Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1962

В. К. ГРИШИН

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА С ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ПОЛЕМ В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ

Методом кинетического уравнения рассматривается взаимодействие пространственного заряда с высокочастотным полем в циклических ускорителях, которое существенно изменяет условия автофазировки в процессе ускорения. Указаны режимы ускорения, позволяющие увеличить захваченный ток.

В настоящее время актуальным вопросом ускорительной техники является увеличение токов ускоренных частиц. При этом неизбежно приходится сталкиваться с необходимостью исследования эффектов пространственного заряда частиц, в частности, эффектов взаимодействия продольного поля частиц с ускоряющим полем. Такое взаимодействие было рассмотрено в [1, 2] для сильнофокусирующих циклических ускорителей до критической энергии ($\frac{d\omega}{dЭ} > 0$; ω — частота, $Э$ — энергия частиц). В системах с $\frac{d\omega}{dЭ} > 0$ собственное поле пучка уменьшает частоту фазовых колебаний. При некотором критическом заряде автофазировка исчезает, и это определяет предельный ток. В настоящей работе рассматриваются в основном эффекты взаимодействия продольного поля пучка с высокочастотным полем в циклических системах с $\frac{d\omega}{dE} \lesssim 0$ (все слабофокусирующие ускорители и сильнофокусирующие ускорители за критической энергией). На первый взгляд здесь не следует ожидать каких-либо критических явлений, поскольку поле пучка, казалось бы, просто увеличивает частоту фазовых колебаний. Однако факт существования в таких системах ограниченных по азимуту сгустков частиц, сфокусированных собственным полем [3, 4] (эта область явлений характеризуется термином «отрицательная масса») указывает, что механизм взаимодействия пространственного заряда с внешним полем не является столь очевидным. Внимательное рассмотрение выявило некоторые важные обстоятельства, которые следует учитывать при накоплении частиц.

Изменение энергии частиц удобно рассматривать в переменных z, φ [3]

$$z = \int\limits_{Э_p}^{Э} \frac{dЭ}{v}; \quad \dot{\varphi} = q\omega - \omega_b, \tag{1}$$

где $Э_p$ — равновесная энергия частиц в сгустке; v — скорость частиц с энергией $Э$, q и ω_b — кратность и частота высокочастотного поля. Частицы с равновесной энергией (фазой) будут ускоряться полем $E_p = E_0 \sin\varphi_p$; движение частиц с отличной от $Э_p$ энергией определяется уравнением $z = z(t_1 \varphi)$. При установившемся процессе ускорения плотность частиц является лишь функцией z и φ. Поэтому равновесное распределение плотности F частиц описывается уравнением

$$\frac{dF}{dz} e(E - E_p) + \dot{\varphi} \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0, \tag{2}$$

где E — суммарное (внешнее и собственное) азимутальное поле. Обычно $E_b = E_0 \sin\varphi$. Собственное поле пучка сильно экранируется крышками камеры и фактически совпадает с полем прямолинейного тока, расположенного между проводящими плоскостями [1—4].

Следовательно,

$$E_{\text{прод}}(F) = -\frac{e\lambda q^2}{R\gamma^2} \frac{d\xi}{d\varphi} \simeq -\frac{e\lambda q^2}{R^2\gamma^2} \frac{d}{d\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} F dz, \tag{3}$$

где ξ — линейная плотность частиц; R — средний радиус орбит частиц; $\gamma = Э_p/Э_0$; λ — коэффициент, зависящий от отношения поперечных размеров пучка к зазору. Обычно $\lambda \simeq 2 \div 3$. Положим далее $\dot{\varphi} \simeq q\left(v \frac{d\omega}{dЭ}\right)_p z$. Приходим к уравнению

$$\frac{dF}{dz} e\left(E_0(\sin\varphi - \sin\varphi_p) - \frac{e\lambda q^2}{R^2\gamma^2} \frac{d}{d\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} F\, dz\right) + q(v\omega')_p z \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0, \tag{4}$$

где положено, что в $\varphi = \varphi_p$ собственное поле равно нулю. Очевидно, что решение уравнения (4) можно записать в виде $F = F(\varphi_\varphi^2 - z^2)$, если ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} q(v\omega')_p \psi^2 + \lambda \left(\frac{eq}{R\gamma}\right)^2 \Phi(\psi) = -eE_0(\varphi \sin\varphi_p + \cos\varphi) + \text{const} = D(\varphi), \tag{5}$$

где $\Phi(\psi) = R\xi$. Нас интересуют ограниченные по азимуту и радиусу сгустки частиц. Отсюда следует, что, во-первых, константу в (5) нужно выбирать так, чтобы правая часть обращалась в нуль по крайней мере в двух точках, но азимутальные размеры сепаратриссы были бы максимальны. Во-вторых, F можно представить, как

$$F = \begin{cases} \sum_k c_k (\psi^2 - z^2)^k; & k \geqslant 0 \\ 0 & \end{cases} \qquad |z| \lesseqgtr |\psi|. \tag{6}$$

Рассмотрим три различных случая.

$\omega' > 0$. Нетрудно увидеть, что при $\omega' > 0$ возможна весьма произвольная радиальная форма распределения. Но при любом распределении существует один и тот же максимальный ускоряемый заряд *

$$Q_{\text{кр}} = \frac{R^2\gamma^2}{e\lambda q^2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi^2} D\,d\varphi \to \frac{2\pi R^2\gamma^2 E_0}{\lambda q^2}. \tag{7}$$

Этот заряд реализуется при $2e^2q^2\lambda\Phi \gg q(v\omega')_p R^2\gamma^2\psi^2$. Если это условие не выполняется, величина захваченного в сепаратриссу заряда существенно зависит от формы распределения. По-видимому, наиболее выгодным является распределение вида $F = \frac{2}{\pi}\sigma_0(\psi^2 - z^2)^{1/2}$. В этом случае заряд, «вмещающийся» в сепаратриссу, равен

$$Q = \frac{e\sigma_0}{\dfrac{(v\omega')_p}{2} + \lambda\sigma_0\left(\dfrac{qe}{R\gamma}\right)^2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} D\,d\varphi.$$

$\omega' = 0$. В этой области (критической) энергии $\dot\varphi \simeq 0$. При малом собственном поле отсутствуют какие-либо равновесные конфигурации, ограниченные малым интервалом энергий $\left(\frac{\partial F}{\partial z} \simeq 0\right)$. Но при большем числе частиц из (4) и (5) вытекает, что такое равновесное состояние возможно, если

$$\frac{\lambda e^2 q^2}{R\gamma^2}\xi = D(\varphi),$$

т. е. линейная плотность равна предельной плотности при $\omega' > 0$. Существование сгустков при $\omega' = 0$ с малым разбросом энергии не покажется странным, если учесть, что равенство $Q = Q_{\text{кр}}$ в предыдущем случае фактически соответствует состоянию с критической энергией: частота фазовых колебаний

$$\dot\varphi^2 = 2q(v\omega')_p\left\{D(\varphi) - \lambda\left(\frac{eq}{R\gamma}\right)^2\Phi(\psi)\right\} \tag{8}$$

стремится к нулю при $Q \to Q_{\text{кр}}$ независимо от значения ω'. Таким образом, пространственный заряд расширяет область критической энергии.

$\omega' < 0$. Вместо (5) имеем уравнение

$$q(v|\omega'|)_p\frac{\psi^2}{2} - \lambda\left(\frac{eq}{R\gamma}\right)^2\Phi(\psi) = -D(\varphi) = D_1(\varphi), \tag{9}$$

где $D_1(\varphi) \geqslant 0$ при соответствующей равновесной фазе. Здесь допустима отнюдь не любая форма распределения. В частности, условию замкнутости сепаратриссы не удовлетворяет распределение, рассмотренное в [1] (см. примечание 1). Таким возможным распределением является $F = \frac{2}{\pi}\sigma_0(\psi^2 - z^2)^{1/2}$, которое описывает самосогласованное распределение и в отсутствие внешнего поля [4]. В этом случае

$$\begin{gathered}\psi^2 = \varepsilon D_1, \qquad \varphi = \pm|q(v\omega')_p\psi|,\\ \varepsilon^{-1} = \frac{1}{2}q(v|\omega'|)_p - \lambda\sigma_0\left(\frac{qe}{R\gamma}\right)^2.\end{gathered} \tag{10}$$

---

* Величина $Q_{\text{кр}}$ была найдена в [1], где рассматривалось распределение типа (6) при $c_0 \neq 0$, $c_{k\neq 0} = 0$, т. е. $F = \begin{cases} c_0 & |z| \leqslant |\psi| \\ 0 & \end{cases}$.

Из (10) следует, что с увеличением заряда Q в пучке размеры равновесной конфигурации увеличиваются:

$$\varphi^2 = 2\frac{S_1 + \lambda\left(\frac{eq}{R\gamma}\right)^2 Q}{q(v\,|\,\omega'\,|)_p S_1} D_1(\varphi), \tag{11}$$

где $S_1 = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} D_1 d\varphi$, но не видно каких-либо принципиальных ограничений заряда. Практически Q лимитируется либо размерами камеры, либо допустимой величиной частоты фазовых колебаний, либо, наконец, допустимой величиной энергетического разброса в пучке. В слабофокусирующих системах определяющей является первая причина, в сильнофокусирующих — вторая. Не последнюю роль при этом может сыграть резонанс связи фазовых и бетатронных колебаний.

Обратим внимание теперь на одно важное следствие, вытекающее из (9). Если оставить равновесную фазу той же, что и при $\omega' > 0$, то $D_1(\varphi) = -D(\varphi) \ll 0$. Однако и при этой равновесной фазе ускорение возможно (существует замкнутая сепаратрисса), если $Q > Q_{кр}$ из (7). В этом случае *

$$\psi^2 = 2D(\varphi)\frac{\lambda\left(\frac{eq}{R\gamma}\right)^2 Q - S}{q(v\,|\,\omega'\,|)_p S}; \quad S = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} D\,d\varphi. \tag{12}$$

Ускорение становится возможным потому, что неустойчивость этой равновесной фазы, обусловленная внешним полем, компенсируется фазовой фокусировкой пучка, локализированного собственным полем [4]. При одинаковых размерах пучка и энергетическом разбросе последний режим ускорения позволит захватить заряд, больше на

$$\Delta Q = \frac{2}{\lambda}\left(\frac{R\gamma}{eq}\right)^2 S.$$

Такой режим ускорения может оказаться полезным в слабофокусирующих ускорителях.

Эти результаты справедливы при постоянных значениях $Э_p$, R, $Э_0$. Но обычно рост $Э_p$ происходит «адиабатически» медленно, так что изменение формы сгустка в процессе ускорения нетрудно оценить.

Соотношение (12) указывает на возможность перехода через критическую энергию без изменения равновесной фазы ускоряющего поля. Для этого достаточно в определенный момент быстро уменьшить амплитуду внешнего поля. Тогда $Q > Q_{кр}$ и ускорение возможно при той же равновесной фазе. К сожалению, практическая ценность этого способа невелика, поскольку далее вновь придется столкнуться с нарушением автофазировки, как только $Q/\gamma^2 \lesssim S$.

Этот своеобразный эффект нужно учитывать в накопительных системах типа кольцевого фазотрона [5]. Взаимодействие накопляемого тока с проходящими сепаратриссами в течение всего цикла ускорения каждой новой порции частиц приведет к дополнительному энергетическому разбросу накопленных частиц и изменению их средней энергии.

Помимо этого, заслуживает внимания возможность использования при большем заряде фазовой самофокусировки пучка для стабилизации его поперечных размеров.

* При $Q > Q_{кр}$ опять возможны распределения различной радиальной формы.

В заключение укажем, что рассмотренное выше и в [1, 2] взаимодействие пространственного заряда с высокочастотным полем весьма идеализировано. Такое рассмотрение полезно для выяснения условий оптимальных накопительных режимов в циклических резонансных ускорителях. Но при этом необходимо отметить следующее. Выше всюду полагалось, что в равновесной фазе собственное поле пучка равно нулю $\left(\left.\frac{d\xi}{d\varphi}\right|_{\varphi_p} = 0\right)$. В момент инжекции этого добиться практически невозможно. Несоответствие заданной равновесной фазы электрическому «центру» пучка должно привести к смещению равновесной фазы, изменению формы сепаратриссы и скорости роста средней энергии. Поэтому значительная доля инжектируемых частиц будет теряться.

В связи со сказанным необходимо исследовать взаимодействие заряженных сгустков частиц со спектром бегущих волн. Вполне вероятно, что стохастический режим ускорения в системах с постоянным магнитным полем окажется весьма эффективным.

Автор выражает благодарность А. А. Коломенскому и А. Н. Лебедеву за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nielsen C. E., Sessler A. M. Rev. of Sci. Instr., **30**, 80, 1959.
2. Neil V. K., Sessler A. M. Rev. of Sci. Instr., **32**, 256, 1961.
3. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. CERN Symposium, 1959.
4. Гришин В. К. А. Э. **11**, вып. 2, 183, 1961.
5. Коломенский А. А. Теория ускорителей. «Труды ФИАН СССР», **XIII**, 1960.

Поступила в редакцию
15. 11 1961 г.

НИИЯФ