

## ФИЗИКА

Ю. П. ПЫТЬЕВ

### ЭЛЕКТРОННАЯ ОПТИКА ПРИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПУЧКАХ

Рассматривается движение заряженных частиц, близкое к произвольной поверхности в электромагнитном поле.

В работе [1] рассмотрено движение заряженных частиц в электромагнитном поле по произвольным поверхностям. При этом на поверхности определялось допустимое поле, т. е. такое электромагнитное поле, в котором заданное семейство кривых, лежащих на поверхности, может служить семейством траекторий. Для того чтобы построенное допустимое поле можно было реализовать практически, была поставлена задача [1] определения поля вне поверхности. В этой работе показано, что требования, чтобы поле вне поверхности удовлетворяло уравнениям Максвелла и на поверхности совпадало с построенным допустимым полем, приводят к задаче Коши для уравнения Лапласа.

В настоящей работе рассматриваются движения, близкие к поверхности, на которой определено поле, допустимое относительно кривых некоторого семейства. Получаемые при этом уравнения «приповерхностных» траекторий позволяют рассматривать задачи фокусировки пучков заряженных частиц, близких к произвольной поверхности.

#### § 1. Траектории, близкие к поверхности

Известно, что в криволинейной системе координат  $\xi^1 \xi^2 \xi^3$  уравнения траектории заряженной частицы имеют следующий вид [1]:

$$\ddot{\xi}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{\xi}^j \dot{\xi}^k = \varepsilon_{.jk}^i \dot{\xi}^j h^k + G^{ij} \varphi_j - \dot{\xi}^i \varphi_j \dot{\xi}^j, \quad (1)$$
$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} = \frac{1}{2\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i}, \quad h^i = \frac{e}{mc} \frac{H^i}{\sqrt{2\Phi}}.$$

Здесь  $H^i$  контравариантные компоненты вектора напряженности магнитного поля, а  $\Phi$  выражается через потенциал электрического поля

$$\Phi = \frac{e}{m} (V - V_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2. \quad (2)$$

В дальнейшем, как и в [1], будем считать  $eV_0 = \frac{m}{2} \left( \frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2$ , так что

$$\Phi = \frac{e}{m} V. \quad (2a)$$

Если траектория лежит на поверхности  $\vec{X} = \vec{X}(\xi^1, \xi^2)$ , а криволинейные координаты в пространстве определяются равенством

$$\vec{R} = \vec{X}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \vec{q}(\xi^1, \xi^2), \quad (3)$$

то траектория описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}^\alpha + \gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \dot{\xi}^\mu \dot{\xi}^\nu &= \varepsilon_{\beta}^{\alpha} \dot{\xi}^\beta (h^3 + \varepsilon_{\nu}^{\mu} \dot{\xi}^\nu \varphi_{\mu}), \\ \pi_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta &= \varepsilon_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha h^\beta + \varphi_3. \end{aligned} \quad (4)$$

В работе [1] показано, что на поверхности можно задать однопараметрическое семейство кривых и по заданному семейству построить допустимое поле, при этом кривые семейства могут служить траекториями заряженных частиц в построенном поле. Это значит, что при выполнении определенных условий заряженные частицы можно «посадить» на поверхность и они будут двигаться по поверхности. Таких частиц можно посадить  $\infty^1$ . Смысл «определенных условий» заключается в том, что в начальный момент частица должна, во-первых, лежать на поверхности и, во-вторых, иметь определенную скорость, вектор которой должен лежать в плоскости касательной к поверхности и иметь определенную ориентацию. Все это следует из выражений для потенциалов допустимых полей полученных в [1]

$$\begin{aligned} \Phi &= \dot{\Phi}(t^1) \exp \left\{ 2 \int \sqrt{g_{22}} (\gamma + h^3) dt^2 \right\}, \\ \Psi &= \frac{mc}{e} \int \sqrt{g_{22}} (\chi - \varphi_3) \sqrt{2\Phi} dt^2 + \dot{\Psi}(t^1). \end{aligned} \quad (5)$$

В этих выражениях функции  $\dot{\Phi}$ ,  $\dot{\Psi}$ ,  $h^3$  и  $\varphi_3$  следует рассматривать как определенные в силу тех или иных условий и заданные, поэтому в согласии с (2) и (2a) определяется скорость движения по кривым семейства. Задача определения этих функций будет рассмотрена в дальнейшем в связи с проблемой фокусировки приповерхностного пучка частиц.

Если условия «посадки» частиц на поверхность слегка нарушить, то движение не будет происходить по поверхности, но может происходить вблизи поверхности. Рассмотрим движения близкие к поверхности.

Пусть  $\xi^\alpha(s)$  — текущие координаты траектории, лежащей на поверхности и принадлежащей семейству. Траекторию, близкую к поверхности, будем называть варьированной и будем описывать с помощью текущих координат  $\xi^i(\sigma) = \xi^i(s) + \delta\xi^i$ , где  $\sigma$  — длина дуги варьированной траектории, а  $\delta\xi^i$  весьма малы, так что во всех дальнейших выражениях члены, содержащие произведения величин  $\delta\xi^i$ , будут опущены. Нашей задачей является получение уравнений, определяющих поведение величин  $\delta\xi^i$ .

Отметим прежде всего, что  $s$  и  $\sigma$  связаны уравнением (см. приложение)

$$\frac{ds}{d\sigma} = 1 - \gamma_{\alpha,\mu\nu} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\mu \delta\xi^\nu - g_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \delta\xi^\beta + \pi_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta \delta\xi^3. \quad (5a)$$

Это уравнение позволяет перейти от дифференцирования по  $\sigma$  к дифференцированию по  $s$  в уравнениях (1), которым должны удовлетворять величины  $\xi^i(\sigma)$ . Если представить все члены уравнений (1) разложенными в ряды по степеням  $\delta\xi^i$  и пренебречь членами, имеющими степень выше первой, то с учетом того, что величины  $\xi^\alpha(s)$  удовлетворяют уравнениям (4), получаем искомые уравнения в вариациях (см. приложение)

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\xi}^3 + a\delta\dot{\xi}^3 + b_0\delta\xi^0 + A\delta\xi^3 + B_0\delta\xi^0 &= 0, \\ e_\alpha^0\delta\dot{\xi}^\alpha + a_3^0\delta\dot{\xi}^3 + b_\alpha^0\delta\xi^\alpha + A_3^0\delta\xi^3 + B_\alpha^0\delta\xi^\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Третье уравнение выделено особо, так как оно характеризует отклонение варьированной траектории от поверхности. Однако в произвольной системе координат уравнения (6) представляют лишь общий вид системы линейных дифференциальных уравнений, и весьма приближенно отражают специфику рассматриваемого вопроса. Поэтому мы преобразуем уравнения (6) в характеристическую систему координат (см. [1]), которая наиболее естественным образом связана с семейством кривых и допустимым полем. Координатные линии характеристической системы координат определяются системами уравнений

$$\frac{d\xi^\alpha}{dt} = \tau^\alpha, \quad \frac{d\xi^\alpha}{dt} = \varepsilon^\alpha_\mu \tau^\mu.$$

Если элемент длины в новой системе координат представить выражением

$$(dl)^2 = g_{11}(dt^1)^2 + g_{22}(dt^2)^2,$$

то векторы

$$\lambda^\alpha = (1/\sqrt{g_{11}}, 0), \quad \mu^\alpha = (0, -1/\sqrt{g_{22}})$$

будут единичными и касательными к координатным линиям [2], а так как вектор  $\tau^\alpha$  также единичный и касательный к координатной линии, то имеет место равенство

$$\tau^\alpha = \lambda^\alpha = (1/\sqrt{g_{11}}, 0).$$

Это равенство, а также то обстоятельство, что новая система координат является ортогональной, позволяют упростить уравнения (6). Прежде всего первое из двух последних уравнений (6) исчезает тождественно. Остаются два уравнения, характеризующие смещение варьированной траектории относительно соответствующей траектории на поверхности, причем одно уравнение описывает смещение по нормали к поверхности, а второе — по вектору кривизны невозмущенной траектории. Эти оставшиеся уравнения также упрощаются. Из обоих уравнений выпадают члены, содержащие смещение по вектору кривизны ( $\delta t^2$ ) (это произошло потому, что невозмущенная траектория принадлежит семейству, на котором определено допустимое поле).

Итак, если на поверхности установлена характеристическая система координат и построено допустимое поле, то уравнения траекторий, близких к поверхности, принимают следующий вид (см. приложение):

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\xi}^3 + a\delta\dot{\xi}^3 + b_2\delta t^2 + A\delta\xi^3 &= 0, \\ \delta t^2 + a_3^2\delta\dot{\xi}^3 + b_3^2\delta t^2 + A_3^2\delta\xi^3 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

## § 2. Допустимые поля вблизи поверхности

В работе [1] для определения полей вне поверхности была поставлена задача Коши. Нас будет интересовать решение поставленной задачи в непосредственной близости от рассматриваемой поверхности.

Определим функцию  $U$  такую, что

$$\Delta U = 0, \quad U \Big|_{\xi^3=0} = L, \quad \frac{\partial U}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi^3=0} = M. \quad (8)$$

Решение с достаточной для наших целей точностью запишем в форме

$$U = \overset{\circ}{U}(\xi^1, \xi^2) + \frac{\xi^3}{1!} \overset{1}{U}(\xi^1, \xi^2) + \frac{(\xi^3)^2}{2!} \overset{2}{U}(\xi^1, \xi^2) + o[(\xi^3)^2].$$

Нетрудно видеть, что

$$\overset{\circ}{U}(\xi^1, \xi^2) = L, \quad \overset{1}{U}(\xi^1, \xi^2) = M$$

и определению, таким образом, подлежит только функция  $\overset{2}{U}$ . Рассмотрим уравнение Лапласа, которому должна удовлетворить функция  $U$

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left\{ \sqrt{G} G^{ij} \frac{\partial U}{\partial \xi^j} \right\} = 0. \quad (9)$$

Вычисляя компоненты метрического тензора  $G^{ij}$  при координации пространства (3), нетрудно убедиться, что  $G^{3\alpha} = 0$  и поэтому уравнение (9) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi^3} \left( \sqrt{G} G^{33} \right) \frac{\partial U}{\partial \xi^3} + \sqrt{G} G^{33} \frac{\partial^2 U}{\partial (\xi^3)^2} + \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \left( \sqrt{G} G^{\alpha\beta} \frac{\partial U}{\partial \xi^\beta} \right) = 0.$$

Рассматривая это последнее уравнение на поверхности (для этого  $\xi^3 \rightarrow 0$ ), получаем, что (см. приложение)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial (\xi^3)^2} \Big|_{\xi^3=0} \sqrt{g} - 2 \sqrt{g} H \frac{\partial U}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi^3=0} + \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \left( \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial U}{\partial \xi^\beta} \right) = 0.$$

Откуда следует равенство  $\overset{2}{U}(\xi^1, \xi^2) = 2HM - \Delta L$ .

Таким образом, решение задачи Коши (8) вблизи поверхности с точностью до величины третьего порядка малости представляется следующей формулой:

$$U = L + M\xi^3 + (2HM - \Delta L) \frac{(\xi^3)^2}{2!} + o[(\xi^3)^2].$$

Этой формулой можно воспользоваться для вычисления электрического и магнитного полей в области расположения приповерхностных траекторий. Далее по формулам (1) находятся величины  $\varphi_i$  и  $h^i$ , а также производные их по координатам. Все эти вычисления проведены в приложении. Найденные выражения подставляются вместо коэффициентов (7), после чего задачу описания траекторий, близких к поверхности с допустимым полем, можно считать решенной.

### § 3. Фокусировка пучков заряженных частиц, близких к поверхности

Для пучков, близких к поверхности, можно рассматривать различные задачи фокусировки. Например, можно рассматривать пучок, выходящий из некоторой точки поверхности, и требовать, чтобы он собирался (фокусировался) в некоторой другой точке этой поверхности. В по-

добной постановке задача фокусировки рассмотрена в работах [3]. Можно рассматривать пучок, выходящий из некоторой линии, лежащей на поверхности, и потребовать, чтобы он вновь собирался на некоторой линии, лежащей на поверхности. В этой задаче не требуется существования стигматического изображения точек, т. е. каждой точке линии-объекта может соответствовать кусок линии-изображения. В этом параграфе мы рассмотрим задачу отображения линии в линию с помощью пучка заряженных частиц и определим электромагнитное поле, необходимое для осуществления такого отображения.

Итак, пусть в пространстве заданы две произвольные непересекающиеся кривые. Натянем на эти кривые какую-нибудь поверхность. Выбор этой поверхности может определяться различными критериями. Это может быть прежде всего желаемое положение будущего пучка в пространстве. Если положение пучка в пространстве несущественно, то можно руководствоваться условием простоты и т. п. После выбора поверхности строим на ней однопараметрическое семейство кривых, причем так, чтобы как

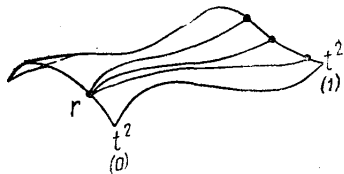


Рис. 1

кривая-объект, так и кривая-изображение, принадлежали семейству. Кривые этого семейства — суть кривые  $t^1 = \text{const}$  характеристической системы координат на поверхности. Строим, далее, семейство кривых  $t^2 = \text{const}$ , ортогональное построенному. Эти два однопараметрических семейства образуют координатную сеть на поверхности, причем последнее семейство будет семейством траекторий. По формулам (5) определяем допустимое поле для второго семейства кривых, при этом, как мы знаем, это поле определяется с известным произволом. Этим произволом можно воспользоваться, чтобы приповерхностный пучок, выходящий из первой заданной линии, фокусировался на второй. Прежде всего, так как не требуется стигматичности изображения, траектория, выходящая из точки  $r$  на начальной кривой, должна попасть в какую-нибудь точку на кривой-изображении, т. е. координата  $t^2$  конца траектории — произвольна (см. рис. 1). Но так как все траектории, выходящие из точки  $r$ , должны собраться на кривой-изображении, то этот произвол не должен влиять на координату  $\delta\xi^3$  конца траектории (для всех траекторий должно быть  $\delta\xi^3 = 0$  при  $t^1 = t^1$ ). Это требование проще всего осуществить, если из первого уравнения (7) убрать член, содержащий  $\delta t^2$ . Потребуем поэтому, чтобы

$$b_2 = 2\pi_{12}/\sqrt{g_{11}} + \sqrt{g} h^1 = 0. \quad (10)$$

Если требование (10) выполнено и хотя бы одна траектория, выходящая из точки  $r$  на кривой-объекте, попадает на кривую-изображение, то и все другие траектории, выходящие из точки  $r$ , попадают на кривую-изображение. В этом случае координата  $\delta\xi^3$  траектории описывается уравнением

$$\delta\ddot{\xi}^3 + a\delta\dot{\xi}^3 + A\delta\xi^3 = 0, \quad (11)$$

причем если траектория проходит через обе кривые объект и изображение, то к этому уравнению следует добавить условия

$$\delta\xi^3|_{t^1} = 0, \quad \delta\dot{\xi}^3|_{t^1} = 0. \quad (12)$$

Пусть  $\delta\xi^3$  решение уравнения (11), удовлетворяющее условиям (12), а  $\delta\xi^3_{(1)}$  — любое другое, независимое от  $\delta\xi^3_{(0)}$  решение. Тогда любое решение уравнения (11) можно представить в форме

$$\delta\xi^3 = C^0 \delta\xi^3_{(0)} + C^1 \delta\xi^3_{(1)}, \quad (13)$$

где  $C^0$  и  $C^1$  — произвольные постоянные. Рассмотрим произвольную траекторию, проходящую через кривую-объект. Эта траектория описывается равенством (13) при дополнительном условии  $\delta\xi^3/t^1 = 0$ . Но тогда из (13) следует, что  $C^1 = 0$  и, следовательно, рассматриваемая траектория проходит также через кривую-изображение, чем и доказывается наше утверждение. Таким образом, если нам удастся через каждую точку кривой-объекта провести хотя бы по одной траектории, пересекающей кривую-

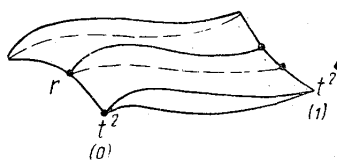


Рис. 2

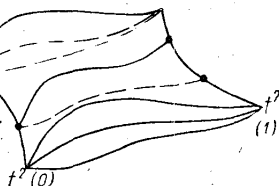


Рис. 3

изображение, то тогда любая траектория, выходящая из кривой-объекта, пересечет кривую-изображение.

Для решения задачи фокусировки проведем поверхность, весьма близкую к исходной поверхности и пересекающую ее по кривой-объекту и по кривой-изображению. Потребуем, чтобы на построенной поверхности лежали траектории. Это требование означает, что координата  $\delta\xi^3$  этих траекторий задана (так положение близкой поверхности при координате (3) задается уравнением  $\delta\xi^3 = \delta\xi^3(t^1, t^2)$ ), а координата  $\delta t^2$  произвольна и может быть определена посредством решения уравнения

$$\delta t^2 + b_2^2 \delta t^2 + A_3^2 \delta\xi^3 = 0. \quad (14)$$

(Отметим, что так как здесь развивается линейная теория, то на решении уравнения (14) следует наложить условие ограниченности.) Это требование означает также, что на построенной поверхности поля должны быть такими, чтобы лежащие на ней траектории могли иметь  $\delta\xi^3$  своей координатой. Мы удовлетворим этому требованию, воспользовавшись произволом в определении допустимых полей на исходной поверхности. Всюду на исходной поверхности должно иметь место равенство

$$A = -(\delta\xi^3 + a\delta\xi^3)/\delta\xi^3, \quad (15)$$

которое, как и (10), является уравнением для определения ранее произвольных функций  $h^3$  и  $\varphi_3$ . На кривых объекте и изображении уравнение (15) в силу условий (12) не имеет места и должно быть заменено следующим предельным (граничным) условием:

$$a|_{t^1(0)} = -\delta\xi^3/\delta\xi^3|_{t^1(0)}, \quad a|_{t^1(1)} = -\delta\xi^3/\delta\xi^3|_{t^1(1)} \quad (16)$$

Таким образом, рассмотренный вид фокусировки характеризуется уравнениями (10), (15) при дополнительном условии (16).

Задачу фокусировки можно решить исходя из других соображений. Рассмотрим с этой целью исходную систему уравнений (7). Как известно, общее решение этой системы можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \delta \xi^3 \\ \delta \dot{\xi}^3 \\ \delta t^2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x^1 \\ \dot{x}^1 \\ \dot{y}^1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x^2 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{y}^2 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} x^3 \\ \dot{x}^3 \\ \dot{y}^3 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где  $C_i$  — произвольные постоянные, а  $x^i, \dot{x}^i, \dot{y}^i$  образуют фундаментальную систему решений (при записи (17) учтено, что система (7) не содержит переменной  $\delta t^2$ ). Рассмотрим две траектории, выходящие из одной точки кривой-объекта и проходящие через кривую-изображение. Для этих траекторий на граничных кривых имеют место равенства

$$\delta \xi^3 \Big|_{t^1} = 0, \quad \delta \dot{\xi}^3 \Big|_{t^1} = 0 \quad (18)$$

(k) (0)                      (k) (1)

(индекс  $k=1$  соответствует первой траектории,  $k=2$  — второй). Принимая траектории, удовлетворяющие условиям (18), за первые два из фундаментальной системы решений, получаем, что любое решение можно представить в форме

$$\begin{pmatrix} \delta \xi^3 \\ \delta \dot{\xi}^3 \\ \delta t^2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \delta \xi^3 \\ \delta \dot{\xi}^3 \\ \delta t^2 \end{pmatrix}_{(1)} + C_2 \begin{pmatrix} \delta \xi^3 \\ \delta \dot{\xi}^3 \\ \delta t^2 \end{pmatrix}_{(2)} + C_3 \begin{pmatrix} x^3 \\ \dot{x}^3 \\ \dot{y}^3 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где  $x^3, \dot{x}^3, \dot{y}^3$  — любое третье независимое решение. Из равенств (19) немедленно следует, что всякая траектория, удовлетворяющая первому условию (18) (проходящая через упомянутую точку на кривой-объекте), описывается равенством

$$\begin{pmatrix} \delta \xi^3 \\ \delta \dot{\xi}^3 \\ \delta t^2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \delta \xi^3 \\ \delta \dot{\xi}^3 \\ \delta t^2 \end{pmatrix}_{(1)} + C_2 \begin{pmatrix} \delta \xi^3 \\ \delta \dot{\xi}^3 \\ \delta t^2 \end{pmatrix}_{(2)},$$

т. е. удовлетворяет и второму условию (18) (проходит через кривую-изображение). Этот вывод позволяет решить задачу фокусирования следующим образом. Проводим две поверхности, близкие к исходной и пересекающие последнюю по кривой-объекту и по кривой-изображению, и требуем, чтобы на построенных поверхностях лежали траектории пучка. Это значит, что на обеих поверхностях должны выполняться уравнения

$$\begin{aligned} \delta \xi^3_{(1)} + a \delta \dot{\xi}^3_{(1)} + b_2 \delta t^2_{(1)} + A \delta \xi^3_{(1)} &= 0, \\ \delta \xi^3_{(2)} + a \delta \dot{\xi}^3_{(2)} + b_2 \delta t^2_{(2)} + A \delta \xi^3_{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

В этих уравнениях величины  $\delta t^2$  следует считать выраженными соответственно из уравнения  $\delta t^2 + a_3^2 \delta \xi^3_{(k)} + b_2^2 \delta t^2_{(k)} + A_3^2 \delta \xi^3_{(k)} = 0$ .

Из уравнений (20) находим выражения для величин  $A$  и  $b_2$ , которые и дают искомую систему уравнений для определения  $h^3$  и  $\varphi_3$ :

$$A = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} d & \delta t^2 \\ (1) & (1) \\ d & \delta t^2 \\ (2) & (2) \end{vmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \delta \xi^3 & d \\ (1) & (1) \\ \delta \xi^3 & d \\ (2) & (2) \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Здесь

$$d = -\delta \xi^3_{(k)} - a \delta \xi^3_{(k)}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \delta \xi^3 & \delta t^2 \\ (1) & (1) \\ \delta \xi^3 & \delta t^2 \\ (2) & (2) \end{vmatrix}.$$

Аналогично рассмотренному выше случаю первое уравнение (21) на граничных кривых заменяется предельными соотношениями

$$\begin{vmatrix} d & \delta t^2 \\ (1) & (1) \\ d & \delta t^2 \\ (2) & (2) \end{vmatrix} \Big|_{t^1}^{t^1} = 0, \quad \begin{vmatrix} d & \delta t^2 \\ (1) & (1) \\ d & \delta t^2 \\ (2) & (2) \end{vmatrix} \Big|_{(1)}^{t^1} = 0.$$

Полученные условия фокусировки представляют систему уравнений с частными производными и в силу их громоздкости выписываются в приложении. Таким же методом можно рассматривать задачу получения стигматических приповерхностных пучков. В заключение автор выражает признательность Ю. Н. Днестровскому за просмотр рукописи и сделанные замечания.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Приводим формулы, связанные с координацией пространства, нормально связанной с координацией поверхности

$$\vec{R} = \vec{X}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \vec{q}(\xi^1, \xi^2).$$

Ковариантные компоненты координатных векторов:  $\vec{R}_1 = \vec{X}_1 + q_1 \xi^3$ ,  $\vec{R}_2 = \vec{X}_2 + q_2 \xi^3$ ,  $\vec{R}_3 = \vec{q}$ .

Контравариантные компоненты координатных векторов:

$$\vec{R}^\mu = \vec{X}^\mu + \xi^3 (2H \vec{X}^\mu - \epsilon^{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta} \pi_\nu^\beta \vec{X}^\alpha),$$

$$\vec{R}^3 = \vec{q}, \quad (\mu = 1, 2).$$

Метрический тензор пространства:

$$G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - 2\pi_{\alpha\beta} \xi^3,$$

$$G_{\alpha 3} = G^{\alpha 3} = 0, \quad G_{33} = G^{33} = 1,$$

$$G^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + \xi^3 (4H g^{\alpha\beta} - 2\epsilon^{\alpha\nu} \epsilon^{\beta\mu} \pi_{\nu\mu}).$$

Дискриминантный тензор пространства:

$$\epsilon^3_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} (1 - 2\xi^3 H), \quad G^3_{3i} = 0,$$

$$\epsilon^{\alpha}_{\beta 3} = \epsilon^{\alpha}_{\beta} + \xi^3 (2H \epsilon^{\alpha}_{\beta} - 2\epsilon^{\alpha\beta} \pi_{\beta\theta}),$$

$$\epsilon^{\alpha}_{33} = 0, \quad \sqrt{G} = \sqrt{g} (1 - 2H \xi^3).$$



Христоффели пространства:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^3 &= \pi_{\alpha\beta} - \chi_{\alpha\beta}\xi^3, & \Gamma_{3i}^3 &= 0, \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\mu &= \gamma_{\alpha\beta}^\mu - \xi^3\pi_{\alpha\beta}^\mu, & \Gamma_{33}^i &= 0, \\ \Gamma_{3\beta}^\mu &= -\pi_\beta^\mu - \xi^3(2H\pi_\beta^\mu - Kg_\beta^\mu).\end{aligned}$$

Все выписанные выше выражения имеют место с точностью до величин первого порядка по  $\xi^3$ . Они используются при получении уравнений в вариациях.

К выводу уравнений в вариациях. В согласии с формулой (3) имеем: радиус-вектор точек траектории лежащей на поверхности

$$\vec{R} = \vec{X}(\xi^\alpha(s)),$$

радиус-вектор точек варьированной траектории

$$\vec{R} = \vec{X}(\xi^\alpha + \delta\xi^\alpha) + \xi^3\vec{q}(\xi^\alpha + \delta\xi^\alpha).$$

или, с точностью до величин первого порядка по  $\delta\xi^\alpha$  ( $\xi^3$  — считается величиной того же порядка малости, что и  $\delta\xi^\alpha$ )  $\vec{R} = \vec{X}(\xi^\alpha) + \vec{X}_\beta\delta\xi^\beta + \vec{q}\xi^3$ .

Вдоль варьированной траектории

$$d\vec{R} = \vec{X}_\alpha d\xi^\alpha + \vec{X}_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta + \vec{X}_\beta d\delta\xi^\beta + \vec{q}_\alpha d\xi^\alpha \xi^3 + \vec{q} d\xi^3,$$

откуда следует формула

$$(ds)^2 = (ds)^2 + 2\gamma_{\alpha,\mu\nu} d\xi^\alpha d\xi^\mu \delta\xi^\nu + 2g_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\delta\xi^\beta - 2\pi_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \xi^3,$$

также формула (5а)

$$\frac{ds}{d\tau} = 1 - \gamma_{\alpha,\mu\nu} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\mu \delta\xi^\nu - g_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \delta\xi^\beta + \pi_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \xi^\beta \xi^3. \quad (*)$$

Формула (\*) позволяет вычислить величины

$$\frac{d\xi^i}{d\tau} = \dot{\xi}^i \frac{ds}{d\tau}, \quad \frac{d^2\xi^i}{d\tau^2} = \frac{d}{ds} \left( \dot{\xi}^i \frac{ds}{d\tau} \right) \frac{ds}{d\tau}.$$

Все остальные величины, входящие в уравнения (1), разлагаются в ряды по  $\delta\xi^\alpha$ ,  $\xi^3$  с точностью до первого порядка. Члены нулевого порядка выпадают из уравнений (1) в силу уравнений (4). Коэффициенты получаемого таким образом уравнения в вариациях имеют вид

$$b_\theta = -(\chi + \varphi_3) g_{\lambda\theta} \dot{\xi}^\lambda + \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}^\theta} (\chi - \varphi_3 - \varepsilon_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha h^\beta),$$

$$a = \varphi_\alpha \dot{\xi}^\alpha = \dot{\varphi},$$

$$B_\theta = -(\chi + \varphi_3) \gamma_{\lambda, \mu\theta} \dot{\xi}^\lambda \dot{\xi}^\mu + \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}^\theta} (\chi - \varphi_3 - \varepsilon_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha h^\beta),$$

$$A = K + \chi(\chi + \varphi_3) - 2H\varphi_3 + \frac{\partial}{\partial \xi^3} (\chi - \varphi_3 - \varepsilon_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha h^\beta),$$

$$e_\theta^\psi = g_\theta^\psi - \dot{\xi}^\psi g_{\alpha\theta} \dot{\xi}^\alpha,$$

$$a_3^\theta = \dot{\xi}^\theta (\chi + \varphi_3) - 2\pi_\beta^\theta \xi^\beta + \varepsilon_{\beta\theta} h^\beta,$$

$$\begin{aligned}b_\alpha^\theta &= -\dot{\xi}^\theta (2\gamma_{\lambda, \mu\alpha} \dot{\xi}^\lambda \dot{\xi}^\mu + e_\alpha + 2\dot{\gamma}_{\lambda\alpha} \dot{\xi}^\lambda g_{\mu\alpha} \dot{\xi}^\mu - \varphi_2) - g_{\mu\alpha} \dot{\xi}^\mu (2e^\theta - \varepsilon_{\beta\theta} \dot{\xi}^\beta h^\beta) + \\ &+ 2\gamma_{\lambda\alpha}^\theta \dot{\xi}^\lambda - \varepsilon_{\alpha\theta} h^\beta + g_{\alpha\theta}^\beta \dot{\xi}^\lambda,\end{aligned}$$

$$e^\psi = \varepsilon_{\mu}^{\psi} \dot{\xi}^{\mu} (h^3 + \varepsilon_{\cdot 0}^{\lambda} \dot{\xi}^{\nu} \varphi_{\lambda}),$$

$$A_3^0 = \dot{\xi}^0 \left( \pi_{\alpha\beta\gamma} \dot{\xi}^{\alpha} \dot{\xi}^{\beta} \dot{\xi}^{\gamma} + 2\pi_{\alpha\beta} e^{\alpha} \dot{\xi}^{\beta} + 2\varphi_{\alpha} \dot{\xi}^{\alpha} \chi + \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial \xi^3} \dot{\xi}^{\alpha} \right) + 2e^0 \chi - \pi_{\alpha\beta} \dot{\xi}^{\alpha} \dot{\xi}^{\beta} - \varepsilon_{\beta}^0 \dot{\xi}^{\beta} h^3 \chi -$$

$$- \varepsilon_{\beta}^0 \dot{\xi}^{\beta} \frac{\partial h^3}{\partial \xi^3} - g^{\theta\alpha} \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial \xi^3} - 2(H \varepsilon_{\beta}^0 - \varepsilon^{\theta\lambda} \cdot \pi_{\lambda\beta}) \dot{\xi}^{\beta} h^3 - 2(2H g^{\theta\alpha} - \varepsilon^{\theta\lambda} \varepsilon^{\alpha\nu} \pi_{\lambda\nu}) \varphi_{\alpha},$$

$$B_6^{\psi} = -\dot{\xi}^{\psi} \left\{ \frac{\partial \gamma_{\alpha, \mu\theta}}{\partial \xi^{\lambda}} \dot{\xi}^{\alpha} \dot{\xi}^{\mu} \dot{\xi}^{\nu} + (\gamma_{\alpha, \mu\theta} + \gamma_{\mu, \alpha\theta}) (-\gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} \dot{\xi}^{\beta} \dot{\xi}^{\nu} + e^{\alpha}) \dot{\xi}^{\mu} + \right.$$

$$+ 2\varphi_{\alpha} \dot{\xi}^{\alpha} \gamma_{\lambda, \mu\theta} \dot{\xi}^{\lambda} \dot{\xi}^{\mu} - \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial \xi^{\theta}} \dot{\xi}^{\alpha} \left. \right\} - 2e^{\psi} \gamma_{\alpha, \lambda\theta} \dot{\xi}^{\alpha} \dot{\xi}^{\lambda} + \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}^{\psi}}{\partial \xi^{\theta}} \dot{\xi}^{\alpha} \dot{\xi}^{\beta} -$$

$$+ \varepsilon_{\beta}^{\psi} \dot{\xi}^{\beta} h^3 \gamma_{\alpha, \mu\theta} \dot{\xi}^{\alpha} \dot{\xi}^{\mu} - \frac{\partial \varepsilon_{\beta}^{\psi}}{\partial \xi^{\theta}} \dot{\xi}^{\beta} h^3 - \varepsilon_{\beta}^{\psi} \dot{\xi}^{\beta} \frac{\partial h^3}{\partial \xi^{\theta}} - \frac{\partial g^{\psi\alpha}}{\partial \xi^{\theta}} \varphi_{\alpha} - g^{\psi\alpha} \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial \xi^{\theta}}.$$

В характеристической системе координат эти коэффициенты записываются в форме

$$a = \varphi = \varphi_1 / \sqrt{g_{11}}, \quad b_2 = 2\pi_{12} / \sqrt{g_{11}} + \sqrt{g} h^1,$$

$$A = K + (\chi + \varphi_3) \chi - 2H\varphi_3 - \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi^3} - \sqrt{g_{22}} \frac{\partial h^2}{\partial \xi^3},$$

$$b_2^2 = \left( \varphi_1 + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial t^1} \right) \frac{1}{\sqrt{g_{11}}},$$

$$a_3^2 = -\frac{1}{g_{22}} \left( \frac{2\pi_{12}}{\sqrt{g_{11}}} + \sqrt{g} h^1 \right) = -\frac{b_2}{g_{22}},$$

$$A_3^2 = -\frac{\pi_{11}^2}{g_{11}} + \frac{h^3 \pi_{11}}{g_{11} \sqrt{g_{22}}} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial h^3}{\partial \xi^3} - \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi^3} -$$

$$- 2 \left( \frac{\pi_{11}}{\sqrt{g}} - \frac{H \sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \right) \frac{h^3}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{2\pi_{11}\varphi_2}{g} - \frac{2\pi_{12}\varphi_1}{g}.$$

В выписанные значения коэффициентов входят производные  $\frac{\partial h^i}{\partial \xi^3}$ ,  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi^3}$ , значения которых можно найти если воспользоваться формулами второго параграфа. При этом получаются следующие выражения:

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi^3} = 2H\varphi_3 - 2(\varphi_3)^2 - \frac{\Delta\Phi}{(2)} / (2\Phi \sqrt{g}),$$

$$\frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial \xi^3} = \frac{\partial \varphi^3}{\partial t^{\alpha}},$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial \xi^3} = \frac{e}{mc \sqrt{2\Phi}} \left( 2H\Psi_3 - \Psi_3\varphi_3 - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\Delta\Psi}{(2)} \right),$$

$$\frac{\partial h^2}{\partial \xi^3} = 4H \frac{h_2}{g_{22}} - 2\varepsilon^{2\varphi} \varepsilon^{\beta\psi} \pi_{\varphi\psi} h_{\beta} + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3},$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} = \frac{\partial h_3}{\partial t^2} + h_3\varphi_2 - h_2\varphi_3.$$

Полученные выражения позволяют выписать уравнения фокусировки (10), (15), (17)

$$\frac{2\pi_{12}}{\sqrt{g_{22}}} \sqrt{2\Phi} + \frac{\partial \Psi}{\partial t^1} = 0,$$

$$A = P + \frac{1}{4g_{22}\Phi^2} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t^2} \right)^2 + \frac{1}{2g_{22}\Phi} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial t^2} \right)^2 - \frac{2\pi_1^1}{\sqrt{2\Phi}\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial\Psi}{\partial t^2} +$$

$$+ \frac{1}{2\Phi\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t^1} \left( \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial\Phi}{\partial t^1} \right) = - \left( \delta_5^3 + \frac{\delta_5^3}{2\Phi\sqrt{g_{11}}} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial t^1} \right) / \delta_5^3.$$

$$P = 2\pi_2^1\pi_1^2 + 2(\pi_1^1)^2 - K + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial\gamma}{\partial t^2},$$

$$\delta_5^3 + \frac{\delta_5^3}{2\Phi\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial\Phi}{\partial t^1} \Big|_{(0),(1)}^{t^1 t^1} = 0.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пытьев Ю. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрономия, № 6, 1961.
2. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей, тт. 1, 2. ОГИЗ, ГТТИ, М. — Л., 1947.
3. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1948.

Поступила в редакцию  
5. 7 1961 г.

Кафедра  
математики физического  
факультета