

В. В. ГУЖАВИН

О ФУНКЦИИ УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ В КАСКАДНОМ ЛИВНЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ МАЛЫХ УГЛОВ

В приближении малых углов получены функции углового распределения электронов и фотонов в каскадном ливне на любой стадии его развития с учетом многократного и однократного рассеяния. Ионизационные потери каскадных частиц не учитывались.

В работе [1] были получены аналитические выражения функций углового распределения частиц каскадного ливня в приближении многократного рассеяния без учета ионизационных потерь. В работах [2—3] показано, что учет однократного и кратного рассеяния существенно изменяет вид функции углового распределения, полученной при учете лишь многократного рассеяния, в области больших углов и в области очень малых углов. Угловая задача с учетом многократного, кратного и однократного рассеяния была рассмотрена в [3]. Однако математический метод, развитый в этой работе, оказался достаточно сложным, и авторы [3] получили уточненную функцию углового распределения лишь для случая максимума развития каскадного ливня.

Получим функцию углового распределения ливневых частиц на любой стадии развития каскадной лавины, учитывая многократное, кратное и однократное рассеяние частиц. Уравнения каскадной теории для решения этой задачи записываются в виде:

$$\begin{aligned} \delta P(E_0, E, t, \theta) / \delta t &= L_1 [P(E_0, E, t, \theta), \Gamma(E_0, E, t, \theta)] + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\theta - \theta') P(E_0, E, t, \theta') d\theta' - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\theta') P(E_0, E, t, \theta) d\theta'; \\ \delta \Gamma(E_0, E, t, \theta) / \delta t &= L_2 [P(E_0, E, t, \theta), \Gamma(E_0, E, t, \theta)]. \end{aligned} \quad (1)$$

В этих уравнениях $P(E_0, E, t, \theta)$ и $\Gamma(E_0, E, t, \theta)$ — искомые функции распределения электронов и фотонов по энергии E , глубине t (измеряемой в лавинных единицах) и углу отклонения от оси ливня θ (двумерный угол); L_1 и L_2 — интегральные операторы [2], учитывающие процессы радиационного торможения и образования пар; $\sigma(\theta) d\theta$ — вероятность кулоновского рассеяния электрона на угол $\theta, \theta + d\theta$. В уравнениях (1) ионизационные потери частиц не учитываются, а углы отклонения счи-

таются достаточно малыми, чтобы заменить $\cos\theta$ на 1. Граничные условия соответствуют или одному электрону, вертикально падающему на границу слоя вещества при $t=0$, или аналогично одному фотону.

Разложим функции $P(E_0, E, t, \theta)$ и $\Gamma(E_0, E, t, \theta)$ по функциям Бесселя нулевого порядка согласно соотношениям

$$P(E_0, E, t, \theta) = \int_0^\infty D_p(E_0, E, t, k) J_0(k\theta) k dk,$$

$$D_p(E_0, E, t, k) = \int_0^\infty P(E_0, E, t, \theta) J_0(k\theta) \theta d\theta, \quad (2)$$

и аналогичным соотношениям для функции $\Gamma(E_0, E, t, \theta)$. С помощью этих соотношений можно, используя работы [1, 3], получить следующие уравнения для функций D_p и D_Γ :

$$\begin{aligned} \partial D_p(E_0, E, t, k) / \partial t &= L_1 [D_p(E_0, E, t, k), D_\Gamma(E_0, E, t, k)] - \\ &- K^2 k^2 [1 - (1/\Omega) \ln(K^2 k^2 / 4E^2)] / 4E^2; \\ \partial D_\Gamma(E_0, E, t, k) / \partial t &= L_2 [D_p(E_0, E, t, k), D_\Gamma(E_0, E, t, k)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь K и Ω — некоторые величины, зависящие от атомного номера среды. Их значения для различных веществ приведены в [3]. Уравнения (3) отличаются от аналогичных уравнений, полученных в [1] в приближении многократного рассеяния, лишь заменой члена $E_s^2 k^2 / 4E^2$ в первом уравнении на член $K^2 k^2 [1 - (1/\Omega) \ln(K^2 k^2 / 4E^2)] / 4E^2$. Поэтому уравнения (3) можно решить тем же способом, что и в работе [1]. Для этого представим D_p и D_Γ в виде

$$D_{p, \Gamma}(E_0, E, t, k) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{ds}{E} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \sum_{m=0}^{\infty} \left[-\frac{K^2 k^2}{4E^2} \left(1 - \frac{1}{\Omega} \ln \frac{K^2 k^2}{4E^2}\right) \right]^m \times \\ \times \psi_m^{p, \Gamma}(s, t). \quad (4)$$

Подставив (4) в (3) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $-K^2 k^2 [1 - (1/\Omega) \ln(K^2 k^2 / 4E^2)] / 4E^2$, получим уравнения для определения функций $\psi_m^p(s, t)$ и $\psi_m^\Gamma(s, t)$, которые совпадают с соответствующими уравнениями в приближении многократного рассеяния. Следовательно, выражение функции $P(E_0, E, t, \theta)$ в ливне, вызванном первичным электроном, можно сразу записать в виде

$$\begin{aligned} \{P(E_0, E, t, \theta)\}^p &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{ds}{E} \left(\frac{E_0}{E}\right)^s H_1(s) \exp[\lambda_1(s)t] \times \\ &\times \int_0^\infty \left\{ 1 + \frac{K^2 k^2}{4E^2 f(\lambda_1)} \left[1 - \frac{1}{\Omega} \ln \frac{K^2 k^2}{4E^2 f(\lambda_1)} \right] \right\}^{-(s+2)/2} J_0(k\theta) k dk. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\lambda_1(s)$, $H_1(s)$, $f(\lambda_1)$ — известные каскадные функции, определения и численные значения которых можно найти в [2]. Для дальнейших вычислений воспользуемся разложением подынтегральной функции в ряд по степеням $1/\Omega$:

$$\begin{aligned} \{1 + \alpha [1 - (1/\Omega) \ln \alpha]\}^{-(s+2)/2} &= (1 + \alpha)^{-(s+2)/2} + (1/2\Omega) (s+2) \alpha \ln \alpha (1 + \alpha)^{-(s+4)/2} + \\ &+ (1/4\Omega^2) (s+2) (s+4) \alpha^2 (\ln \alpha)^2 (1 + \alpha)^{-(s+6)/2} + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\alpha = K^2 k^2 / 4E^2 f(\lambda_1)$. Подставляя (6) в (5) и вычисляя интеграл по s методом перевала без учета зависимости $s(\theta)$, т. е. для случая $E_0 = \infty$, получаем

$$\begin{aligned} \{P(E_0, E, t, \theta)\}^p &= \frac{H_1(s) \exp\{ys + \lambda_1(s)t\}}{2\pi E \sqrt{2\pi\lambda_1''(s)t}} \left\{ \int_0^\infty \frac{J_0(k\theta) kdk}{[1 + K^2 k^2 / 4E^2 f(\lambda_1)]^{(s+2)/2}} + \right. \\ &+ \frac{s+2}{2\Omega} \int_0^\infty \frac{K^2 k^2}{4E^2 f(\lambda_1)} \ln \frac{K^2 k^2}{4E^2 f(\lambda_1)} \cdot \\ &\frac{J_0(k\theta) kdk}{[1 + K^2 k^2 / 4E^2 f(\lambda_1)]^{(s+4)/2}} + \frac{(s+2)(s+4)}{4\Omega^2} \int_0^\infty \left[\frac{K^2 k^2}{4E^2 f(\lambda_1)} \ln \frac{K^2 k^2}{4E^2 f(\lambda_1)} \right]^2 \times \\ &\left. \times \frac{J_0(k\theta) kdk}{[1 + K^2 k^2 / 4E^2 f(\lambda_1)]^{(s+6)/2}} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $y = \ln(E_0/E)$; величины y , s и t связаны соотношением $y + \lambda_1'(s)t = 0$. Ряд по $1/\Omega$ в (7) сходится достаточно быстро, и для практических приложений достаточно вычислить первые два члена ряда. Первый член в (7) представляет собой вклад многократного рассеяния, а второй — учитывает эффект однократного и кратного рассеяния. Если ввести дифференциальную функцию углового распределения $\{F_p^A(s, z)\}^p$, нормированную на единицу согласно условию

$$\int_0^\infty \{F_p^A(s, z)\}^p z dz = 1,$$

где $z = E\theta/P$, $P = K/2 \sqrt{f(\lambda_1)}$, то из (7) можно получить, что

$$\begin{aligned} \{F_p^A(s, z)\}^p &= \frac{z^{s/2} K_{s/2}(z)}{2^{s/2} \Gamma(1 + s/2)} + \frac{(s+2)z^s}{\Omega} \left\{ \int_0^\infty \frac{J_0(x) x^3 \ln x dx}{(z^2 + x^2)^{(s+4)/2}} + \right. \\ &+ \frac{\ln z}{(2z)^{s/2} \Gamma(2 + s/2)} \left[\frac{z}{2} K_{(2-s)/2}(z) - K_{s/2}(z) \right] \left. \right\} + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $K_\nu(z)$ — видоизмененная функция Бесселя второго рода, порядка ν . Аналогичная функция углового распределения фотонов $F_T^A(s, z)$ в ливне, вызванном первичным электроном, имеет вид

$$\begin{aligned} \{F_T^A(s, z)\}^p &= \frac{z^{(s-2)/2} K_{(2-s)/2}(z)}{2^{s/2} \Gamma(s/2)} + \frac{sz^{s-2}}{\Omega} \left\{ \int_0^\infty \frac{J_0(x) x^3 \ln x dx}{(z^2 + x^2)^{(s+2)/2}} + \right. \\ &+ \frac{\ln z}{(2z)^{(s-2)/2} \Gamma(1 + s/2)} \left[\frac{z}{2} K_{(4-s)/2}(z) - K_{(2-s)/2}(z) \right] \left. \right\} + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Дифференциальная функция углового распределения электронов в ливне, вызванном первичным фотоном, совпадает с соответствующей функцией в ливне от первичного электрона, т. е. $\{F_p^A(s, z)\}^\Gamma = \{F_p^A(s, z)\}^p$. Для дифференциальной же функции углового распределения фотонов в ливне от первичного фотона такой вывод справедлив, как можно показать, лишь для глубин $t > 1$, где $\{F_T^A(s, z)\}^\Gamma \approx \{F_T^A(s, z)\}^p$.

На рис. 1—3 приведены функции $\{F_p^A(s, z)\}^p$, рассчитанные в электронно-фотонных каскадных ливнях, развивающихся в воздухе, для

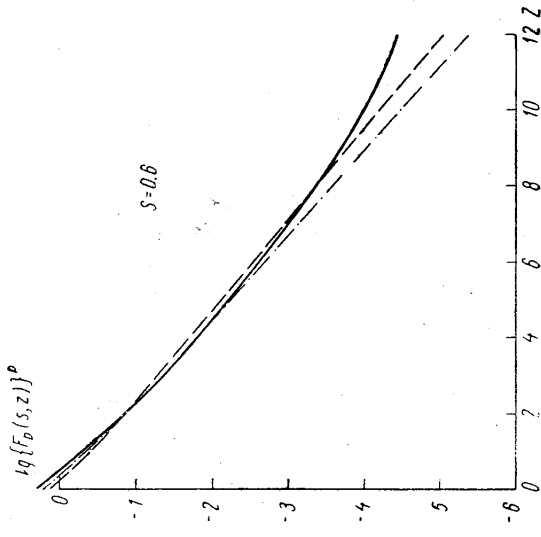


Рис. 1

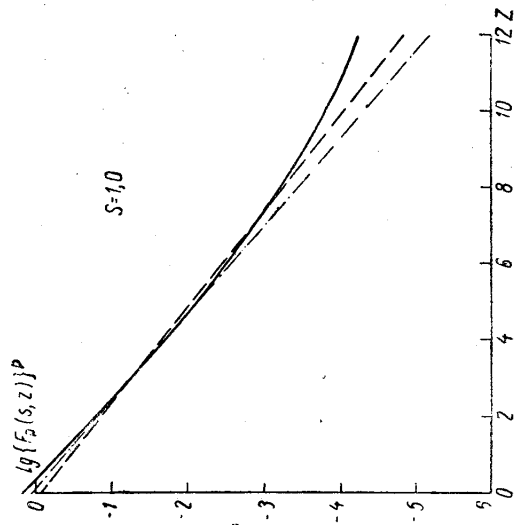


Рис. 2

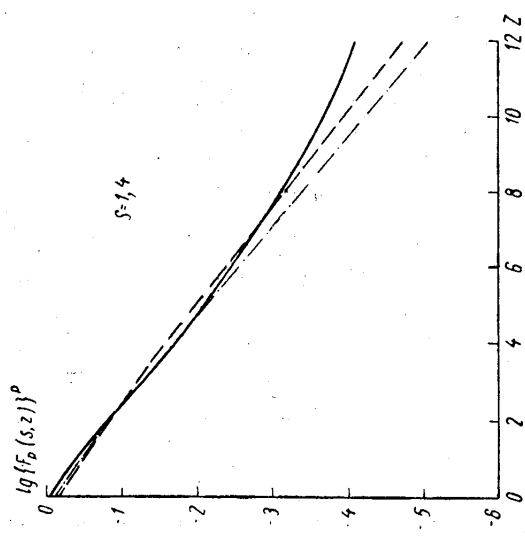


Рис. 3

различных значений параметра s по формуле (8). Значения параметра s указаны на рисунках. Пунктирные кривые представляют собой функции углового распределения, рассчитанные в приближении многократного рассеяния, штрих-пунктирные кривые дают вклад многократного рассеяния при расчете по формуле (8), сплошные кривые рассчитаны по (8) с учетом второго члена, т. е. с учетом однократного и кратного рассеяния. Различие пунктирных и штрих-пунктирных кривых обусловлено слабым различием в определении E_s и K . Из рисунков видно, что учет кратного и однократного рассеяния приводит к существенному изменению вида функции углового распределения при больших значениях z , а также изменяет вид функции в области очень малых углов, т. е. около оси каскадного ливня.

В заключение автор выражает глубокую благодарность И. П. Иваненко за ценные советы и обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гужавин В. В., Иваненко И. П. ЖЭТФ, 40, 1682, 1961.
2. Беленький С. З. Лавинные процессы в космических лучах. Гостехиздат, 1948.
3. Nishimura J., Kamata K. Suppl. Progr. Theor. Phys., 6, 93, 1958.

Поступила в редакцию
11. 12 1961 г.

НИИЯФ