Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1962

К. А. НАУГОЛЬНЫХ, С. И. СОЛУЯН, Р. В. ХОХЛОВ

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрены процессы распространения расходящихся и сходящихся цилиндрических волн в нелинейной вязкой и теплопроводящей среде. Рассмотрение проведено приближенными методами. Методом Крылова — Боголюбова [1] для малых значений числа Рейнольдса и методом, применявшимся в [2], для больших значений числа Рейнольдса. На основе полученных решений исследованы явления формирования и «рассасывания» ударных фронтов, определены пространственные масштабы этих явлений. Показано, что задача о распространении цилиндрических волн конечной амплитуды в принятом приближении тождественна задаче о распространении плоских волн в среде с линейно меняющейся вязкостью.

Рассмотрим задачу о распространении в вязкой теплопроводящей среде цилиндрически симметричной волны конечной амплитуды, излучаемой пульсирующим по гармоническому закону бесконечным цилиндром радиуса r_0. Приближенное решение этой задачи для случая небольших нелинейных искажений формы волны можно получить методом Крылова—Боголюбова [1]. В случае сильных искажений формы волны, когда первоначально синусоидальная волна становится пилообразной, для решения рассматриваемой задачи используется метод, примененный в [2].

Полная система уравнений задачи имеет вид:
уравнение движения

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{\partial P}{\partial r} + b\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right), \tag{1}$$

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v) + \frac{\rho v}{r} = 0, \tag{2}$$

приближенное уравнение состояния

$$P = P_0 + c_0^2(\rho - \rho_0) + \frac{\gamma - 1}{2}\frac{\rho_0}{c_0^2}(\rho - \rho_0)^2. \tag{3}$$

Здесь v — скорость среды, ρ — плотность, P — давление, r — цилиндрическая координата, c_0 — скорость звука, $b = \frac{4}{3}\eta + \zeta + \varkappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)$, η, ζ — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкостей, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, $\gamma = c_p/c_v$ в случае газов, где c_p и c_v — удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме, а в случае жидкости $\gamma = \left(\frac{\partial c^2}{\partial \rho}\right)\frac{\rho_0}{c_0^2} + 1$.

Индексом 0 обозначены равновесные значения величин. Присутствие коэффициента теплопроводности в выражении для b обусловлено объединением членов с вязкостью в уравнении движения с так называемыми тепловыми членами уравнения состояния. Такое объединение возможно при условии малости поглощения на длине волны.

Перейдем от переменных Эйлера r к переменным Лагранжа R, связанным с r соотношением $r=R+\xi(R, t)$, где ξ — смещение частиц среды. Тогда после исключения из (1) P с помощью (3) и (2), с точностью до квадратичных по амплитуде величин, ограничиваясь случаем $kR \gg 1$ (k — волновое число), получим

$$\ddot{\xi} - c_0^2\xi'' - c_0^2\frac{\xi'}{R} + c_0^2\frac{\xi}{R^2} + (\gamma+1)\ddot{\xi}\xi' - \frac{b}{\rho_0}\dot{\xi}'' = 0. \qquad (4)$$

Граничное условие на поверхности цилиндра запишем в виде

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = v_0 \sin(\omega t \mp kR_0), \qquad (5)$$

где ω — частота, v_0 — амплитуда скорости пульсаций цилиндра. Здесь и далее знак плюс относится к случаю расходящейся, а знак минус — к случаю сходящейся волны. Производя расчет, полностью аналогичный приведенному в [3], получим приближенное решение задачи (4, 5) методом Крылова—Боголюбова, которое можно представить следующим образом:

$$v = v_0 e^{\mp a(R-R_0)}\sqrt{\frac{R_0}{R}}\sin\left(\omega t \mp kR + \frac{1}{2kR_0}\right) -$$
$$- v_0 e^{\mp a(R-R_0)}\sqrt{\frac{R_0}{R}}\frac{1}{2kR}\cos\left(\omega t \mp kR - \frac{1}{2kR_0}\right) -$$
$$- v_0^2 R_0\frac{k(\gamma+1)}{2c_0}e^{\mp 2a(R-R_0)}\sqrt{\frac{R_0}{R}}\left|1 - \sqrt{\frac{R}{R_0}}\right|\sin 2\left(\omega t \mp kR + \frac{1}{2kR_0}\right), \qquad (6)$$

где $a = b\omega^2/2\rho_0 c_0^3$.

Это решение применимо при условии

$$e^{\mp a(R-R_0)}\frac{v_0}{c_0}\frac{\gamma+1}{2}kR_0\left|1 - \sqrt{\frac{R}{R_0}}\right| \ll 1. \qquad (7)$$

Решение (6) показывает, что в первоначально монохроматической цилиндрической волне при ее распространении нарастает вторая гармоника, что на спектральном языке описывает искажение формы волны. Постепенно рост второй гармоники замедляется, она достигает максимума, а потом затухает, так что волна вновь становится монохроматичной. Однако могут быть случаи, когда условие (7) не выполняется в некотором интервале значений R и, следовательно, решение (6) становится неприменимым.

Для описания таких случаев воспользуемся методом, примененным в [2]. Для этого в уравнении (4) перейдем от переменных ξ, t, R к переменным v, $\tau = t - R/c_0$ и $R' = \mu R$, где μ — малый параметр. Удерживая в преобразованном уравнении лишь малые члены не выше второго порядка малости по малым параметрам v_0/c_0, $1/kR$ и μ и возвращаясь затем от R' к R, получим

$$\frac{\partial v}{\partial R}+\frac{v}{2R}-\alpha v\,\frac{\partial v}{\partial \tau}=\delta\,\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}\,, \tag{8}$$

где $\alpha=(\gamma+1)/2c_0^2$ и $\delta=b/2\rho_0 c_0^3$.

Решение задачи (8), (5) может быть проведено поэтапно. При этом мы будем рассматривать наиболее интересный случай больших значений числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re}=\alpha v_0/2\omega\delta\approx\alpha v v_\tau/\delta v_{\tau\tau}\gg 1.$$

Тогда на первом этапе распространения волны диссипативные процессы несущественны и вязким членом в уравнении (8) можно пренебречь. Решение уравнения (8) без вязкого члена, удовлетворяющее граничному условию (5), можно записать в виде

$$\omega\tau=\mathrm{Arc}\sin\Phi-2Z_0\,|\,1-\sqrt{R/R_0}\,|\,\Phi, \tag{9}$$

где $$\Phi=v\sqrt{R}/v_0\sqrt{R_0}\ \text{ и }\ Z_0=\alpha\omega v_0 R_0.$$

Как показывает графический анализ соотношения (9), функция $\Phi(\tau)$, описывающая волновой профиль, вследствие роста углового коэффициента прямой $2Z_0\,|\,1-\sqrt{R/R_0}\,|$ искажается по мере удаления волны от точки R_0 и при $2Z_0\,|\,1-\sqrt{R/R_0}\,|>1$ вообще становится неоднозначной. Физически это означает образование разрыва в профиле волны. Хотя координата формирования разрыва R_1, как в случае расходящейся цилиндрической волны, так и в случае сходящейся цилиндрической волны, определяется одним и тем же соотношением $k\sqrt{R_0}\,|\sqrt{R_0}-\sqrt{R_1}\,|=1/M^*$, где $M^*=(\gamma+1)\,v_0/2c_0$ — акустический аналог числа Маха, которое можно переписать в терминах безразмерной координаты $Z=\alpha\omega v_0 K$ в виде

$$2Z_0\,|\,1-\sqrt{Z_1/Z_0}\,|=1 \tag{10}$$

между обеими волнами имеется существенное различие.

Для расходящихся цилиндрических волн соотношение (10) выполняется при любых Z_0 как больших, так и малых, так что на некоторых расстояниях R_1 тем больших, чем меньше Z_0, волна непременно становится разрывной.

В случае же сходящихся цилиндрических волн (текущая координата $R<R_0$) Z_0 должно быть достаточно велико. В самом деле, при $Z_0={}^1/_2$ разрывное решение формируется согласно (10) в точке $R=0$, а при $Z_0<{}^1/_2$ не формируется нигде, т. е. при уменьшении Z_0, что соответствует уменьшению начального радиуса и начальной амплитуды пульсирующего цилиндра, волна сходится, так и не обращаясь в ударную волну. Таким образом, в случае сходящихся цилиндрических волн нелинейные эффекты сказываются существенно лишь при $Z_0\gg 1$.

Рассмотрение точки $R=0$ на основе решения (9) неправомерно (уравнение (8) получено в предположении $kR\gg 1$). Следует рассматривать некоторую малую область kR, охватывающую ось цилиндра и удовлетворяющую условию $kR\gg 1$, так что проведенные рассуждения относительно точки $R=0$ носят качественный характер. Заметим, что при $R_0\to\infty$ формула (10) переходит в обычное соотношение для плоских волн $k\,|\,x_1-x\,|={}^1/M^*$ (см., например, [2]).

В соответствии с решением (9) приближенно можно считать, что начиная со значений

$$2Z_0 \mid 1-\sqrt{Z_2/Z_0}=\frac{\pi}{2} \tag{11}$$

волна приобретает пилообразную форму и амплитуда скачка расходящейся (или сходящейся) цилиндрически волны изменяется по закону

$$v\sqrt{R}=v_0\sqrt{R_0}/1+2Z_0 \mid 1-\sqrt{R/R_0} \mid . \tag{12}$$

Исследование структуры образующихся разрывов может быть проведено на основе решения вспомогательной задачи о распространении одиночного скачка уплотнения либо путем численного интегрирования уравнения (8), либо путем отыскания квазистационарного решения. Остановимся на последнем решении.

Вводя новую независимую переменную x и новую функцию w в соответствии с формулами

$$x=2\sqrt{RR_0} \text{ и } w=v\sqrt{R/R_0}, \tag{13}$$

преобразуем уравнение (8)

$$\frac{\partial w}{\partial x}-\alpha w\frac{\partial w}{\partial \tau}=(\delta x/2R_0)\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} . \tag{14}$$

Квазистационарное решение уравнения (14), справедливое при условии малости $\frac{\partial w}{\partial x}$ по сравнению с остальными членами уравнения (14), имеет вид

$$W=W_0\, th\,[\alpha W_0\tau/2\delta\,(x/2R_0)]. \tag{15}$$

При этом пренебрежение членом $\frac{\partial w}{\partial x}$ возможно, когда

$$2R_0(\alpha w_0)^2/2\delta \gg 1, \tag{16}$$

что в терминах безразмерных параметров можно переписать так:

$$2Z_0\,\mathrm{Re}\gg 1. \tag{17}$$

Соотношение (17) выполняется всегда как для расходящейся цилиндрической волны, так и для сходящейся, если $Z_0 \gg {}^1/_2\,\mathrm{Re}$ или в предельном случае

$$Z_0={}^1/_2\,\mathrm{Re}. \tag{18}$$

Вернемся теперь к задаче о распространении волны, излучаемой гармонически пульсирующим цилиндром. Принимая во внимание, что на расстояниях $Z \gg Z_2$ (см. рис. 1) (Z_2 определяется соотношением (11)) волна принимает пилообразную форму с разрывами на каждой длине волны, «амплитуда» которых изменяется в соответствии с (12) (структура их может быть приближенно описана формулой (15), при условии выполнения соотношения (17)), мы можем описать конфигурацию волны в области $Z \gg Z_2$ формулой вида

$$v\sqrt{R}=\frac{v_0\sqrt{R_0}}{1+2Z_0 \mid 1-\sqrt{R/R_0} \mid}\left(-\omega\tau+\pi\, th\frac{\omega\tau}{\Delta}\right), \tag{19}$$

где

$$\Delta=\frac{1+2Z_0 \mid 1-\sqrt{R/R_0} \mid}{2\pi\,\mathrm{Re}}\sqrt{R/R_0} \tag{20}$$

безразмерная ширина ударного фронта. Путем непосредственной подстановки (19) в (8) можно убедиться, что это выражение приближенно удовлетворяет уравнению (8) при условии выполнения (17).

Как следует из рассмотрения формулы (20), ширина фронта ударной волны не остается стационарной, а изменяется по мере распространения волны в среде. Здесь целесообразно отдельно рассмотреть расходящуюся и сходящуюся цилиндрические волны.

В случае расходящейся цилиндрической волны безразмерная ширина фронта Δ для любой точки $Z>Z_2$ больше, чем в точке Z_2. При этом сглаживание фронта происходит как за счет диссипации, пропорциональной $2Z_0|1-\sqrt{R/R_0}|$, так и за счет расходимости волны, пропорциональной $\sqrt{R/R_0}$. На некотором расстоянии Z_3 ширина фронта Δ может занять фазовый интервал порядка π. Это означает, что процесс «рассасывания» фронта приводит к обращению возмущений скорости пилообразной формы в синусоидальные. Определив точку Z_3 из условия $\Delta=\pi$, легко показать, что амплитуда волны в соответствии с (19) в этой точке пропорциональна v_0/Re, т. е. в случае больших чисел Рейнольдса является малой величиной второго порядка малости. Тем самым распространение волны в области $Z \gg Z_3$ может быть описано обычными линейными уравнениями акустики. Координату Z_3, соответствующую $\Delta=\pi$, определяем по формуле (20).

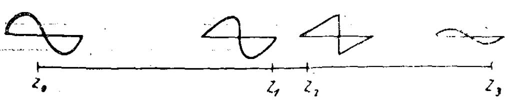

Рис. 1. Профиль расходящейся цилиндрически симметричной звуковой волны на различных расстояниях от излучателя

В случае $\sqrt{R/R_0} \gg 1$ и $(R/R_0) \gg \sqrt{R/R_0}$ условие, определяющее координату «рассасывания» пилообразной волны до синусоидальной, выглядит особенно просто

$$Z_3 \simeq \pi^2\mathrm{Re}, \tag{21}$$

где $Z_3=\alpha\omega v_0 R_3$.

Теперь на основе сопоставления характеристических параметров задачи для расходящейся цилиндрической волны процесс распространения последней может быть описан полностью. На рис. 1 точка Z_0 соответствует координате R_0, где задано возмущение скорости в форме (5); точка Z_1—R_1, где волна приобретает разрывной характер; Z_2—R_1, где волна имеет пилообразную форму $(Z_1 \simeq Z_2)$; Z_3—R_3, где «пила» обращается в синусоиду. Характер распространения волны существенно зависит от Z_0. Пусть $Z_0 \gg {}^1/{}_2\mathrm{Re}$. Тогда условие применимости квазистационарного решения (18) выполняется и формулы (19) и (20) правомерны. В среде наблюдаются процессы формирования волны пилообразной формы $(Z_2—Z_0)$ и «рассасывания» ее до синусоиды $(Z_3—Z_1)$. С ростом Z_0 область $(Z_1—Z_0)$ уменьшается, точка Z_1 приближается к точке Z_0, ширина фронта Δ уменьшается, стремясь к величине порядка $1/\mathrm{Re}$. Область «рассасывания» фронтов $(Z_3—Z_1)$ велика.

При уменьшении Z_0 в пределах применимости квазистационарного решения (18) картина распространения расходящейся цилиндрической волны меняется. Так, в случае $Z_0={}^1/{}_2\mathrm{Re}$ координата формирования разрыва Z_1 уже порядка Re, т. е. она приближается к точке Z_3. При этом минимальная ширина фронта порядка $0{,}1 \gg 1/\mathrm{Re}$, т. е. наблюдается преобладание расходимости над нелинейными эффектами, узкие фронты не формируются совсем.

При дальнейшем уменьшении Z_0 пользоваться решением (19), (20) нельзя, нарушено условие (18). Однако качественная картина процесса распространения расходящейся цилиндрической волны очевидна. Координата Z_1, удаляясь от точки Z_0, стремится к координате Z_3. Выше была отмечена тенденция увеличения минимальной ширины фронта с уменьшением Z_0. Это означает, что в случае $Z_0 < {}^1/_2\mathrm{Re}$ расходимость и поглощение приводят к тому, что волна затухает, не принимая пилообразной формы. Нелинейные эффекты выражены в этом случае крайне слабо и полное описание процесса дается полученным выше на основе метода Крылова — Боголюбова решением (6).

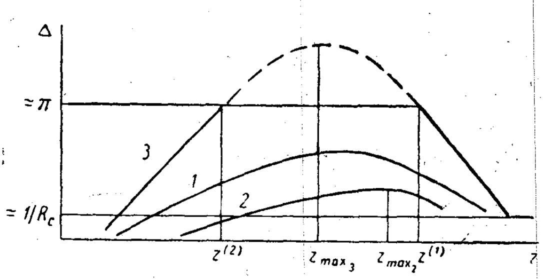

Рис. 2. Зависимость безразмерной ширины фронта сходящейся цилиндрически симметричной звуковой волны от расстояния от излучателя (кривые *1, 2, 3* соответствуют излучателям разного радиуса R_{01}, R_{02}, R_{03}, так что $R_{03} \gg R_{01} \gg R_{02}$).

В случае сходящейся цилиндрической волны безразмерная ширина фронта Δ имеет одновременно тенденцию к увеличению за счет коэффициента $2Z_0 \,|\, 1 - \sqrt{R/R_0}\,|$ и к уменьшению за счет сходимости пропорциональной $\sqrt{R/R_0}$ $(R < R_0)$. Безразмерная ширина фронта Δ как функция Z может быть представлена графически, как это показано на рис. 2. В соответствии с (20) Δ, равная в точке $Z_1 \simeq Z_2$ величине $\sim 1/\pi\mathrm{Re}$, сначала возрастает, достигая в точке $R_{\max} = (1+2Z_0)^2 R_0/16 Z_0^2$ максимума, равного $(1+2Z_0)^2/16\pi\mathrm{Re}Z_0$, а затем убывает по мере распространения волны в среде, стремясь к нулю при $R \to 0$.

В сходящейся цилиндрической волне пилообразная волна формируется всегда, если только начальный радиус пульсирующего цилиндра выбран достаточно большим, $Z_0 \gg 1$, иначе, как уже отмечалось (при $Z_0 < {}^1/_2$), волна сходится прежде, чем успеют сформироваться разрывы. В этом смысле для сходящейся цилиндрической волны условие применимости квазистационарного решения (18) выполняется всегда, т. е. структура фронта в любой точке $Z < Z_1$ может быть определена по графику рис. 2. Кривые *1*, *2* на рис. 2 соответствуют разным значениям параметра Z_0. При Z_0, стремящемся по порядку величины к величине числа Рейнольдса, $Z_{\max} = Z_0/_4$, а максимальная ширина фронта достигает величины порядка 0,05 и существенно больше $\Delta_{\min} = 1/\pi\mathrm{Re}$ (кривая *1*). Точка Z_1 при этом расположена в соответствии с (10) вблизи Z_0.

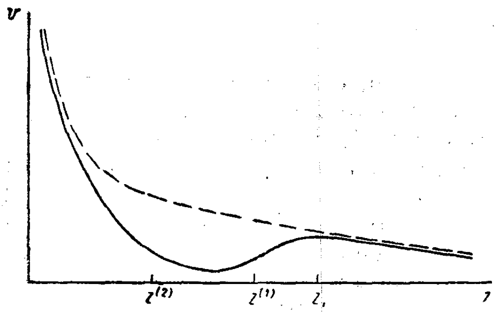

Рис. 3. Зависимость амплитуды скорости v сходящейся цилиндрически симметричной звуковой волны от расстояния от излучателя с учетом нелинейности и поглощения. Пунктирная кривая соответствует линейной теории

Кривая *2* соответствует значению $Z_0 = 5$. В этом случае координата соответствующая максимальной ширине фронта, расположена ближе к Z_0 $(Z_{\max} > Z_0/_4)$ и очень близко к Z_1. Ширина фронта возрастает незначительно.

Специально следует остановиться на случае таких больших значений $Z_0 \gg \mathrm{Re}$, когда максимальная безразмерная ширина фронта Δ_{max} в соответствии с (20) формально может оказаться большей или равной π (кривая *3* на рис. 2). Формула (20) справедлива лишь в пределах $\Delta \leqslant \pi$, так что кривая *3* не имеет физического смысла в области $Z^{(1)}-Z^{(2)}$, где точки $Z^{(1)}$ и $Z^{(2)}$, как отмечено на рис. 2 соответствуют $\Delta \simeq \pi$. В точке $Z^{(1)}$ амплитуда волны оказывается порядка v_0/Re, так что в области $Z^{(1)}-Z^{(2)}$ распространение сходящейся цилиндрической волны может быть описано формулами линейной акустики, пока увеличение амплитуды волны вследствие фокусировки не превысит падения амплитуды вследствие диссипации. Это происходит в области $Z \leqslant Z^{(2)}$.

Начиная с точки $Z^{(2)}$ формула (20) вновь применима, ширина фронта сходящейся цилиндрической волны, быстро уменьшаясь, стремится к нулю.

Интересно рассмотреть амплитуду сходящейся цилиндрической волны как функцию безразмерной координаты Z. Последняя нарастает до точки $Z_1 \simeq Z_2$, где образуется периодическая ударная волна, что вызывает уменьшение амплитуды вследствие сильной диссипации, пока увеличение амплитуды волны за счет сходимости не перекроет диссипативные потери. На рис. 3 приведена зависимость $v=v(Z)$ для случая $Z_0 \gg \mathrm{Re}$, пунктирной прямой отмечен ход амплитуды в соответствии с линейной теорией.

В заключение следует отметить, что в терминах уравнения (14) задача о распространении расходящейся цилиндрической волны эквивалентна задаче о распространении плоской волны в среде с линейно нарастающей вязкостью, а задача о распространении сходящейся цилиндрической волны эквивалентна задаче о распространении плоской волны в среде с линейно убывающей вязкостью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. О. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. ГИТТЛ, М., 1955.
2. Солуян С. И., Хохлов Р. В. «Вестн. Моск. ун-та», сер. физ., астрономии, № 3, 52—61, 1961.
3. Наугольных К. А. «Акустический журнал», V, вып. 1, 80—84, 1959.

Поступила в редакцию
18. 12 1962 г.

Кафедра
теории колебаний