Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1962

В. П. МИЛАНТЬЕВ, Ю. А. ПОПОВ

ТЕПЛОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ПЛАЗМЫ

В работах [1—7] изучался вопрос о пространственно-временных корреляциях в системе заряженных частиц без учета столкновений. В настоящей статье вычисляются пространственно-временные корреляционные функции равновесной плазмы, в которой столкновения электронов с неподвижными ионами учитываются посредством введения некоторой эффективной частоты * столкновений ν. Мы полагаем далее, что сила трения, вызванная такими столкновениями, пропорциональна скорости электронов (так как ионы неподвижны). Если, по аналогии с известным методом Ланжевена, ввести в уравнения гидродинамики случайную силу $\vec{f}(\vec{r}, t)$, то они приобретут стохастический смысл, т. е. все гидродинамические величины тогда должны рассматриваться как случайные функции пространства и времени. Заметим, что попытка ввести в уравнения гидродинамики случайные силы впервые была предпринята Я. П. Терлецким в 1938 г. в работе [8], посвященной гидродинамической теории броуновского движения. В 1957 г. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц [9] ввели в уравнения гидродинамики случайные тензоры напряжений и теплового потока и вычислили их корреляционные функции. Они дали общий метод вычисления гидродинамических флуктуаций, следуя которому И. М. Халатников [10] рассмотрел флуктуации в сверхтекучей жидкости, а Рытов [11] построил теорию рэлеевского рассеяния света жидкостью. Однако такой способ вычислений является довольно громоздким, и нам кажется более целесообразным пользоваться методом Гиббса [12—14], который не требует знания корреляционных свойств случайных полей и тем самым значительно упрощает вычисления.

* В работе [17] для эффективной частоты столкновений ν в модели двух газовых флюидов с помощью метода Энскога—Чэпмана было получено выражение

$$\nu = \frac{8}{3} A_1(2)\, n_1 n_2 k_{12}^2 \sqrt{\frac{\pi}{m_1}}\, (2kT_1)^{-3/2},$$

где $A_1(2)$, k_{12}^2 — некоторые известные интегралы, n — плотность частиц, m — масса легких частиц ($m_2 \gg m_1$).

Исходная система уравнений нашей задачи в линейном приближении имеет вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{u_e^2}{\rho_0}\nabla\rho - \frac{e}{m}\vec{E} - \nu\vec{v} + \frac{1}{\rho_0}\vec{f}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0(\nabla\vec{v}) = 0,$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c_2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi e\rho_0}{mc^2}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t},$$

где $\vec{f}$ — плотность случайной силы, ρ_0 — равновесная плотность плазмы, u_e — скорость звука, e — заряд, m — масса электрона.

Представляя все функции, входящие в систему (1), в форме интегралов Фурье, для Фурье-амплитуд получим следующую систему уравнений:

$$(i\omega + \nu)\vec{v} - \frac{iu_e^2}{\omega}\vec{k}(\vec{k}\vec{v}) + \frac{e}{m}\vec{E} = \frac{1}{\rho_0}\vec{f},$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{E} - \vec{k}(\vec{k}\vec{E}) = \frac{4\pi e\rho_0 i\omega}{mc^2}\vec{v}, \tag{2}$$

$$i\omega\rho = -i\rho_0(\vec{k}\vec{v}),$$

в которой у величин $\vec{v}$, $\vec{E}$, $\vec{f}$, ρ опущены аргументы $\vec{k}$, ω. Из второго уравнения системы (2) находим

$$\vec{E} = -\frac{4\pi e\rho_0 i}{m\omega\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)}\left\{\vec{k}(\vec{k}\vec{v}) - \frac{\omega^2}{c^2}\vec{v}\right\}.$$

Вычисляя с помощью этого соотношения величину $\overline{E_i(\vec{k}',\omega)E_j(\vec{k}',\omega')}$ для спектральной плотности флуктуаций электрического поля*, получим выражение

$$(E_iE_j)_{\vec{k},\omega} = \left[\frac{4\pi e\rho_0}{m\omega\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)}\right]^2\left\{k_ik_j\sum_{r,s}k_rk_s(v_rv_s)_{\vec{k},\omega} - k_i\frac{\omega^2}{c^2}\sum_r k_r(v_rv_j)_{\vec{k},\omega} - \right.$$

$$\left. - k_j\frac{\omega^2}{c^2}\sum_s k_s(v_sv_i)_{\vec{k},\omega} + \frac{\omega^4}{c^4}(v_iv_j)_{\vec{k},\omega}\right\}. \tag{3}$$

Аналогично может быть найдена спектральная плотность величины ρ. Оказывается, что

$$(\rho^2)_{\vec{k},\omega} = \frac{\rho_0^2}{\omega^2}\sum_{i,j}k_ik_j(v_iv_j)_{\vec{k},\omega}. \tag{4}$$

Таким образом, флуктуации электрического поля и плотности плазмы выражаются через флуктуации скорости, которые легко вычислить с по-

---

* Спектральная плотность флуктуаций $(F_iF_j)_{\vec{k},\omega}$ величин $F_i(\vec{r}_1, t_1)$ и $F_j(\vec{r}_2, t_2)$ определяется в безграничном пространстве для стационарных случайных процессов соотношением $\overline{F_i(\vec{k}, \omega)F_j(\vec{k}'\omega')} = (F_iF_j)_{\vec{k},\omega}\delta(\omega + \omega')\delta(\vec{k} + \vec{k}')$, где черта означает усреднение по ансамблю.

мощью метода Гиббса. В работах [12—14] исследован вопрос о применимости этого метода к теории броуновского движения и показано, что спектральная плотность флуктуаций скорости определяется соотношением

$$(v_i v_j)_{\vec{k},\omega} = i\omega \mathrm{E}(\theta, \omega) V_{ij}(\vec{k}, \omega) = i\omega \mathrm{E}(\theta, \omega) V_{ji}(\vec{k}, \omega). \tag{5}$$

Здесь $\mathrm{E}(\theta, \omega)$ — энергия квантового осциллятора, $V_{ij} = \dfrac{\partial \bar{v}_i^{\alpha}}{\partial \alpha_j^0}$, причем $\bar{v}_i^{\alpha}$ есть решение системы (2), в которой вместо случайной силы $\vec{f}$ в момент $t = 0$ включена постоянная во времени сила $\alpha\delta(\vec{r} - r_0)\eta(t)$, $\eta(t)$ — ступенчатая функция.

Решая указанную систему уравнений, находим

$$V_{ij} = \frac{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)(k_i k_j k^{-2} - \delta_{ij})}{(2\pi)^4 \rho_0 \left\{\omega(\omega - i\nu)\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega^2\Omega^2}{c^2}\right)\right.} + \frac{k_i k_j}{2\pi^4 \rho_0 k^2 (u_e^2 k^2 + \Omega^2 - \omega^2 + i\omega\nu)}, \tag{6}$$

где Ω — частота плазменных колебаний. Формулами (3), (4), (5), (6) и решается общая задача о флуктуациях плазмы.

Подставив (5), (6) в (3), проинтегрируем полученную формулу и произведем затем свертывание по индексам i, j. В результате получим, что спектральная плотность флуктуаций электрического поля плазмы определяется выражением [15]

$$(\vec{E}^{(1)}\vec{E}^2)_{\omega} = \frac{2\mathrm{E}(\theta, \omega)}{\pi\omega r}\left\{\frac{\Omega^2}{u_e^2} e^{r\frac{\omega}{u_e}\varkappa} \sin\frac{\omega}{u_e} rn + 2\frac{\omega^2}{c^2} e^{r\frac{\omega}{c}\Gamma} \sin\frac{\omega}{c} rN\right\}, \tag{7}$$

где

$$n^2 = \frac{\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2\varepsilon^2}} + 1\right], \quad \varkappa^2 = \frac{\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2\varepsilon^2}} - 1\right],$$

$$N^2 = \frac{\varepsilon + \nu^2\omega^{-2}}{2(1 + \nu^2\omega^{-2})}\left[\sqrt{1 + \nu^2\Omega^4\omega^{-6}(\varepsilon + \nu^2\omega^{-2})^{-2}} + 1\right],$$

$$\Gamma^2 = \frac{\varepsilon + \nu^2\omega^{-2}}{2(1 + \nu^2\omega^{-2})}\left[\sqrt{1 + \nu^2\Omega^4\omega^{-6}(\varepsilon + \nu^2\omega^{-2})^{2}} - 1\right],$$

$$\varepsilon = 1 - \Omega^2\omega^{-2}, \quad \omega > \Omega.$$

При этом $\varkappa$ и Γ надо выбирать со знаком минус. Мощность электрических флуктуаций, определяемая формулой

$$(\vec{E}^2)_{\omega} = \frac{2\varepsilon(\theta, \omega)}{\pi}\left\{\frac{\Omega_n^2}{u_e^3} + \frac{2\omega^2 N}{c^3}\right\}, \tag{8}$$

оказывается обратно пропорциональной давлению плазмы, что находится в качественном согласии с экспериментальными данными. Из этой формулы видно также, что спектр флуктуаций не обрезается полностью на плазменной частоте, как в случае отсутствия столкновений между электронами и ионами. Если измерить мощность шума на плазменной частоте, то, используя формулу

$$(\vec{E}^2)_\Omega = \frac{4\theta\Omega\nu}{\pi\sqrt{2}c^3}\sqrt{(1+\sqrt{1+\Omega^2\nu^{-2}})(1+\nu^2\Omega^{-2})^{-1}},$$

можно будет вычислить эффективную частоту столкновений ν.

Рассмотрим флуктуации плотности плазмы. Воспользовавшись формулами (4), (5) и (6), можно показать, что в классическом приближении

$$(\rho^2)_{\vec{k},\omega} = \frac{2\theta\rho_0}{(2\pi)^4 i\omega}\,\frac{k^2}{\omega^2 - i\omega\nu - \Omega^2 - u_e^2 k^2}. \tag{9}$$

Отсюда после интегрирования по ω получаем

$$(\rho^2(t))_{\vec{k}} = \frac{2\theta\rho_0 k^2}{(2\pi)^3}\,\frac{\left(\omega_k\cos\omega_k t + \frac{\nu}{2}\sin\omega_k t\right)}{\omega_k(k^2u_e^2+\Omega^2)}\,e^{-\frac{\nu t}{2}}, \tag{10}$$

где

$$\omega_k^2 = k^2u_e^2 + \Omega^2 - \frac{\nu^2}{4}.$$

Если считать, что столкновения отсутствуют, то, полагая в формуле (10) частоту $\nu = 0$ при $t = 0$, получим известный результат [1 — 7]

$$(\rho^2)_{\vec{k}} = \frac{2\theta\rho_0}{(2\pi)^3}\,\frac{k^2}{k^2u_e^2+\Omega^2}. \tag{11}$$

Как известно, учет теплового движения плазмы неразрывно связан с учетом ее пространственной дисперсии [16]. Поэтому все кинетические коэффициенты плазмы приобретают нелокальный характер (являются величинами с пространственной дисперсией). Например, спектральная плотность флуктуаций тока в плазме определяется нелокальным тензором проводимости

$K_{ik}(\vec{r}, \vec{r}', \omega)$ [19]

$$[I_i(\vec{r})\,I_k(\vec{r}')_\omega = \frac{E(\theta,\omega)}{\pi}\,\mathrm{Re}\,K_{ik}(\vec{r},\vec{r}',\omega)$$

или

$$(I_iI_k)_{\omega,\vec{k}} = \frac{E(\theta,\omega)}{\pi}\,K_{ik}(\vec{k},\omega). \tag{12}$$

Так как $\vec{I} = en_0\vec{v}$, то

$$(I_iI_k)_{\omega,\vec{k}} = e^2n^2(v_iv_k)_{\omega,\vec{k}}. \tag{13}$$

На величину $(v_iv_k)_{\omega,\vec{k}}$ мы знаем — она определяется формулами (5) и (6). Следовательно, с помощью формул (5), (6), (12) и (13) можно вычислить тензор проводимости плазмы K_{ik}. Легко видеть, что

$$K_{ik}(\vec{k},\omega) = \frac{i\omega e^2n_0^2(k^2-\omega^2c^{-2})(k_ik_kk^{-2}-\delta_{ik})}{(2\pi)^3\rho_0\{\omega(\omega-i\nu)(k^2-\omega^2c^{-2})+\omega^2\Omega^2c^{-2}} + \frac{i\omega e^2n_0^2k_ik_k}{(2\pi)^3\rho_0k^2\{k^2u_e^2+\Omega^2-\omega^2+i\omega\nu\}}. \tag{14}$$

При $k_i \to \infty$ приходим* к известному выражению для проводимости плазмы $\sigma_{ik}(\omega) = \frac{e^2 n_0 \nu \delta_{ik}}{m(\omega^2 + \nu^2)}$, получаемому обычно в так называемом элементарном рассмотрении [20].

В заключение выражаем глубокую благодарность проф. Я. П. Терлецкому за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Толмачев В. В. ДАН СССР, **112**, 842, 1957; **113**, 301, 1957.
2. Тябликов С. В., Толмачев В. В. ДАН СССР, **114**, 1210, 1957.
3. Климонтович Ю. Л. ЖЭТФ, **34**, 173, 1958.
4. Галайко В. П., Парганик Л. Э. ДАН СССР, **123**, 999, 1958.
5. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Ситенко А. Г. ЖЭТФ, **41**, 644, 1961.
6. Силин В. П. ЖЭТФ, **41**, 969, 1961.
7. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. Госатомиздат, 1961.
8. Терлецкий Я. П. Диссертация. МГУ, 1938.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. ЖЭТФ, **32**, 618, 1957.
10. Халатников И. М. ЖЭТФ, **33**, 809, 1957.
11. Рытов С. М. ЖЭТФ, **33**, 514, 1957.
12. Владимирский В. В. ЖЭТФ, **12**, 199, 1942.
13. Терлецкий Я. П. «Вестн. Моск. ун-та», сер. мех., мат., астрон., физ., химии, № 4., 119, 1957.
14. Милантьев В. П. «Изв. вузов» (физика), **5**, 115, 1961.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц, Г. М. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, 1959.
16. Герценштейн М. ЖЭТФ, **22**, 303, 1952.
17. Glansdorf P. Bull. cl. sci. Acad. roy Beld., **45**, No. 6, 575, 1959.
18. Bourret R. C. Canad. J. Phys., **38**, 1213, 1961.
19. Каганов М. Н., Басс Ф. Г. ЖЭТФ, **34**, 1154, 1958.
20. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. Физматгиз, М., 1961.

Поступила в редакцию
7. 12 1961 г.

Кафедра
статистической физики и механики

* Фактически это означает, что данная величина усредняется по некоторому физическому малому объему Δv с дальнейшим предельным переходом $\Delta v \to 0$.