

Н. И. КОЛОСНИЦЫН

## НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ИМПУЛЬСНОГО УСКОРИТЕЛЯ ПЛАЗМЫ

Рассматривается импульсное ускорение идеально проводящей плазмы методом «толкающего» магнитного поля, заключающегося в том, что последнее вытесняет плазму в вакуум, действуя на него как своего рода поршень (магнитный поршень). Подобное ускорение осуществляется, например, с помощью двух параллельных шин, между которыми происходит разряд. Оценивается к. п. д. такой схемы; под к. п. д. понимаем отношение кинетической энергии направленного движения газа  $E$  к вложенной электромагнитной энергии  $A$ .

Поскольку плазма предполагается идеально проводящей, магнитное поле воздействует на нее как непроницаемый поршень. Для реальной плазмы, обладающей всегда конечной проводимостью, представление о таком поршне справедливо при выполнении условия [1]

$$Nq \gg 1, \quad (1)$$

где  $N$  — число ионов, приходящихся на  $1 \text{ см}^2$  поверхности поршня;  $q$  — сечение элементарного процесса, ответственного за передачу импульса от токнесущего компонента нейтральным частицам.

Рассмотрим следующую схему одномерного ускорения газа непроницаемым поршнем. Имеется труба, заполненная газом плотностью  $\rho_n$ , ось которой принимаем за  $x$ , с концом в точке  $x=0$  и началом, закрытым поршнем, в точке  $x=-l$ . Пусть с момента времени  $t=-t_0$  поршень начинает двигаться с постоянной скоростью  $u_0$ , большей скорости звука  $c_1$  в покоящемся газе. Перед поршнем со скоростью  $D$  распространяется ударная волна, которая достигает конца трубы в момент  $t=0$ , выбираемый за начало отсчета. Полагаем, что с этого момента сжатый ударной волной газ истекает в вакуум. Ускорение газа прекращается в тот момент  $t=t_2$ , когда поршень достигает конца трубы. Найдем к. п. д. данной схемы.

Ускорение газа производится в два этапа: в первом газ сжимается ударной волной, бегущей перед поршнем; во втором сжатый газ, подталкиваемый поршнем, истекает в вакуум. Параметры газа, сжатого ударной волной, рассчитываются по известным соотношениям для скачков на фронте ударной волны [2]. Истечение газа в вакуум представляет собой волну разряжения, распространяющуюся навстречу поршню

и описываемую известным решением уравнений газовой динамики

$$\begin{aligned} x &= (u - c)t, \\ u &= u_0 + \frac{2}{\gamma - 1} (c_0 - c). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $c_0$  — скорость звука в газе за фронтом ударной волны. Если скорость поршня близка к звуковой, то помимо волны разрежения появляется отраженная. Последняя описывается общим решением уравнений газовой динамики [2], которое в явном виде можно записать только для атомарного газа в координатах  $c$  и  $t$ :

$$\begin{aligned} x &= -l_0 + u_0 t + \sqrt{c^2 + c_0^2 - \frac{2t}{l_0} c^3 \left( 3t - \frac{l_0}{c} \right)}, \\ u &= u_0 + 3 \sqrt{c^2 + c_0^2 - \frac{2t}{l_0} c^3}. \end{aligned} \quad (3)$$

К решениям (2) и (3) следует добавить соотношения на поршне и линии сопряжения волны разрежения с отраженной. Имеем соответственно

$$\frac{c_0 t}{l_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-1/5} + \frac{1}{2} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-3/5}, \quad (4)$$

$$t = \frac{l_0 c_0}{c^2}, \quad (5)$$

где  $l_0$  — длина ускоряющего участка в момент времени  $t=0$ . Используя решения (2) и (3), соотношения (4) и (5) и соотношения для скачков параметров на фронте прямой ударной волны в атомарном газе, можно найти кинетическую энергию  $E$  и работу поршня  $A$  и, следовательно, к. п. д. поршня  $\eta$ . Имеем

$$\eta = \frac{E}{A} = \frac{\frac{m_1 \bar{u}^2}{2} + \frac{m_2}{2} (u_m^2 - 4,8 u_m c_2 + 6c_2^2)}{p_0 u_0 t_0 + p_2 u_0 t_2 + \frac{15}{8} \frac{l_0}{c_0} u_0 p_0 - \frac{5}{8} \frac{l_0 p_0 u_0}{c_0} \left[ \left( \frac{p_2}{p_0} \right)^{4/5} + 2 \left( \frac{p_2}{p_0} \right)^{2/5} \right]}. \quad (6)$$

Входящие в формулу (6) величины определяются из соотношений

$$p_0 = 0,15 \rho_1 c_1^2 \left[ 5 \left( \frac{D}{c_1} \right)^2 - 1 \right];$$

$$D = \frac{2}{3} u_0 + \sqrt{\frac{4}{9} u_0^2 + c_1^2};$$

$$\frac{p_2}{p_0} = \left[ \sqrt[3]{\frac{c_0}{u_0} + \sqrt{\left( \frac{c_0}{u_0} \right)^2 + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{c_0}{u_0} - \sqrt{\left( \frac{c_0}{u_0} \right)^2 + \frac{1}{27}}} \right]^{-5};$$

$$c_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}; \quad \rho_0 = 4 \rho_1 \frac{M'^2}{M'^2 + 3}; \quad M' = \frac{D}{c_1}; \quad (7)$$

$$u_m = u_0 + 3c_0; \quad \bar{u} = u_0 + 3 \sqrt{c^2 + c_0^2 - \frac{2t}{l_0} c^2}; \quad \bar{c} = \frac{c_2 + c_3}{2};$$

$$c_2 = \sqrt{c_0 u_0}; \quad c_3 = c_0 \left( \frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{5}{2}};$$

$$m_1 = \rho_1 l \left( 1 - \frac{u_0}{c_0} \right); \quad m_2 = \rho_1 l \frac{u_0}{c_0}.$$

Величина  $\bar{u}$  является приближенной; вносимая ею ошибка не превышает 0,01%. С помощью соотношений (7) можно показать, что  $\eta$  зависит только от числа Маха  $M = \frac{u_0}{c_1}$ .

Формула (6) справедлива в тех случаях, когда присутствует отраженная волна. При достаточно быстром движении поршня перед ним распространяется сильная ударная волна, скорость звука которой за фронтом находится по формуле

$$c_0 \cong \sqrt{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} u_0.$$

Так как  $\gamma < 2$ , то  $c_0 < u_0$ , и, следовательно, поршень приходит к концу трубы раньше, чем волна разрежения, распространяющаяся со звуковой скоростью  $c_0$ , достигает поршня и отраженная волна не возникает. Отсутствие отраженной волны упрощает расчет кинетической энергии газа  $E$  и работы поршня  $A$ , которые возможно найти для газа с любым  $\gamma$  с помощью решения (2) и соотношений на ударной волне. Приведем результаты

$$\eta = \frac{\gamma}{\gamma+1} + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)(3\gamma+1)} \sqrt{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}. \quad (8)$$

При  $\gamma = 5/3$  (атомарный газ),  $\eta = 0,725$ . Полученное в формуле (8) значение является пределом, к которому стремится к. п. д. при неограниченном увеличении скорости поршня.

Импульс поршня (на единицу поверхности) находим из соотношения  $I = \frac{A}{u_0}$ . Используя найденное ранее  $A$  для случая неионизированного газа, получаем

$$I = \begin{cases} \rho_0 l_0 + \rho_2 l_2 + \frac{15}{8} \frac{l_0}{c_0} p_0 - \frac{5}{8} \frac{l_0}{c_0} p_0 \left[ \left( \frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{4}{5}} + 2 \left( \frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{2}{5}} \right] & \text{при } u_0 \ll c_0 \\ \frac{\rho_0 l}{u_0} = 1,33 m u_0 & \text{при } u_0 \geq c_0 \end{cases}$$

При большой скорости поршня следует учесть диссоциацию, ионизацию и возбуждение молекул и атомов ударной волной. Для атомарного газа достаточно учесть ионизацию, пренебрегая возбуждением атомов, так как уровни возбуждения близки к потенциалу ионизации [3].

Методика расчета ударной волны с учетом указанных диссипативных процессов [4, 5] заключается в том, что параметры газа за фронтом ударной волны при заданном давлении можно найти по температуре, которая определяется по точке пересечения кривых внутренних энергий. Находим их двумя независимыми путями: статистическим методом и из соотношений на ударной волне.

В рассматриваемом случае к соотношениям на ударной волне добавляется условие

$$u_1 - u_2 = u_0. \quad (9)$$

Это условие вместе с выражением для степени ионизации атомарного газа  $\alpha$ , определяемого из уравнения Саха, и соотношениями между скачками параметра ударной волны позволяет найти в неявном виде связь между давлением  $p$  и температурой  $T$  газа за фронтом ударной волны.

Откуда 
$$\lambda^3 + \left(\frac{1}{a} - 2b\right)\lambda^2 + \left(b^2 - \frac{2b}{a}\right)\lambda + \frac{b^2 - \mu^2}{a} = 0, \quad (10)$$

где

$$\lambda = \frac{p}{p_1}, \quad \mu = \frac{T}{T_1}, \quad a = \frac{p_1}{(kT_1)^2} \left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\mu^{\frac{5}{3}}} \exp \frac{\Delta \epsilon}{kT_1} \frac{1}{\mu}, \quad b = \lambda + \mu + 1,$$

$\Delta \epsilon$  — потенциал ионизации.

Таким образом, благодаря условию (9) получаем соотношение (10), которое позволяет определить давление, оставшееся, по методике [4], произвольным. По известным давлению и температуре определяются все параметры сжатого ударной волной газа.

Точно описать истечение ионизированного газа в вакуум трудно даже в наиболее простом случае атомарного газа. Нами рассматривается приближение, которое можно назвать «изэнтропическим». Оно состоит в том, что истечение ионизированного газа в вакуум заведомо неизэнтропичное, рассматривается как изэнтропичное с показателем изэнтропы  $\gamma$ , определяемым через рассчитанные: давление газа  $p_0$ , плотность  $\rho_0$  и внутреннюю энергию  $E$  посредством соотношения, связывающего эти четыре величины в идеальном газе. Находимое, таким образом,  $\gamma$  близко к точному значению, рассчитанному в работе [5]. Согласно предположениям об изэнтропичности истечения газа и быстрым движении поршня к. п. д. следует находить по формуле (8). Зависимость к. п. д. от скорости движения поршня (в числах Маха  $M$ ) рассчитана для случая, когда атомарным газом является водород (плотность частиц  $n = 10^{17} \frac{1}{\text{см}^3}$ , начальные температуры 300 и 500° К), и представлена на рис. 1. При числе Маха  $M$ , близком к единице,  $\eta \approx 1$ . С ростом  $M$   $\eta$  уменьшается, приближаясь к своему предельному значению, определяемому формулой (8).

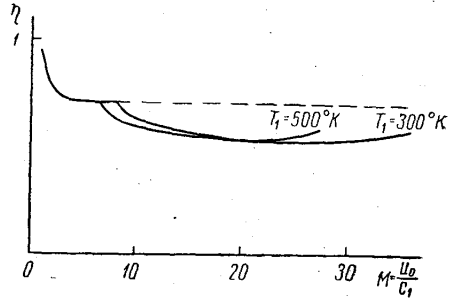


Рис. 1

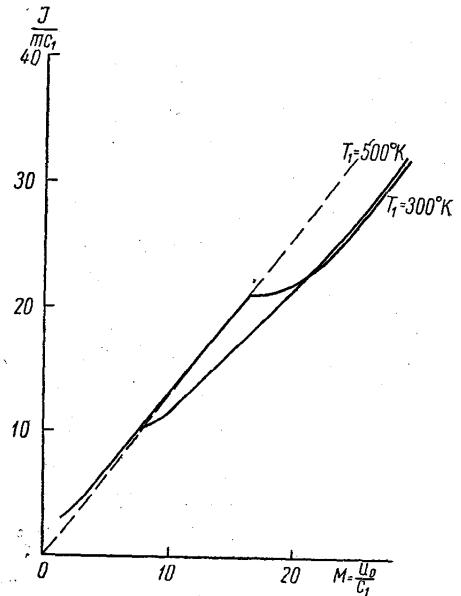


Рис. 2

С дальнейшим увеличением  $M$  к. п. д. вновь уменьшается вследствие ионизации газа. Когда ионизация газа достигает 100%, к. п. д. принимает

минимальное значение и с последующим ростом  $M$  увеличивается до предельного значения для неионизированного газа, которое, однако, не может быть достигнуто вследствие роста потерь на излучение. Как видно из рис. 1, более высокие начальные температуры газа смещают область уменьшения к. п. д. вследствие ионизации в сторону меньших значений  $M$ .

На рис. 2 показана зависимость импульса поршня (в единицах  $mc_1$ ) от числа  $M$ , рассчитанная для газа с теми же параметрами. Кривая импульса отклоняется от кривой для неионизированного газа в сторону меньших значений, стремится к ней при достижении полной ионизации, так же как кривая к. п. д. стремится к предельному значению для ионизированного газа, но не достигает ее по той же причине. Влияние начальной температуры газа на кривые импульса подобно влиянию на кривые к. п. д.

Из рис. 1 и 2 видно, что наиболее выгодным режимом ускорения является «медленное» движение поршня ( $M = 1, \alpha = 0$ ). Возвращаясь к исходному положению о том, что поршень является магнитным, мы видим, что при ускорении плазмы магнитным полем к. п. д. должен быть меньше рассчитанного, вследствие заполнения магнитным полем объема вытесняемой плазмы. Можно показать, что в случае быстро движущегося поршня (когда отсутствует отраженная волна) энергия этого магнитного поля равна работе поршня. Поэтому к. п. д. магнитной ускоряющей схемы  $\eta'$  вдвое меньше к. п. д. поршня  $\eta$ :

$$\eta' = \frac{\eta}{2}.$$

В реальной плазме, обладающей конечной проводимостью, магнитное поле будет проникать за фронт магнитного поршня, производя нагрев и разгон плазмы. Выделяющееся тепло  $Q$  и магнитную энергию  $W$ , проникающую в плазму, можно оценить по результатам работы [6]. После некоторых упрощений получаем

$$Q = H_0^2 \sqrt{\kappa t} \int_0^{\infty} \Phi_1^2(y) dy = 0,792 H_0^2 \sqrt{\kappa t},$$

$$W = H_0^2 \sqrt{\kappa t} \int_0^{\infty} \text{erf}^2(y) dy = 0,326 H_0^2 \sqrt{\kappa t},$$

где  $H_0$  — напряженность магнитного поля на границе плазмы. Рассмотренная выше схема ускорения плазмы справедлива (помимо приведенного выше условия (1)) при выполнении условия

$$Q + W \ll Em, \quad (11)$$

которое выполнимо при соответствующих значениях проводимости плазмы  $\sigma$  и массы газа  $m$ . С учетом начальной индуктивности  $L_0$  к. п. д. магнитной схемы ускорения газа представляется в виде

$$\eta' = \frac{\eta}{2 + \frac{L_0 I^2}{2A}},$$

где  $I$  — сила тока.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. К. П. Станюковичу и М. И. Киселеву за руководство работой и полезные советы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Брагинский С. И., Мигдал А. Б. Физика плазмы, т. 2. Изд-во АН СССР, 1958, стр. 20.
2. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения газа. Гостехтеориздат, М., 1955.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Гостехиздат, М., 1951, стр. 196.
4. Баум Ф. А., Каплан С. А., Станюкович К. П. Введение в космическую физику. Физматиздат, М., 1958.
5. Прокофьев В. А. «Уч. зап. МГУ», вып. 172, механика, 79, 1954.
6. Левитин Л. Б., Станюкович К. П. ДАН СССР, 134, № 2, 360, 1960.

Поступила в редакцию  
9. 11 1961 г.

Кафедра  
статистической физики  
и механики