Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1962

Ю. П. РЫБАКОВ

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

На основе обобщения теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости на случай распределенных систем развивается общий метод исследования устойчивости решений нелинейных уравнений поля. Полученным методом исследуется устойчивость частицеподобных решений нелинейного уравнения скалярного поля.

Среди уравнений, рассматриваемых современной теорией поля, особое место занимают нелинейные уравнения. Их особенность заключается в том, что в ряде случаев они имеют так называемые частицеподобные, т. е. регулярные и квадратично интегрируемые решения. Распределение поля, даваемое этими решениями, рассматривается рядом авторов как отображающее структуру элементарных частиц [1].

Однако для того чтобы эти решения описывали реальный элементарный объект, они прежде всего должны отражать сам факт существования этого объекта, в связи с чем и возникает необходимость исследовать частицеподобные решения на устойчивость по отношению к малым возмущениям. Это исследование должно выяснить: как будет меняться решение со временем, если в начальный момент оно было немного искажено; сохранит ли оно свою частицеподобность и т. д.

Для выяснения этих вопросов можно было бы рассматривать уравнения для возмущения поля, однако даже в линейном приближении это сопряжено с большими математическими трудностями. Поэтому представляет интерес прямой метод исследования устойчивости — метод А. М. Ляпунова, предложенный им, правда, для сосредоточенных систем (с конечным числом степеней свободы). Но форма этого метода такова, что его можно обобщить и на случай распределенных систем (с бесконечным числом степеней свободы).

Обобщение теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости на случай распределенных систем

Дадим сначала математическое определение устойчивости решения уравнений поля. Пусть $\psi_0(\vec{r}, t)$ — исследуемое решение. Предположим, что в начальный момент времени $t = t_0$ заданы произвольная функция $\psi(\vec{r}, t_0)$ и (если уравнения второго порядка по времени) ее производная по времени $\dot{\psi}_0(\vec{r}, t_0)$, достаточно мало отличающиеся соответственно от $\psi_0(\vec{r}, t_0)$ и $\dot{\psi}_0(\vec{r}, t_0)$. Тогда решение $\psi_0(\vec{r}, t)$ мы будем называть устойчивым, если для любого числа $A > 0$ можно указать такое число $\lambda > 0$, что при любых начальных возмущениях $\psi(\vec{r}, t_0) - \psi_0(\vec{r}, t_0) = \xi(\vec{r}, t_0) \equiv \xi_0$ и $\dot{\psi}(\vec{r}, t_0) - \dot{\psi}_0(\vec{r}, t_0) = \eta(\vec{r}, t_0) \equiv \equiv \eta_0$, удовлетворяющих условию $\int d\tau \{|\eta_0|^2 + |\xi_0|^2\} < \lambda$, для любого $t \geqslant t_0$ будет справедливо неравенство $\int d\tau \{|\eta|^2 + |\xi|^2\} < A$, где $d\tau$ — элемент объема. Это определение является непосредственным обобщением определения устойчивости по Ляпунову, в котором $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ заменена на $\int d\tau \{|\eta|^2 + |\xi|^2\}$ ([2], стр. 15).

Теперь обобщим теорему А. М. Ляпунова об устойчивости, сформулировав ее следующим образом.

Теорема. Если уравнения для возмущения поля таковы, что существует знакоопределенный функционал V, производная которого в силу этих уравнений $\frac{dV}{dt}$ была бы знакопостоянным функционалом противоположного V знака или тождественно равна нулю, то невозмущенное решение уравнений поля устойчиво.

В качестве функционала Ляпунова мы будем рассматривать функционал вида

$$V(t;\ \xi, \eta) = \int d\tau\, \mathrm{V}[\vec{r}, t;\ \xi, \eta],$$

где $\mathrm{V}[\vec{r}, t;\ \xi, \eta]$ — некоторая непрерывная функция как самого возмущения, так и его производных, порядок которых зависит от рассматриваемых уравнений поля. При этом, чтобы выполнялось условие $V(t;\ 0, 0) = 0$, потребуем, чтобы $\mathrm{V}[\vec{r}, t;\ 0, 0] = 0$. Далее, функционал $V_0 \equiv V(t_0;\ \xi_0, \eta_0)$ должен допускать бесконечно малый высший предел, т. е. для любого числа $l > 0$ должно существовать такое $\lambda > 0$, что при $\int d\tau \{|\eta_0|^2 + |\xi_0|^2\} < \lambda$ всегда имеет место $|V_0| < l$. Этим свойством функционал V_0 будет, очевидно, обладать в силу непрерывности функции V.

На основании сделанных предположений теорема об устойчивости может быть доказана обычным способом ([2], стр. 20). Теперь применим полученную теорему к конкретному случаю — нелинейному уравнению скалярного поля.

Исследование устойчивости частицеподобных решений нелинейного уравнения скалярного поля

Исходим из полевого гамильтониана

$$H = \dot{\psi}\dot{\psi}^* + \nabla\psi\nabla\psi^* + m^2\left[\psi\psi^* - \frac{\lambda}{2}(\psi\psi^*)^2\right],$$

которому соответствует уравнение движения для ψ

$$\ddot{\psi} = \nabla^2\psi - m^2[\psi - \lambda(\psi^*\psi)\psi].$$

Как показано в работе [1], это уравнение имеет частицеподобные решения вида $\psi_0 = u(r)e^{i\varepsilon t}$, если $\varepsilon < m$. Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ возмущенное решение $\psi(\vec{r}, t)$ мало отличается от ψ_0, тогда естественно искать его в виде $\psi = \varphi(\vec{r}, t)\, e^{i\varepsilon t}$, где $\varphi(\vec{r}, t) = u(r) + y(\vec{r}, t)$. При этом φ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\varphi} + 2i\varepsilon\dot{\varphi} = \nabla^2\varphi + \varphi\,[\varepsilon^2 - m^2 + \lambda m^2 \varphi^*\varphi].$$

Уравнение же для y получается, если принять во внимание, что $\nabla^2 u + u\,[\varepsilon^2 - m^2 + \lambda m^2 u^2] = 0$. Теперь, согласно теореме А. М. Ляпунова, мы должны найти такой функционал V, который обращался бы в нуль при $y = 0$ и производная которого в силу уравнения для возмущения y была бы неположительна, т. е. $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$.

Первое требование мы выполним, если будем искать наш функционал в виде разности $V = \int d\tau \{f[\varphi] - f[u]\}$. Заметим, что u не зависит от времени, и поэтому при вычислении $\frac{dV}{dt}$ второе слагаемое не играет никакой роли. Чтобы функционал удовлетворял и второму требованию $\left(\frac{dV}{dt} \leqslant 0\right)$, он должен обладать свойствами гамильтониана рассматриваемой системы (или интеграла движения) [3].

Выберем поэтому функционал V следующим образом:

$$V = \frac{1}{2}\int d\tau \left\{ |\dot{\varphi}|^2 + |\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2 \left(m^2 - \varepsilon^2 - \frac{1}{2}\lambda m^2 |\varphi|^2\right)\right\} -$$

$$- \frac{1}{2}\int d\tau \left\{ (\nabla u)^2 + u^2 \left(m^2 - \varepsilon^2 - \frac{1}{2}\lambda m^2 u^2\right)\right\}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что $\frac{dV}{dt} \equiv 0$. Так как наши рассуждения совершенно не зависели от конкретного вида нелинейности в уравнениях поля, то можно утверждать, что в общем случае нелинейного скалярного поля, описываемого гамильтонианом

$$H = \dot{\psi}\dot{\psi}^* + \nabla\psi\nabla\psi^* + m^2\,[\psi\psi^* - F(\psi\psi^*)],$$

функционал Ляпунова будет иметь вид

$$V = \frac{1}{2}\int d\tau \left\{ |\dot{\varphi}|^2 + |\nabla\varphi|^2 + (m^2 - \varepsilon^2)|\varphi|^2 - m^2 F(|\varphi|^2)\right\} -$$

$$- \frac{1}{2}\int d\tau \left\{ (\nabla u)^2 + (m^2 - \varepsilon^2)\, u^2 - m^2 F(u^2)\right\}.$$

Однако частицеподобные решения известны пока только для случая $F(v) = \frac{\lambda}{2} v^2$, который мы и будем рассматривать в дальнейшем. Теперь, чтобы вынести окончательное заключение об устойчивости исследуемого решения, мы должны убедиться в том, что функционал V вблизи своей нулевой точки является положительно-определенным. «Кинетическая» часть этого функционала $V_{\text{кин}} = \frac{1}{2}\int d\tau\, |\dot{\varphi}|^2$, очевидно, является положительно-определенной, поэтому остается исследовать его «потенциальную» часть $V_{\text{пот}} = W[\varphi] - W[u]$, где

$$W[\varphi] = \frac{1}{2}\int d\tau \left\{ |\nabla\varphi|^2 + (m^2 - \varepsilon^2)|\varphi|^2 - \frac{1}{2}\lambda m^2 |\varphi|^4\right\}.$$

Задача сводится, таким образом, к исследованию стационарных точек функционала $W[\varphi]$. Полагая $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, можно получить следующие уравнения Эйлера—Лагранжа для искомых экстремалей u_1 и u_2:

$$\nabla^2 u_i = (m^2 - \varepsilon^2) u_i - \lambda m^2 (u_1^2 + u_2^2) u_i, \qquad i = 1,\ 2.$$

Сферически симметричное решение этих уравнений имеет вид

$$u_1(r) = \sqrt{1 - c^2}\,u; \quad u_2(r) = c\,u; \quad c = \text{const}.$$

Значение $C = 0$ соответствует исследуемому частицеподобному решению $(\varphi = u)$. Для устойчивости этого решения необходимо, чтобы оно давало минимум функционалу $W = \int d\tau\, \mathrm{W}[\varphi]$. Необходимое условие минимума (условие Лежандра, [4], стр. 82) здесь выполняется, так как

$$\left.\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial (\nabla\varphi_1)^2}\right|_{\varphi=u} = \left.\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial (\nabla\varphi_2)^2}\right|_{\varphi=u} = 1 > 0; \quad \left.\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial (\nabla\varphi_1)\,\partial (\nabla\varphi_2)}\right|_{\varphi=u} = 0.$$

Остается проверить выполнение достаточных условий минимума. Однако в вариационном исчислении при формулировке достаточных условий экстремума различают экстремум сильный и слабый в зависимости от того, являются ли рассматриваемые возмущения малыми только по величине или же еще и по первой производной. Исследуем поэтому наш функционал W сначала на слабый минимум, для чего рассмотрим его вторую вариацию

$$\delta^2 W = \int d\tau \{(\nabla\xi_1)^2 + (\nabla\xi_2)^2 + (m^2 - \varepsilon^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2) - \lambda m^2 u^2 (3\xi_1^2 + \xi_2^2)\} \equiv K[\xi_1, \xi_2],$$

где

$$\xi_i = \varphi_i - u_i, \qquad i = 1,\ 2.$$

Полученный функционал K в свою очередь исследуем на экстремум. Тогда экстремали v_1 и v_2 будут удовлетворять следующим уравнениям, называемым уравнениями Якоби:

$$\nabla^2 v_1 = (m^2 - \varepsilon^2) v_1 - 3\lambda m^2 u^2 v_1;$$

$$\nabla^2 v_2 = (m^2 - \varepsilon^2) v_2 - \lambda m^2 u^2 v_2.$$

Эти уравнения в сферически-симметричном случае приводятся к виду

$$\frac{d^2 z_1}{d\rho^2} = z_1\left(1 - 3\frac{z^2}{\rho^2}\right); \tag{1}$$

$$\frac{d^2 z_2}{d\rho^2} = z_2\left(1 - \frac{z^2}{\rho^2}\right), \tag{2}$$

где

$$z_1 = r v_1; \quad z_2 = r v_2; \quad z = \sqrt{\lambda}\, m r u; \quad \rho = r\sqrt{m^2 - \varepsilon^2}.$$

Достаточным условием слабого минимума функционала W является наряду с условием Лежандра требование, чтобы решения уравнений Якоби не имели корней внутри промежутка $0 < r < +\infty$ — так называемое условие Якоби ([4], стр. 200, 237). Поскольку ищется ограниченное решение уравнений Якоби, то условия в нуле будут: $z_1(0) = z_2(0) = z(0) = 0$. Значение же производной в нуле может быть любым, поэтому для удобства положим $z_1'(0) = z_2'(0) = z'(0) = \alpha$. Очевидным решением уравнения (2) при этих граничных условиях будет $z_2 = z(\rho)$. Оно не имеет нулей только для первого частицеподобного решения ($\alpha = 4{,}33$) [1]. В случае же других собственных решений ($\alpha > \alpha_1$) нули имеются, и поэтому для них условие Якоби не выполнено. В связи с этим анализ решения уравнения (1) необязателен, так как условие Якоби необходимо для слабого минимума. Точнее, в вариационном исчислении показывается, что, если нарушено условие Якоби, но выполняется усиленное условие Лежандра, то соответствующая экстремаль не дает ни минимума, ни максимума функционалу W (т. е. вторая вариация $\delta^2 W$ знакопеременна) ([4], стр. 208—209). Таким образом, для узловых частицеподобных решений условия теоремы об устойчивости не выполняются (ниже будет строго доказана их неустойчивость в смысле А. М. Ляпунова).

Покажем теперь, что безузловое (первое) частицеподобное решение реализует сильный минимум функционала W. Для этого составим функцию Вейерштрасса ([4], стр. 229) и определим ее знак:

$$E(\vec{r};\ u,\ \nabla u;\ \nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2) = \frac{1}{2}\left\{(\nabla\varphi_1)^2 + (\nabla\varphi_2)^2 + (m^2-\varepsilon^2)u^2 - \frac{1}{2}\lambda m^2 u^4\right\} -$$
$$-\frac{1}{2}\left\{(\nabla u)^2 + (m^2-\varepsilon^2)u^2 - \frac{1}{2}\lambda m^2 u^4\right\} - (\nabla\varphi_1 - \nabla u)\nabla u =$$
$$= \frac{1}{2}\{(\nabla\varphi_1 - \nabla u)^2 + (\nabla\varphi_2)^2\} \geqslant 0$$

для любых $\nabla\varphi_1$ и $\nabla\varphi_2$. Следовательно, необходимое условие сильного минимума выполняется ([4], стр. 232). Достаточным условием сильного минимума является требование, чтобы исследуемую экстремаль можно было включить в поле экстремалей (т. е. не пересекающихся во всей области, покрытой полем) и чтобы существовала такая окрестность нашей экстремали, в которой $E \geqslant 0$ для любых $\nabla\varphi_1$ и $\nabla\varphi_2$ ([4], стр. 203, 235). Все эти требования выполнены только для первого частицеподобного решения, которое, вследствие отсутствия у него корней, можно включить в поле экстремалей:

$$u_1 = \sqrt{1-c^2}\,u;\quad u_2 = cu;\quad |c| \leqslant 1.$$

Действительно, в пространстве (u_1, u_2, r) это поле представляет собой поверхность вращения с образующей u и осью r. Ясно, что все узловые экстремали будут иметь общую точку в своем узле, а поэтому узловая экстремаль не будет лежать строго внутри области, покрытой полем. Таким образом, мы можем утверждать, что только безузловое частицеподобное решение реализует сильный минимум функционала W, и, следовательно, является устойчивым. Это значит, что существует широкий класс квазистационарных частицеподобных решений вида $\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t)e^{i\varepsilon t}$, достаточно мало отличающихся от безузлового стационарного решения $\psi_0(\vec{r}, t) = u(r)e^{i\varepsilon t}$*.

Убедимся теперь в неустойчивости узловых частицеподобных решений. Для этого воспользуемся теоремой Н. Г. Четаева о неустойчивости, которую можно обобщить совершенно аналогично предыдущему. Согласно этой теореме, невозмущенное движение неустойчиво, если существует функционал $\overline{V}$, ограниченный в области $\overline{V} > 0$, производная которого в силу уравнений для возмущений $\frac{d\overline{V}}{dt}$ положительно-определенна в той же области $\overline{V} > 0$ ([2], стр. 34).

Рассмотрим функционал $\overline{V} = -V\int d\tau\{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + 2\varepsilon\xi_1\xi_2\}$. Тогда область $\overline{V} > 0$ определится совместными условиями

$$V < 0;\quad \int d\tau\{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + 2\varepsilon\xi_1\xi_2\} > 0. \tag{3}$$

* Так как предложенное поле экстремалей является однопараметрическим и потому неполным в пространстве (u_1, u_2, u_3), то приведенное доказательство имеет силу только для мнимой части возмущения. Относительно же действительного возмущения функционал W не имеет минимума, т. е. решение неустойчиво.

Для узловых решений такая область существует при $V_{\text{пот}} < 0$ и достаточно малых η_1 и η_2. Учитывая, что $\frac{dV}{dt} = 0$, находим

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = -V \int d\tau \left\{ \eta_1^2 + \eta_2^2 - 2V_{\text{пот}} + \lambda m^2 u \xi_1 (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \lambda m^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + (2\varepsilon \xi_1 \xi_2) \frac{1}{\xi_2^2} \frac{d}{dt} (\xi_2^2) \right\}.$$

Здесь $\int d\tau \left\{ (2\varepsilon \xi_1 \xi_2) \frac{1}{\xi_2^2} \frac{d}{dt} (\xi_2^2) \right\} > 0$, так как в области (3) имеет место $\frac{d}{dt} (\xi_2^2) > 0$ и $\xi_1 \xi_2 > 0$ в среднем.

Членами выше второго порядка по ξ и η можно пренебречь, и тогда оказывается, что в области $\overline{V} > 0$ будет $\frac{d\overline{V}}{dt} > 0$, т. е. функционал $\overline{V}$ удовлетворяет условиям теоремы о неустойчивости. Тем самым доказывается неустойчивость узловых частицеподобных решений. Из анализа определения неустойчивости по Ляпунову ([5], стр. 17) и из вида $\delta^2 W$ следует, что эти решения физически могут соответствовать нестабильным элементарным частицам, имеющим некоторое конечное время жизни. Действительно, структура $\delta^2 W$ показывает, что область неустойчивости (3) лежит внутри области:

$$I_1 = \int \xi_1^2 (m^2 - \varepsilon^2 - 3 \lambda m^2 u^2) d\tau < 0 \text{ и } I_2 = \int \xi_2^2 (m^2 - \varepsilon^2 - \lambda m^2 u^2) d\tau < 0.$$

Но если возмущение всюду слева от узла (внутри частицы) гораздо меньше, чем справа (на периферии частицы), то $I_1 > 0$ и $I_2 > 0$, а значит $\delta^2 W > 0$ и частица устойчива. И только в том случае, когда возмущение слева от узла достигает определенной величины (на что требуется некоторое время), I_1 и I_2 становятся отрицательными, и возмущение может попасть в область неустойчивости.

Заметим, что в случае произвольной нелинейности $F(|\psi|^2)$ полученные результаты будут также справедливы, так как они зависят от общих свойств частицеподобных решений (наличие у них нулей).

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. Я. П. Терлецкому за помощь и руководство в работе, а также С. Ф. Шушурину за ценные замечания при обсуждении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гласко В. Б., Лерюст Ф., Терлецкий Я. П., Шушурин С. Ф. ЖЭТФ, **35**, 452, 1958.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946.
3. Дубошин Г. Н. ДАН СССР, **1**, 1935.
4. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. М. — Л., 1950.
5. Дубошин Г. Н. Основы теории устойчивости движения. Изд-во МГУ, 1952.

Поступила в редакцию
15. 8 1962 г.

Кафедра
статистической физики и механики