Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1962

С. Ф. ШУШУРИН

ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Показано, что уравнение комплексного скалярного поля со степенной нелинейностью имеет физически допустимые решения. Предложена новая математическая основа квантования.

В работе [1] было проведено исследование существования частицеподобных решений квазилинейного уравнения комплексного скалярного поля с кубической нелинейностью. Настоящая работа посвящена изучению существования частицеподобных решений аналогичного уравнения со степенной нелинейностью относительно искомой функции и исследованию спектра его решений.

В рассматриваемом ниже конкретном случае сферических координат, согласно [2]*, оказывается возможным выделить угловую часть с помощью разложения решения в ряд по полной системе собственных функций линейного дифференциального оператора, входящего аддитивно в уравнение, а также свойств этих собственных функций.

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение в частных производных, а именно уравнение, содержащее аддитивно нелинейность только по искомой функции

$$\widehat{L}_r y + \widehat{L}_\theta y + \Phi(y) = 0, \tag{1}$$

где $\widehat{L}_r$ и $\widehat{L}_\theta$ — радиальная и азимутальная части оператора Лапласа. Будем искать решение в виде

$$y = \sum_{k=m}^{\infty} R_k(r) P_k^{(m)}(\cos\theta), \tag{2}$$

где $R_k(r)$ — функции, зависящие только от r, а $P_k^{(m)}(\cos\vartheta)$ — обобщенные полиномы Лежандра. Подставляя (2) в (1), мы получим ряд, в который будут входить произведения полиномов Лежандра и их степени. Поскольку полином в целой степени и произведение полиномов также являются полиномами, то их можно представить в виде линейной комбинации полиномов Лежандра.

---

* В. Б. Глазко в 1956 г. предлагал подобное решение этого вопроса.

Собирая далее полиномы одного порядка, можно представить нелинейную часть в виде

$$\Phi(y) = \sum_{k=m}^{\infty} F_k(r) P_k^{(m)}(\cos\vartheta), \tag{3}$$

где F_k зависят только от r. Подставим (2) и (3) в (1). Поскольку $\widehat{L}_\theta P_k^{(m)} = mP_k^{(m)}$, то, рассматривая k-й член для нахождения радиальных функций, получим уравнение

$$\widehat{L}_r R_k + mR_k + F_k = 0, \tag{4}$$

что означает выделение угловой части. Аналогично можно провести выделение временной части, только разлагать решение нужно по собственным функциям оператора времени, т. е. по тригонометрическим функциям. Нам это не понадобится, так как мы будем рассматривать стационарную задачу.

Выбирая нелинейный член функции Лагранжа для комплексного скалярного поля в виде

$$F(v) = -\frac{\lambda}{\frac{n}{2}+1} v^{\frac{n}{2}+1},$$

получим согласно стандартной процедуре уравнение скалярного комплексного поля в стационарном случае

$$\nabla^2 u + [\varepsilon^2 - m_0^2\{1 + (u^*u)^n\}]\, u = 0. \tag{5}$$

Для простоты будем искать решение в виде разложения по зональным сферическим функциям ($m = 0$)

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} R_k Y_k^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} R_k P_k^{(m)} e^{im\varphi},$$

где $P_k^{(m)}$ — полиномы Лежандра. u^*u от φ зависеть не будет (физически это решение соответствует системе с моментом количества движения, равным нулю).

Уравнение (4) можно записать в виде

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(R_k r) + (\varepsilon^2 - m_0^2) R_k + m_0^2 F_k = 0. \tag{6}$$

Для нахождения F_k нужно знать коэффициенты разложения степеней и произведений обобщенных полиномов Лежандра по полиномам Лежандра. Можно воспользоваться формулами Неймана, приведенными в [3].

Разложение в простых случаях будет следующим:

$$P_0^2 = P_0,\quad P_1^2 = \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_0,\quad P_0P_1 = P_1,$$

$$P_2^2 = \frac{18}{35}P_4 + \frac{2}{7}P_2 + \frac{1}{5}P_0,\quad P_0P_2 = P_2,\quad P_1P_2 = \frac{3}{5}P_3 + \frac{2}{5}P_1 \text{ и т. д.}$$

В случае $n = 1$, т. е. кубической нелинейности

$$(u^*u)\,u = \sum_{k=0}^{\infty} F_k P_k,$$

где с точностью до гармоник первого порядка

$$F_0 = R_0^3 + \frac{1}{3} R_1^2 R_0 + \frac{2}{3} R_0 R_1^2,$$

$$F_1 = 3R_0^2 R + \frac{3}{5} R_1^3,$$

$$F_2 = \frac{2}{3} R_1^2 R_0 + \frac{4}{3} R_0 R_1^2,$$

$$F_3 = \frac{2}{5} R_1^3,$$

$$F_4 = F_5 = \ldots = 0.$$

С точностью до гармоник нулевого порядка (сферически-симметричное приближение)

$$F_0 = R_0^3,\ F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = \ldots = 0.$$

Таким образом, (6) принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 R_0^2}{dr^2} + [\varepsilon^2 - m_0^2 (1 - R_0^2)] R_0 = 0,$$

который совпадает с (7) из [1]. Отсюда мы видим, что уравнение, рассматривавшееся в [1], а также в [4, 5] является сферически-симметричным приближением полного уравнения (5). Если мы хотим определить F_k с точностью до гармоник первого порядка, то необходимо решать систему четырех нелинейных уравнений.

Аналогично можно получить обобщение на случай произвольного n, которое заменой переменных приводится к

$$y'' = \left(1 - \frac{y^n}{x^n}\right) y. \tag{7}$$

Из физических соображений следует, что показатель степени в нелинейной части должен быть четным, так как инвариантом скалярного поля является $\psi^*\psi$, кроме того, проведенное разложение по $Y_k^{(0)}$ возможно лишь при четных n, но дальнейшее исследование существования ограниченных решений мы будем проводить для любого n.

Необходимо уточнить, в каком смысле будет пониматься спектр нелинейного уравнения. До сих пор математической основой квантования являлись решения только краевых задач на собственные значения. Но возможна и другая математическая основа квантования. При решении задач на собственные значения линейных уравнений краевые условия для всех решений остаются одинаковыми, но меняется параметр (собственное значение), входящий в линейное дифференциальное выражение, т. е. изменяется само выражение. В нашем случае нелинейное дифференциальное выражение, являющееся частью нелинейного оператора, остается неизменным, а меняются начальные условия, и ставится задача: найти начальные условия, при которых уравнение имеет решения, отвечающие некоторым поставленным условиям (непрерывность, квадратичная интегрируемость), и найти сами решения. Совокупность этих решений и будем называть спектром нелинейного уравнения.

Итак, необходимо качественно исследовать вопрос о существовании и характере спектра уравнения (7). Для этого воспользуемся методом линеаризации нелинейных уравнений, который подробно обоснован в (6, 7). Линеаризованное уравнение для отрезка $-1 \leqslant y \leqslant 1$ будет иметь вид

$$y'' - y = -\frac{y}{x^n}$$

или

$$y'' = \left(1 - \frac{1}{x^n}\right) y. \tag{8}$$

Как показано в [1], вопрос о существовании частицеподобных решений сводится к вопросу о существовании решений, близких к нулю при сколь угодно больших значениях независимого переменного. Если такие решения существуют у линеаризованного уравнения, то они будут

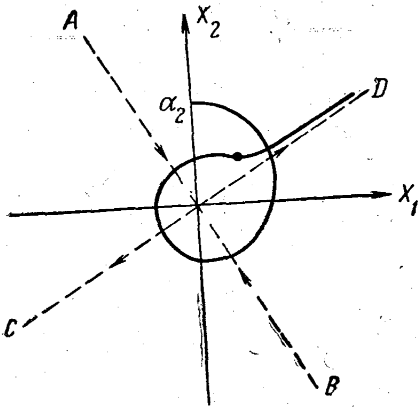

Рис. 1

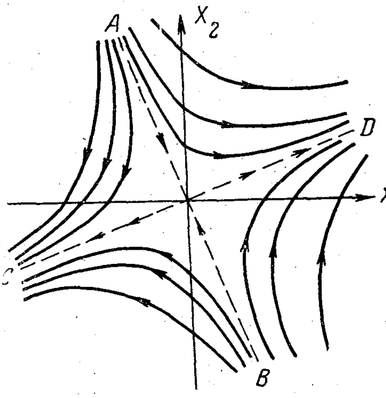

Рис. 2

существовать и у соответствующего нелинейного, так как нулевое значение функций находится внутри отрезка справедливости приближения $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Мы ограничимся качественным доказательством наличия частицеподобных решений задачи Коши для уравнения (8) при некоторых значениях первой произвольной в нуле $\alpha = y'(0)$. Для этого исследуем поведение решений уравнения (5) на фазовой плоскости.

Обозначим $y = x_1$, $y' = x_2$, $x = t$, тогда (8) запишем в виде уравнений для неконсервативной динамической системы

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \left(1 - \dfrac{1}{t^l}\right) x_1, \\ \dot{x}_1 = x_2. \end{cases}$$

Следует рассматривать систему фазовых траекторий в пространстве (оси x_1, x_2 и t), но характер фазовой траектории хорошо виден из ее проекции на плоскость (x_1, x_2). Для $t < 1$, т. е. когда $1 - \frac{1}{t^n} < 0$, проекции фазовых траекторий имеют вид, приведенный на рис. 1, а для $t > 1$, т. е. когда $1 - \frac{1}{t^n} > 0$, — на рис. 2 [7].

Пусть в $t = 0$ фазовая точка находится на оси x_2, что соответствует начальным условиям $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = \alpha$. При $t < 1$ фазовая точка будет по спирали приближаться к точке покоя (0,0). В момент $t = 1$ происходит качественное изменение системы фазовых траекторий. Спиральные траектории превращаются в траектории гиперболического типа. При $t > 1$ возможны следующие поведения фазовой траектории. Если в $t = 1$ проекция фазовой точки находится правее линии AB (рис. 3), то она, не пересекая оси x, будет уходить в $+\infty$, если она была левее, то в $-\infty$; если же фазовая точка окажется на линии AB (рис. 4), то она, не пересекая оси x, будет стремиться к точке

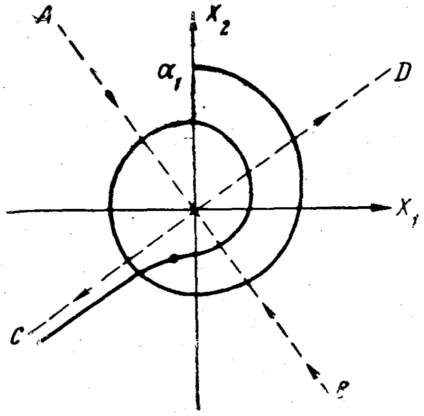

Рис. 3

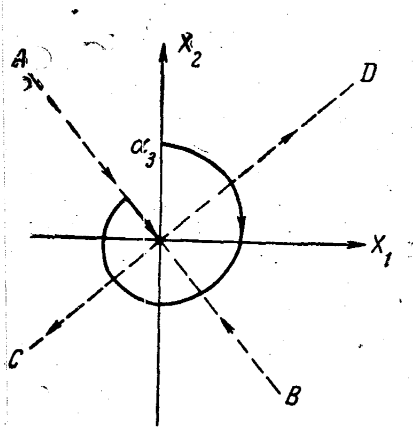

Рис. 4

покоя (0,0). Осуществление того или иного случая зависит от значения $\alpha = x_2(0)$. Линия CD не является определяющей поведение точки. Первому и второму случаям соответствует следующая картина: кривая, совершив несколько осцилляций (движение фазовой точки по спирали), начнет, не пересекая оси x, стремиться к $\pm\infty$ экспоненциально. В третьем случае мы получим частицеподобные решения. Эти качественные выводы были подтверждены путем исследования (совместно с Ю. А. Сериковым) фазовых траекторий уравнения на электромодели-

$$y'' = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) y$$

рующем устройстве МН-7. Кроме того, они находятся в согласии с точными (частицеподобными) решениями уравнения

$$y'' = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) y,$$

приведенными в [1].

Существование везде ограниченных решений линеаризованного уравнения, а следовательно и исходного нелинейного, не связано с формой задания начальных условий. Везде ограниченные решения при четных n могут существовать при некоторой совокупности пар чисел $\{\beta, \gamma\}$, где $\beta = y(x_0)$, $\gamma = y'(x_0)$, а x_0 — произвольная точка на оси x. Дополнительное исследование должно показать, все ли они могут описывать частицы.

Аналогичное исследование показывает, что при $n = 2m + 1$ (7) имеет лишь одно частицеподобное решение (без нулей). Частицеподобные решения существуют, когда $n = \frac{p}{q} + 1$, где p и q взаимно простые нечетные числа, причем $n > 0$. Решения уравнений $y'' = -\left(1 \pm \frac{y^n}{x^n}\right) y$

имеют осциллирующий характер, причем амплитуда осцилляций уменьшается при $x \rightarrow +\infty$. Эти решения можно отнести к частицеподобным, если они квадратично интегрируемы; выяснение этого вопроса требует дополнительного исследования.

В заключение автор выражает благодарность В. Б. Гласко и В. И. Родичеву за обсуждение вопроса о разделении переменных в случае нелинейных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гласко В. Б., Лерюст Ф., Терлецкий Я. П., Шушурин С. Ф. ЖЭТФ, **35**, вып. 2(8), 452—457, 1958.
2. Родичев В. И. «Изв. вузов», сер. физическая, № 6, 118, 1961.
3. Hobson E. W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics, Chelsea Publ. Co., N. Y., 1955, стр. 89.
4. Rosen N., Rosenstock H. B. Phys. Rev., **85**, 57—59, 1952.
5. Finkelstein R. J., Lelevier R., Ruderman M. Phys. Rev., **83**, 326—332, 1951.
6. Шушурин С. Ф. О линеаризации обыкновенных дифференциальных уравнений. Доклад на I Советской гравитационной конференции. Изд-во МГУ, 1961.
7. Шушурин С. Ф. Исследование частицеподобных решений нелинейных уравнений поля. Диссертация. МОПИ, 1961.

Поступила в редакцию
22. 11 1961 г.
после переработки
18. 5 1962 г.

Кафедра
статистической физики и механики