Кроме того, предположим, что X, Y и Z зависят от малого параметра α и обращаются в нуль при $\alpha = 0$.

Допустим, что составляющие возмущающего ускорения X, Y и Z удовлетворяют условиям, наложенным на правые части дифференциальных уравнений § 1. В таком случае возмущенные координаты материальной точки могут быть представлены в виде степенных рядов относительно α, сходящихся при достаточно малых значениях модуля этого параметра

$$\left.\begin{aligned} x &= x^{(0)} + \alpha x^{(1)} + \alpha^2 x^{(2)} + \dots, \\ y &= y^{(0)} + \alpha y^{(1)} + \alpha^2 y^{(2)} + \dots, \\ z &= z^{(0)} + \alpha z^{(1)} + \alpha^2 z^{(2)} + \dots, \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

где $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ и $z^{(0)}$ определяются формулами (2.1), а $x^{(k)}$, $y^{(k)}$ и $z^{(k)}$ $(k=1, 2, \dots)$ являются функциями времени и шести элементов невозмущенной орбиты.

Непосредственное применение процедуры, указанной в § 1, к рядам (2.3) приводит к весьма громоздким формулам. Значительных упрощений, можно добиться если перейти к новой системе координат, основная плоскость которой совпадает с плоскостью невозмущенной орбиты. В дальнейшем мы будем рассматривать движение материальной точки в цилиндрической системе координат $Orw\zeta$, плоскость Orw которой совпадает с плоскостью невозмущенной орбиты, а угол w отсчитывается от линии ее пересечения с плоскостью Oxy. Через r мы будем обозначать проекцию возмущенного радиуса-вектора на плоскость невозмущенной орбиты, а через ζ — аппликату материальной точки, отсчитываемую в направлении, перпендикулярном к плоскости невозмущенной орбиты. Очевидно, что в невозмущенном движении $r = r^0$, $w = u$, $\zeta = 0$.

Связь между координатами r, w, ζ и x, y, z определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned} x &= r(\cos w \cos\Omega - \sin w \sin\Omega\cos i) + \zeta\sin\Omega\sin i, \\ y &= r(\cos w \sin\Omega + \sin w \cos\Omega\cos i) - \zeta\cos\Omega\sin i, \\ z &= r\sin w \sin i + \zeta\cos i. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Предположим, что мы нашли решение задачи с учетом возмущающей силы в следующем виде:

$$\begin{aligned} r &= r^{(0)} + \alpha r^{(1)} + \alpha^2 r^{(2)} + \ldots, \\ w &= u + \alpha w^{(1)} + \alpha^2 w^{(2)} + \ldots, \\ \zeta &= \alpha\zeta^{(1)} + \alpha^2\zeta^{(2)} + \ldots, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $r^{(0)}$ и u соответствуют невозмущенному эллиптическому движению, указанному выше. Наша задача будет состоять в преобразовании правых частей равенств (2.5) по способу, описанному в § 1.

Дадим элементам невозмущенной орбиты a, e, i, T, ω и Ω приращения Δa, Δe, Δi, ΔT, $\Delta\omega$ и $\Delta\Omega$. Новые значения элементов, которые при этом получатся, обозначим через $\bar a$, $\bar e$, $\bar i$, $\bar T$, $\bar\omega$ и $\bar\Omega$.

Найдем выражения возмущенных цилиндрических координат, соответствующие измененным значениям элементов невозмущенной орбиты, но отнесенные к прежней координатной системе $Orw\zeta$. Обозначим эти новые значения координат через $\breve r$, $\breve w$, $\breve\zeta$. Все величины, зависящие от элементов невозмущенной орбиты, в которые вместо a, e, ..., Ω подставлены новые значения элементов $\bar a$, $\bar e$, ..., $\bar\Omega$, будем отмечать прямой чертой. Например, $\bar r = r(\bar a, \bar e, \ldots, \bar\Omega, t, \alpha)$, ... Как мы увидим ниже, $\breve r \neq \bar r$, $\breve w \neq \bar w$ и $\breve\zeta \neq \bar\zeta$. После подстановки в них новых значений элементов формулы (2.4) примут вид

$$\begin{aligned} \bar x &= \bar r(\cos\bar w\cos\bar\Omega - \sin\bar w\sin\bar\Omega\cos\bar i) + \bar\zeta\sin\bar\Omega\sin\bar i, \\ \bar y &= \bar r(\cos\bar w\sin\bar\Omega + \sin\bar w\cos\bar\Omega\cos\bar i) - \bar\zeta\cos\bar\Omega\sin\bar i, \\ \bar z &= \bar r\sin\bar w\sin\bar i + \bar\zeta\cos\bar i. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Для получения $\breve r$, $\breve w$ и $\breve\zeta$ преобразуем эти равенства по формулам

$$\begin{aligned} \breve r\cos\breve w &= \bar x\cos\Omega + \bar y\sin\Omega, \\ \breve r\sin\breve w &= (-\bar x\sin\Omega + \bar y\cos\Omega)\cos i + \bar z\sin i, \\ \breve\zeta &= (\bar x\sin\Omega - \bar y\cos\Omega)\sin i + \bar z\cos i. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Подставим сюда значения $\bar x$, $\bar y$ и $\bar z$ из равенств (2.6) и разложим полученные выражения по степеням приращений $\Delta\Omega$ и Δi. Из найденных таким образом соотношений определим $\widetilde{r}$ и $\widetilde{w}$. Ограничиваясь вторыми степенями $\Delta\Omega$ и Δi, будем иметь

$$\widetilde{r} = \bar{r}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\bar{w}\Delta i^2 + \sin\bar{w}\cos\bar{w}\sin i\Delta i\Delta\Omega - \frac{1}{2}\cos^2\bar{w}\sin^2 i\Delta\Omega^2 + \ldots\right) +$$

$$+ \bar{\zeta}\left(-\sin\bar{w}\Delta i + \cos\bar{w}\sin i\Delta\Omega - \frac{1}{2}\sin\bar{w}\sin i\cos i\Delta\Omega^2 + \ldots\right), \qquad (2.8)$$

$$\widetilde{w} = \bar{w} + \cos i\Delta\Omega - \frac{1}{2}\sin\bar{w}\cos\bar{w}\,\Delta i^2 - \sin^2\bar{w}\sin i\Delta i\Delta\Omega +$$

$$+ \frac{1}{2}\sin\bar{w}\cos\bar{w}\sin^2 i\Delta\Omega^2 + \ldots + \frac{\bar{\zeta}}{\bar{r}}\left(-\cos\bar{w}\,\Delta i - \sin\bar{w}\sin i\Delta\Omega -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\cos\bar{w}\sin i\cos i\Delta\Omega^2 + \ldots\right), \qquad (2.9)$$

$$\widetilde{\zeta} = \bar{r}\left(\sin\bar{w}\Delta i - \cos\bar{w}\sin i\Delta\Omega + \frac{1}{2}\sin\bar{w}\sin i\cos i\Delta\Omega^2 + \ldots\right) +$$

$$+ \bar{\zeta}\left(1 - \frac{1}{2}\Delta i^2 - \frac{1}{2}\sin^2 i\Delta\Omega^2 + \ldots\right). \qquad (2.10)$$

Величины $\bar{r}$, $\bar{w}$, $\bar{\zeta}$, входящие в эти равенства, зависят от элементов $\bar{a} = a + \Delta a$, $\bar{e} = e + \Delta e, \ldots, \bar{\Omega} = \Omega + \Delta\Omega$.

Их также нужно разложить в ряды по степеням приращений элементов Δa, Δe,..., $\Delta\Omega$. Здесь мы не будем приводить выражений, которые при этом получатся, а перейдем непосредственно к случаю, когда приращения элементов заданы в виде сходящихся рядов по степеням малого параметра α.

Окончательные формулы

Предположим, что Δa, Δe,... $\Delta\Omega$ заданы в виде сходящихся рядов, расположенных по возрастающим степеням малого параметра α:

$$\begin{aligned}
\Delta a &= \alpha a^{(1)} + \alpha^2 a^{(2)} + \ldots, \\
\Delta e &= \alpha e^{(1)} + \alpha^2 e^{(2)} + \ldots, \\
\Delta i &= \alpha i^{(1)} + \alpha^2 i^{(2)} + \ldots, \\
\Delta T &= \alpha T^{(1)} + \alpha^2 T^{(2)} + \ldots, \\
\Delta\omega &= \alpha\omega^{(1)} + \alpha^2\omega^{(2)} + \ldots, \\
\Delta\Omega &= \alpha\Omega^{(1)} + \alpha^2\Omega^{(2)} + \ldots
\end{aligned} \qquad (3.1)$$

Подставим эти ряды в правые части равенства (2.8), (2.9) и (2.10). По формуле (2.5) сгруппировывая члены с одинаковыми степенями α, мы получим следующие выражения для $\bar{r}$, $\bar{w}$ и $\widetilde{\zeta}$:

$$\widetilde{r} = r^{(0)} + \alpha\left(r^{(1)} + \frac{\partial r^{(0)}}{\partial a}a^{(1)} + \frac{\partial r^{(0)}}{\partial e}e^{(1)} + \frac{\partial r^{(0)}}{\partial T}T^{(1)}\right) + \alpha^2\left[r^{(2)} +\right.$$

$$+ \frac{\partial r^{(0)}}{\partial a}a^{(2)} + \frac{\partial r^{(0)}}{\partial e}e^{(2)} + \frac{\partial r^{(0)}}{\partial T}T^{(2)} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r^{(0)}}{\partial a^2}a^{(1)^2} + \frac{\partial^2 r^{(0)}}{\partial a\partial e}a^{(1)}e^{(1)} +$$

$$+ \frac{\partial^2 r^{(0)}}{\partial a\,\partial T}a^{(1)}T^{(1)} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r^{(0)}}{\partial e^2}e^{(1)2} + \frac{\partial^2 r^{(0)}}{\partial e\,\partial T}e^{(1)}T^{(1)} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r^{(0)}}{\partial T^2}T^{(1)2} -$$

$$
-\frac{1}{4}r^{(0)}(1-\cos 2u)\,i^{(1)^2}+\frac{1}{2}r^{(0)}\sin 2u\sin i\cdot i^{(1)}\Omega^{(1)}-\frac{1}{4}r^{(0)}(1+
$$

$$
+\cos 2u)\sin^2 i\,\Omega^{(1)^2}+\frac{\partial r^{(1)}}{\partial a}a^{(1)}+\frac{\partial r^{(1)}}{\partial e}e^{(1)}+\left(\frac{\partial r^{(1)}}{\partial i}-\zeta^{(1)}\sin u\right)i^{(1)}+
$$

$$
+\frac{\partial r^{(1)}}{\partial T}T^{(1)}+\frac{\partial r^{(1)}}{\partial\omega}\omega^{(1)}+\left(\frac{\partial r^{(1)}}{\partial\Omega}+\zeta^{(1)}\cos u\sin i\right)\Omega^{(1)}+\ldots \tag{3,2}
$$

$$
\widetilde{w}=u+\alpha\left(w^{(1)}+\frac{\partial u}{\partial a}a^{(1)}+\frac{\partial u}{\partial e}e^{(1)}+\frac{\partial u}{\partial T}T^{(1)}+\omega^{(1)}+\cos i\,\Omega^{(1)}\right)+
$$

$$
+\alpha^2\left[w^{(2)}+\frac{\partial u}{\partial a}a^{(2)}+\frac{\partial u}{\partial e}e^{(2)}+\frac{\partial u}{\partial T}T^{(2)}+\omega^{(2)}+\cos i\,\Omega^{(2)}+\right.
$$

$$
+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}a^{(1)^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial a\partial e}a^{(1)}e^{(1)}+\frac{\partial^2 u}{\partial a\partial T}a^{(1)}T^{(1)}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial e^2}e^{(1)^2}+
$$

$$
+\frac{\partial^2 u}{\partial e\partial T}e^{(1)}T^{(1)}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial T^2}T^{(1)^2}-\frac{1}{4}\sin 2u\,i^{(1)^2}-\frac{1}{2}(1-\cos 2u)\sin i\,i^{(1)}\Omega^{(1)}+
$$

$$
+\frac{1}{4}\sin 2u\sin^2 i\,\Omega^{(1)^2}+\frac{\partial w^{(1)}}{\partial a}a^{(1)}+\frac{\partial w^{(1)}}{\partial e}e^{(1)}+\left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial i}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{\zeta^{(1)}}{r^{(0)}}\cos u\right)i^{(1)}+\frac{\partial w^{(1)}}{\partial T}T^{(1)}+\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\omega}\omega^{(1)}+\left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\Omega}-\right.
$$

$$
\left.\left.-\frac{\zeta^{(1)}}{r^{(0)}}\sin u\sin i\right)\Omega^{(1)}\right]+\ldots,
$$

$$
\widetilde{\zeta}=\alpha\left(\zeta^{(1)}+r^{(0)}\sin u\,i^{(1)}-r^{(0)}\cos u\sin i\,\Omega^{(1)}\right)+\alpha^2\left[\zeta^{(2)}+\frac{\partial\zeta^{(1)}}{\partial a}a^{(1)}+\right.
$$

$$
+\frac{\partial\zeta^{(1)}}{\partial e}e^{(1)}+\left(\frac{\partial\zeta^{(1)}}{\partial i}+r^{(0)}W^{(1)}\cos u+r^{(1)}\sin u\right)i^{(1)}+\frac{\partial\zeta^{(1)}}{\partial T}T^{(1)}+
$$

$$
+\frac{\partial\zeta^{(1)}}{\partial\omega}\omega^{(1)}+\left(\frac{\partial\zeta^{(1)}}{\partial\Omega}+r^{(0)}w^{(1)}\sin u\sin i-r^{(1)}\cos u\sin i\right)\Omega^{(1)}+
$$

$$
+r^{(0)}\left(\sin u\; i^{(2)}-\cos u\;\sin i\;\Omega^{(2)}\right)+
$$

$$
+\left(r^{(0)}\frac{\partial u}{\partial a}\cos u+\frac{\partial r^{(0)}}{\partial a}\sin u\right)a^{(1)}i^{(1)}+\left(r^{(0)}\frac{\partial u}{\partial e}\cos u+\frac{\partial r^{(0)}}{\partial e}\sin u\right)e^{(1)}i^{(1)}+
$$

$$
+\left(r^{(0)}\frac{\partial u}{\partial T}\cos u+\frac{\partial r^{(0)}}{\partial T}\sin u\right)r^{(1)}T^{(1)}+r^{(0)}\cos u\,i^{(1)}\omega^{(1)}+\left(r^{(0)}\frac{\partial u}{\partial a}\sin u-\right.
$$

$$
\left.-\frac{\partial r^{(0)}}{\partial a}\cos u\right)\sin i\,a^{(1)}\Omega^{(1)}+\left(r^{(0)}\frac{\partial u}{\partial e}\sin u-\frac{\partial r^{(0)}}{\partial e}\cos u\right)\sin i\,e^{(1)}\Omega^{(1)}+
$$

$$
+\left(r^{(0)}\frac{\partial u}{\partial T}\sin u-\frac{\partial r^{(0)}}{\partial T}\cos u\right)\sin i\,T^{(1)}\Omega^{(1)}+r^{(0)}\sin u\sin i\,\omega^{(1)}\Omega^{(1)}+
$$

$$
\left.+\frac{1}{2}r^{(0)}\sin u\sin i\cos i\,\Omega^{(1)^2}\right]+\ldots
$$

В этих формулах $r^{(0)}$, u и их частные производные по элементам невозмущенной орбиты определяются следующими равенствами:

$$
r^{(0)}=\frac{p}{1+e\cos v},\quad u=v+\omega,
$$

$$\frac{\partial r^{(0)}}{\partial a} = \frac{r^{(0)}}{a} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}\, Me\sin v, \quad \frac{\partial r^{(0)}}{\partial e} = -a\cos v,$$

$$\frac{\partial r^{(0)}}{\partial T} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e\sin v, \quad \frac{\partial u}{\partial a} = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{ap}}{r^{(0)2}} M,$$

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \left(1 + \frac{p}{r^{(0)}}\right)\frac{a}{p}\sin v, \quad \frac{\partial u}{\partial T} = -\frac{\sqrt{\mu p}}{r^{(0)2}},$$

$$\frac{\partial^2 r^{(0)}}{\partial a^2} = \frac{3}{4}\left(\frac{e\sin v}{\sqrt{ap}} + \frac{3a}{r^{(0)2}} Me\cos v\right) M,$$

$$\frac{\partial^2 r^{(0)}}{\partial a\partial e} = -\cos v - \frac{3}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{p}\right)^3}\,\frac{p^2}{r^{(0)2}} M\sin v,$$

$$\frac{\partial^2 r^{(0)}}{\partial a\partial T} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\left(\frac{e\sin v}{\sqrt{ap}} + \frac{3a}{r^{(0)2}} M e\cos v\right),$$

$$\frac{\partial^2 r^{(0)}}{\partial e^2} = \frac{a^2}{p}\left(1 + \frac{p}{r^{(0)}}\right)\sin^2 v, \quad \frac{\partial^2 r^{(0)}}{\partial e\partial T} = -\frac{a\sqrt{\mu p}}{r^{(0)2}}\sin v,$$

$$\frac{\partial^2 r^{(0)}}{\partial T^2} = \frac{\mu}{r^{(0)2}}\, e\cos v,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{p}{a}} - 3\frac{a}{r^{(0)}} Me\sin v\right)\frac{M}{r^{(0)2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a\partial e} = \frac{3a}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}\left(e - 2\frac{p}{r^{(0)}}\cos v\right)\frac{M}{r^{(0)2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a\partial T} = \frac{3\sqrt{\mu p}}{2ar^{(0)2}}\left(1 - 2\sqrt{\frac{a}{p}}\,\frac{a}{r^{(0)}} Me\sin v\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial e^2} = \frac{a^2}{p^2}\left\{2e + \left[\left(1 + \frac{p}{r^{(0)}}\right)^2 + \frac{p^2}{r^{(0)2}}\right]\cos v\right\}\sin v,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial e\partial T} = \frac{a}{p}\frac{\sqrt{\mu p}}{r^{(0)2}}\left(e - 2\frac{p}{r^{(0)}}\cos v\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} = -\frac{2\mu}{r^{(0)3}}\, e\sin v.$$

Что же касается величин $r^{(k)}$, $w^{(k)}$ и $\zeta^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то их аналитические выражения зависят от характера возмущающих сил.

Заключение

Соотношения, выведенные в настоящей работе, могут иметь ряд приложений к задачам небесной механики, в которых требуется выполнять преобразования рядов, представляющих возмущенное движение. Мы предполагали, что элементы a, e, i, T, ω и Ω постоянны. Наши рассуждения легко обобщить и на случай, когда эти элементы зависят от времени.

Поступила в редакцию
17.8 1961 г.

Кафедра небесной механики
и гравиметрии