Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1962

АСТРОНОМИЯ

Р. К. ЧОУДХАРИ

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

Примем за ось x линию, соединяющую два центра — линию центров. Начало координат поместим в точку, совпадающую с серединой расстояния между центрами. За единицу расстояния примем половину расстояния между центрами, а за единицу массы — сумму масс обоих центров. Далее, пусть масса центра c_2 будет m, тогда масса другого центра будет $1-m$; пусть также r_1 будет расстояние от центра c_1 до движущейся точки M; r_2 расстояние от центра c_2 до той же точки M. Будем иметь

$$r_1^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2,$$
$$r_2^2 = (x+1)^2 + y^2 + z^2.$$

Тогда дифференциальные уравнения движения будут иметь вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2(1-m)\frac{x-1}{r_1^3} - k^2 m\frac{x+1}{r_2^3},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2(1-m)\frac{y}{r_1^3} - k^2 m\frac{y}{r_2^3},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -k^2(1-m)\frac{z}{r_1^3} - k^2 m\frac{z}{r_2^3}.$$

Теперь введем вспомогательные переменные

$$\rho_i = r_i^2, \quad \sigma_i = r_i^{-3}, \quad (i=1,2), \tag{3}$$

так что

$$2\rho_i\frac{d\sigma_i}{dt} + 3\sigma_i\frac{d\rho_i}{dt} = 0, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\rho_1 &= (x-1)^2 + y^2 + z^2,\\ \rho_2 &= (x+1)^2 + y^2 + z^2,\end{aligned} \tag{5}$$

и уравнения движения имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2(1-m)(x-1)\sigma_1 - k^2m(1+x)\sigma_2,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2(1-m)y\sigma_1 - k^2my\sigma_2, \tag{6}$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -k^2(1-m)z\sigma_1 - k^2mz\sigma_2.$$

Система (6) допускает два интеграла: интеграл живых сил

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2(1-m)}{r_1} + \frac{2k^2m}{r_2} + h \tag{7}$$

и интеграл площадей

$$y\dot{z} - z\dot{y} = a.$$

Семи неизвестным x, y, z, ρ_1, ρ_2, σ_1, σ_2 соответствуют семь уравнений (4), (5) и (6).

Предположим, что эти уравнения удовлетворяются рядами

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu t^\nu, \quad y = \sum_{\nu=0}^{\alpha} \beta_\nu t^\nu, \quad z = \sum_{\nu=0}^{\alpha} z_\nu t^\nu,$$
$$\rho_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu, \quad \rho_2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu t^\nu, \quad \sigma_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^\nu, \quad \sigma_2 = \sum_{\nu=0}^{\alpha} d_\nu t^\nu. \tag{8}$$

Мы не используем интегралы (7), которые будут полезны для контроля над вычислением координаты в любой момент времени. Напишем для сокращения

$$(n+2)^{(2)} = (n+1)(n+2);$$
$$(\alpha c)_n = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu c_{n-\nu}. \tag{9}$$

Подставляя ряды (8) в уравнения (6), получим

$$(n+2)^{(2)}\alpha_{n+2} = -k^2(1-m)(\alpha c)_n - k^2m(\alpha d)_n + k^2(1-m)c_n - k^2md_n,$$
$$(n+2)^{(2)}\beta_{n+2} = -k^2(1-m)(\beta c)_n - k^2m(\beta d)_n, \tag{10}$$
$$(n+2)^{(2)}r_{n+2} = -k^2(1-m)(rc)_n - k^2m(rd)_n.$$

Далее из уравнения (5) следует

$$a_n = (\alpha\alpha)_n + (\beta\beta)_n + (rr)_n - 2\alpha_n + \epsilon_n,$$
$$b_n = (\alpha\alpha)_n + (\beta\beta)_n + (rr)_n + 2\alpha_n + \epsilon_n, \tag{11}$$

где $\epsilon_n = 1$ при $n = 0$, а $\epsilon_n = 0$ при $n \neq 0$ и

$$-2na_0c_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} (3n-\nu)c_\nu a_{n-\nu},$$
$$-2nb_0d_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} (3n-\nu)d_\nu b_{n-\nu}. \tag{12}$$

Взяв начальные значения x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ в момент $t = 0$ $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, r_0, r_1)$, мы можем определить 6 постоянных интегрирования. Из (11) и (12) видно:

$$a_0 = (\alpha_0 - 1)^2 + \beta_0^2 + r_0^2, \quad b_0 = (\alpha_0 + 1)^2 + \beta_0^2 + r_0^2,$$

$$c_0 = a_0^{-\frac{3}{2}}, \quad d = b_0^{-\frac{3}{2}},$$

$$a_1 = 2(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1 + r_0r_1) - 2\alpha_1,$$

$$b_1 = 2(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1 + r_0r_1) - 2\alpha_1,$$

$$-2a_0c_1 = 3a_1a_0^{-\frac{3}{2}},$$

$$-2b_0d_1 = 3b_1b_0^{-\frac{3}{2}}.$$

Затем вычисляем α_2, β_2, r_2. Подставляя значения a_1, b_1, c_1, d_1, получим

$$1.2\ \alpha_2 = k^2(1 - m)a_0^{-\frac{3}{2}}(1 - \alpha_0) - k^2mb_0^{-\frac{3}{2}}(1 + \alpha_0),$$

$$1.2\ \beta_2 = k^2(1 - m)\beta_0a_0^{-\frac{3}{2}} - k^2m\beta_0b_0^{-\frac{3}{2}},$$

$$1.2\ r_2 = -k^2(1 - m)r_0a_0^{-\frac{3}{2}} - k^2mr_0b_0^{-\frac{3}{2}},$$

$$a_2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + r_1^2 - k^2mb_0^{-\frac{3}{2}}\{(\alpha_0^2 - 1) + \beta_0^2 + r_0^2\} - k^2(1 - m)a_0^{\frac{1}{2}}.$$

Таким же образом получим значения α_3, β_3, r_3, a_3, b_3, c_3, d_3, и тогда ряды можно записать в виде

$$x = \alpha_0 + \alpha_1t - \frac{k^2t^2}{2!}[(1 - m)(\alpha_0 - 1)a_0^{-\frac{3}{2}} + m(\alpha_0 + 1)b_0^{-\frac{3}{2}}] + \alpha_3t^3 + \ldots,$$

$$y = \beta_0 + \beta_1t - \frac{k^2t^2}{2!}\beta_0[(1 - m)a_0^{-\frac{3}{2}} + mb_0^{-\frac{3}{2}}] + \beta_3t^3 + \ldots,$$

$$z = r_0 + r_1t - \frac{k^2t^2}{2!}r_0[(1 - m)a_0^{-\frac{3}{2}} + mb_0^{-\frac{3}{2}}] + r_3t^3 + \ldots,$$

$$\rho_1 = (\alpha_0 - 1)^2 + \beta_0^2 + r_0^2 + 2t\{\alpha_1(\alpha_0 - 1) + \beta_0\beta_1 + r_0r_1\} +$$

$$+ t^2[\alpha_1^2 + \beta_1^2 + r_1^2 - k^2mb_0^{-\frac{3}{2}}\{(\alpha_0^2 - 1) + \beta_0^2 + r_0^2\} - k^2(1 - m)a_0^{-\frac{1}{2}}] + a_3t^3 + \ldots,$$

$$\rho_2 = (\alpha_0 + 1)^2 + \beta_0^2 + r_0^2 + 2t\{\alpha_1(\alpha_0 + 1) + \beta_0\beta_1 + r_0r_1\} +$$

$$+ t^2[\alpha_1^2 + \beta_1^2 + r_1^2 - k^2(1 - m)a_0^{-\frac{3}{2}}\{(\alpha_0^2 - 1) + \beta_0^2 + r_0^2\} - k^2mb_0^{-\frac{1}{2}}] +$$

$$+ b_3t^3 + \ldots,$$

$$\sigma_1 = a_0^{-\frac{3}{2}} - 3a_0^{-\frac{5}{2}}\{\alpha_1(\alpha_0 - 1) + \beta_0\beta_1 + r_0r_1\}t -$$

$$-\frac{3}{2}a_0^{-\frac{5}{2}}[\alpha_1^2+\beta_1^2+r_1^2-k^2m\{(\alpha_0^2-1)+\beta_0^2+r_0^2\}b_0^{-\frac{3}{2}}-k^2(1-m)a_0^{-\frac{1}{2}}]t^2+$$

$$+\frac{15}{2}a_0^{-\frac{7}{2}}[\alpha_1(\alpha_0-1)+\beta_0\beta_1+r_0r_1]^2t^2+c_3t^3+\ldots,$$

$$\sigma_2=b_0^{-\frac{3}{2}}-3b_0^{-\frac{5}{2}}\{\alpha_1(\alpha_0+1)+\beta_1\beta_0+r_1r_0\}t+d_2t^2+\ldots$$

Чтобы пользоваться решением в виде рядов (8), необходимо проверить их сходимость. Полагая .

$$H_\nu=\frac{\lambda^\nu}{(\nu+2)^{(2)}},\qquad (\lambda>0) \tag{13}$$

$$s_n=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}, \tag{14}$$

можно написать тождество, которое давал Стеффенсон *) в виде

$$\sum_{\nu=0}^{n}H_\nu H_{n-\nu}=2\lambda^n\frac{2s_{n-1}+n+1}{(n+4)^{(3)}}, \tag{15}$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}H_\nu H_{n-\nu}=\lambda^n\frac{4s_{n-1}+\frac{3}{2}n-1-\frac{3}{n+1}}{(n+4)^{(3)}},\quad (n\geqslant 1)\ldots \tag{16}$$

$$\sum_{\nu=2}^{n-2}H_\nu H_{n-\nu}=\frac{2}{3}\lambda^n\frac{6s_n+n-10-\frac{12}{n}}{(n+4)^{(3)}},\quad (n\geqslant 4) \tag{17}$$

так как

$$\lambda^{-n}H_\nu H_{n-\nu}=\left(\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{n-\nu+1}\right)\frac{1}{(n+3)^{(2)}}-\left(\frac{1}{\nu+2}+\frac{1}{n-\nu+2}\right)\frac{1}{(n+4)^{(2)}}. \tag{18}$$

Далее, из тождества

$$\lambda^{-n}\nu H_\nu H_{n-\nu}=\left(\frac{n+1}{n-\nu+1}-\frac{1}{\nu+1}\right)\frac{1}{(n+3)^{(2)}}-\left(\frac{n+2}{n-\nu+2}-\frac{2}{\nu+2}\right)\frac{1}{(n+4)^{(2)}} \tag{19}$$

получим

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu H_\nu H_{n-\nu}=\frac{n\lambda^n}{(n+4)^{(3)}}\left(2s_{n+1}+\frac{n}{2}-2-\frac{3}{n+1}\right),\ (n\geqslant 2). \tag{20}$$

Полагая $n\geqslant 3$, напишем равенство (11), выделяя постоянные интегрирования в виде

$$a_n=2(\alpha_0\alpha_n+\beta_0\beta_n+r_0r_n+\alpha_1\alpha_{n-1}+\beta_1\beta_{n-1}+r_1r_{n-1})+$$

$$+\sum_{\nu=2}^{n-2}(\alpha_\nu\alpha_{n-\nu}+\beta_\nu\beta_{n-\nu}+r_\nu r_{n-\nu})^{-2\alpha_n}. \tag{21}$$

и учтем, что сумма равна нулю при $n=3$.

* Steffenson. Mat. phys. medd. Dans. Vidiu Sci. No. 31 (3), 1957.

Теперь допустим, что для определенного $n \geqslant 3$ и $2 \leqslant \nu \leqslant n$ верны неравенства

$$|\alpha_\nu| \leqslant \alpha H_\nu, \quad |\beta_\nu| \leqslant \beta H_\nu, \quad |r_\nu| \leqslant r H_\nu, \tag{22}$$

где α, β, r — положительные постоянные. В таком случае из (21) получается неравенство

$$|a_n| \leqslant 2(\alpha|\alpha_0| + \beta|\beta_0| + r|r_0|)H_n + 2(\alpha|\alpha_1| + \beta|\beta_1| + r|r_1|)H_{n-1} + 2\alpha H_n + \\ + (\alpha^2 + \beta^2 + r^2)\sum_{\nu=2}^{n-2} H_\nu H_{n-\nu}. \tag{23}$$

С помощью (17) находим

$$|a_n| \leqslant 2[\alpha(|\alpha_0| + 1) + \beta|\beta_0| + r|r_0|]\frac{\lambda^n}{(n+2)^{(2)}} + \\ + 2(\alpha|\alpha_1| + |\beta_1| + r|r_1|)\frac{\lambda^{n-1}}{(n+1)^{(2)}} + \\ + \frac{2}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + r^2)\left(6s_n + n - 10 - \frac{12}{n}\right)\frac{\lambda^n}{(n+4)^{(3)}}. \tag{24}$$

В этом выражении последний член отбрасывается для $n \leqslant 3$, следовательно, (24) является справедливым для $n \geqslant 3$. Достаточное условие выполнимости соотношения $|a_n| < AH_n$, где A — некоторое заданное число, запишется в виде следующего соотношения:

$$\text{правая часть (24)} \leqslant A\frac{\lambda^n}{(n+2)^{(2)}},$$

т. е.

$$\alpha(|\alpha_0| + 1) + \beta|\beta_0| + r|r_0| + (\alpha|\alpha_1| + \beta|\beta_1| + r|r_1|)\frac{n+2}{n\lambda} + \\ + \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + r^2)\left(6s_n + n - 10 - \frac{12}{n}\right)\frac{n+1}{(n+4)^{(2)}} \leqslant \frac{A}{2}. \tag{25}$$

Будем искать это условие в виде, не зависящем от n. Можно написать

$$\frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n} \leqslant \frac{5}{3}, \quad (n \geqslant 3). \tag{26}$$

Очевидно, что

$$\left(6s_n + n - 10 - \frac{12}{n}\right)\frac{n+1}{(n+4)^{(2)}} \leqslant 2$$

при $n = 3$ и $n = 4$ предполагается, что $n \geqslant 5$, тогда

$$s_n \leqslant s_k + \frac{n-k}{k+1}, \quad (n \geqslant k). \tag{27}$$

Откуда, в частности,

$$s_n \leqslant s_5 + \frac{n-5}{6} = \frac{n}{6} + \frac{29}{20}, \quad (n \geqslant 5).$$

Подставим это неравенство в $6s_n + n - 10 - \dfrac{12}{n}$, получим

$$\frac{2n - 1{,}3 - \dfrac{12}{n}}{n+4}\,\frac{n+1}{n+3} < 2. \tag{28}$$

И из равенства (25) имеем

$$\alpha(|\alpha_0|+1)+\beta|\beta_0|+r|r_0|+\frac{5}{3\lambda}(\alpha|\alpha_1|+\beta|\beta_1|+r|r_1|)+$$
$$+\frac{2}{3}(\alpha^2+\beta^2+r^2)\leqslant\frac{A}{2}, \tag{29}$$

которое является условием для того, чтобы $|a_n|\leqslant AH_n$ при $n\geqslant 3$. Сравнивая два результата (11), мы видим, что достаточное условие для $|b_n|\leqslant BH_n$ является точно таким же, как в (29)

$$\alpha(|\alpha_0|+1)+\beta|\beta_0|+r|r_0|+\frac{5}{3\lambda}(\alpha|\alpha_1|+\beta|\beta_1|+r|r_1|)+$$
$$+\frac{2}{3}(\alpha^2+\beta^2+r^2)\leqslant\frac{B}{2}\leqslant\frac{A}{2}, \tag{30}$$

если $\max(A, B)=A$.

Теперь рассмотрим (12). Предположим, что для определенного $n\geqslant 2$ мы доказали при $1\leqslant\nu\leqslant n$

$$|a_\nu|\leqslant AH_\nu, \quad |b_\nu|\leqslant AH_\nu, \tag{31}$$

а для $0\leqslant\nu\leqslant n-1$

$$|c_\nu|\leqslant CH_\nu, \quad |d_\nu|\leqslant DH_\nu. \tag{32}$$

Первое уравнение (12) дает

$$2na_0|c_n|\leqslant CA\left(3n\sum_{\nu=0}^{n-1}H_\nu H_{n-\nu}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu H_\nu H_{n-\nu}\right),$$

т. е.

$$2na_0|c_n|\leqslant CA\left[3n\lambda^n\frac{4s_{n+1}+\frac{3}{2}n-1-\frac{3}{n+1}}{(n+4)^{(3)}}+n\lambda^n\frac{2s_{n+1}+\frac{n}{2}-2-\frac{3}{n+1}}{(n+4)^{(3)}}\right]=$$
$$=CA\left[n\lambda^n\frac{14s_{n+1}+5n-5-\frac{12}{n+1}}{(n+4)^{(3)}}\right],$$

т. е.

$$2a_0|C_n|\leqslant CA\left(14s_{n+1}+5n-5-\frac{12}{n+1}\right)\frac{\lambda^n}{(n+4)^{(3)}}.$$

Поэтому достаточное условие для $|c_n|\leqslant CH_n$ можно записать в виде

$$2a_0|c_n|\leqslant CA\left(14s_{n+1}+5n-5-\frac{12}{n+1}\right)\frac{\lambda^n}{(n+4)^{(3)}}\leqslant 2a_0C\frac{\lambda^n}{(n+2)^{(2)}},$$

т. е.

$$\left(14s_{n+1}+5n-5-\frac{12}{n+1}\right)\frac{n+1}{(n+4)^{(2)}}\leqslant\frac{2a_0}{A}.$$

Мы докажем, что это условие можно выразить в виде

$$3A\leqslant a_0, \tag{33}$$

которое не зависит от n. Поэтому нам надо доказать, что

$$\left(14s_{n+1}+5n-5-\frac{12}{n+1}\right)\frac{n+1}{(n+4)^{(2)}}\leqslant 6$$

или

$$s_{n+1} \leqslant \frac{n-1}{14} + 3 + \frac{24}{7(n+1)}. \tag{34}$$

Из таблицы Гловера* ясно, что (34) остается справедливо для $n < 12$, а для $n \geqslant 12$ воспользуемся соотношением

$$s_{n+1} \leqslant s_{13} + \frac{n-12}{14}.$$

Подставим это значение в (34) и после упрощения получим

$$s_{13} < \frac{53}{14} + \frac{24}{7(n+1)}.$$

Легко показать, что неравенство тождественно удовлетворяется и, следовательно, (33) и (34) также удовлетворяются. Точно также можно показать, что для $|d_n| \leqslant DH_\nu$ достаточным условием является

$$3A \leqslant b_0. \tag{35}$$

Наконец в системе уравнений (10) напишем первое уравнение, отделяя постоянные интегрирования в виде ($n \geqslant 2$)

$$(n+2)^{(2)}\alpha_{n+2} = -k^2(1-m)(\alpha_0 c_n + \alpha_1 c_{n-1}) - k^2 m(\alpha_0 d_n + \alpha_1 d_{n-1}) -$$

$$-k^2(1-m)\sum_{\nu=2}^{n} \alpha_\nu c_{n-\nu} - k^2 m \sum_{\nu=2}^{n} \alpha_\nu d_{n-\nu} + k^2(1-m) c_n - k^2 m d_n. \tag{36}$$

$$(n+2)^{(2)}|\alpha_{n+2}| \leqslant k^2\{|\alpha_0|(1-m)C + |\alpha_0| mD + (1-m)C + mD\} H_n +$$

$$+ k^2\{(1-m)|\alpha_1| C + m|\alpha_1| D\} H_{n-1} + k^2(1-m)\alpha C \sum_{\nu=2}^{n} H_\nu H_{n-\nu} +$$

$$+ k^2 m\alpha D \sum_{\nu=2}^{n} H_\nu H_{n-\nu}.$$

Для сокращения положим

$$P = \xi(1-m)C + mD\xi k^2,$$

тогда

$$(n+2)^{(2)}|\alpha_{n+2}| \leqslant P(|\alpha_0|+1) H_n + P|\alpha_1| H_{n-1} + \alpha P \sum_{\nu=2}^{n} H_\nu H_{n-\nu},$$

т. е

$$(n+2)^{(2)}|\alpha_{n+2}| \leqslant P(|\alpha_0|+1)\frac{\lambda^n}{(n+2)^{(2)}} + P|\alpha_1|\frac{\lambda^{n-1}}{(n+1)^{(2)}} +$$

$$+ \alpha P\left(4s_{n-1} + \frac{4n-7}{3} + \frac{2}{n+1}\right)\frac{\lambda^n}{(n+4)^{(3)}}. \tag{37}$$

---

* Glover T. W. Ann. Asbor, Michigen, 1923, p. 456.

Для того чтобы $|\alpha_{n+2}| \leqslant \alpha H_{n+2}$, правая сторона (37) должна быть $\leqslant (n+2)^{(2)}\alpha H_{n+2}$, и поэтому, умножая на $\lambda^{-n}\frac{(n+4)^{(2)}}{(n+2)^{(2)}}$, мы напишем

$$P(|\alpha_0|+1)\frac{(n+3)(n+4)}{(n+1)^2(n+2)^2}+P|\alpha_1|\frac{(n+3)(n+4)\lambda^{-1}}{(n+2)(n+1)^2 n}+$$

$$+\frac{\alpha P}{(n+1)(n+2)^2}\left(4s_{n-1}+\frac{4n-7}{3}+\frac{2}{n+1}\right)\leqslant \alpha\lambda^2. \tag{38}$$

Очевидно, что для $n \geqslant 2$

$$\frac{(n+3)(n+4)}{(n+1)^2(n+2)^2}=\left(1+\frac{2}{n+2}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant\frac{5}{24}, \tag{39}$$

$$\frac{(n+3)(n+4)}{n(n+1)^2(n+2)}=\left(1+\frac{2}{n+2}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant\frac{5}{12}. \tag{40}$$

Наконец видно, что

$$\frac{1}{(n+2)^2(n+1)}\left(4s_{n-1}+\frac{4n-7}{3}+\frac{2}{n+1}\right)\leqslant\frac{5}{48} \tag{41}$$

и поэтому условие (38) вводится в виде

$$P(|\alpha_0|+1)\frac{5}{24}+P|\alpha_1|\frac{5}{12}\lambda^{-1}+\alpha P\frac{5}{48}\leqslant\alpha\lambda^2,$$

т. е.

$$1+|\alpha_0|+\frac{4}{\lambda}|\alpha_1|+\alpha\leqslant\frac{48\alpha}{5P}\lambda^2. \tag{42}$$

Для остальных уравнений (10) мы можем написать достаточные условия в следующем виде:

$$|\beta_0|+\frac{4}{\lambda}|\beta_1|+\beta\leqslant\frac{48\beta}{5p}\lambda^2, \tag{43}$$

$$|r_0|+\frac{4}{\lambda}|r_1|+r\leqslant\frac{48r}{5p}\lambda^2. \tag{44}$$

Подведем кратко итог.

Если (22) удовлетворяется для $2\leqslant\nu\leqslant 3$, (31) для $1\leqslant\nu\leqslant 2$ и (32) для $0\leqslant\nu\leqslant 2$ и, кроме того, все неравенства (29), (30), (33), (35), (42) — (44) удовлетворены, то все ряды системы (8) сходятся, если сходится ряд $\Sigma H_\nu t^\nu$, т. е. если $|t|\leqslant\frac{1}{\lambda}$.

Возникает вопрос, можно ли всегда выбрать λ, α, β, r A, B, C, D при начальных значениях α_0, α_1, β_0, β_1, r_0, r_1 такими, чтобы все неравенства, указанные выше, могли бы быть удовлетворены. На этот вопрос можно ответить утвердительно. λ всегда можно выбрать столь большой, чтобы (42), (43), (44) удовлетворялись, а (29) и (30) можно представить в виде

$$\alpha(|\alpha_0|+1)+\beta|\beta_0|+r|r_0|+\frac{2}{3}(\alpha^2+\beta^2+r^2)\leqslant\frac{A}{2}. \tag{45}$$

(33) и (35) не изменяются. Затем можно выбрать A столь малым, чтобы можно было удовлетворить (33) и (35). Затем α, β, r выбираются такими малыми величинами, чтобы (45) осталось справедливым.

Пусть $m_1 = 1 - \frac{1}{329\,390}$, $m_2 = \frac{1}{329\,390}$ и начальные значения

$$\alpha_0 = 0{,}4; \quad \beta_0 = 0; \quad r_0 = 0;$$

$$\alpha_1 = 0{,}015; \quad \beta_1 = -0{,}01; \quad r_1 = -0{,}01.$$

Здесь мы примем за единицу длины расстояние между двумя центрами, вследствие чего в условии (42) получим $|\alpha_0| + \frac{1}{2}$ вместо $|\alpha_0| + 1$. Остальные условия сходимости остаются прежними.

Теперь видно, что все достаточные условия удовлетворяются, если выберем

$$\lambda = 1/25, \quad \alpha = 0{,}001, \quad \beta = 0{,}002, \quad r = 0{,}003.$$

$$A = 0{,}01, \quad C = 0{,}018, \quad D = 0{,}15.$$

Ряды (8) сходятся по крайней мере для $|t| \leqslant 25$, $k^2 = 0{,}0003$. Единица времени—сутки.

Поступила в редакцию
9.11 1962 г.

Кафедра
небесной механики