

Э. В. ПОГОРЕЛОВА, Р. В. ХОХЛОВ

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО УСИЛИТЕЛЯ НА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЕ

Статья посвящена изучению нелинейных режимов параметрического усилителя на бегущей волне при наличии рассогласования по фазовым скоростям.

Выяснена роль затухания в системе. Анализ проведен на основе качественного интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих волновые процессы в системе, а также на основе аналитического решения их для отдельных случаев.

§ 1. Введение. Вывод основных уравнений

В последнее время значительно возрос интерес к параметрическим усилителям на бегущей волне. Они обладают рядом преимуществ не только по сравнению с ламповыми усилителями, но и с параметрическими усилителями контурного типа. Параметрические усилители на бегущей волне имеют при сохранении большого усиления широкую полосу пропускания частот, в отличие от узкополосных усилителей контурного типа, более устойчивы по отношению к уровню и частоте накачки.

Теоретический анализ параметрического усилителя на бегущей волне впервые был проведен Тьеном и Сулом [1]. Этот анализ, проведенный в линейном приближении, оказывается недостаточным при значительных коэффициентах усиления, когда необходимо учитывать нелинейность энергоемкого элемента.

В работах [2, 3] приведено рассмотрение процессов в нелинейной распределенной системе ($C = C_0(1 + \eta v)$), но без учета возможного рассогласования по фазовым скоростям распространяющихся в системе волн.

Учет рассогласования по фазовым скоростям для вырожденного усилителя проведен в [5]. Настоящая работа посвящена рассмотрению волновых процессов в невырожденном параметрическом усилителе с бегущей волной при наличии рассогласования по фазовым скоростям и при наличии потерь в системе.

В качестве распределенной нелинейной системы рассмотрим такую, распределенная емкость которой является функцией напряжения $C = C_0(1 + \eta v)$, а остальные параметры постоянными. Волновые процессы в такой системе могут быть описаны с помощью телеграфных уравнений вида

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(Cv) + Gv,$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \quad (1)$$

или, при исключении тока i , одним уравнением вида

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v + \gamma v^2) + L_0 G \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (2)$$

где $u = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ — фазовая скорость.

Как известно, в СВЧ диапазоне L , G , C , η зависят от частоты. В уравнениях (1), (2) это обстоятельство не учтено, но его можно учесть на этапе укороченных уравнений. Ищем решения уравнения (2) в виде

$$v = \sum v_i \cos \theta_i,$$

где

$$\theta_i = \omega_i t - \beta_i x + \Phi_i,$$

причем

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad \beta_1 + \beta_2 = \beta_3 + \Delta.$$

Величина Δ характеризует рассогласование волн по фазовым скоростям и определяется соотношением

$$|\Delta| = \left| \omega_2 \left(\frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2} \right) + \omega_1 \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \right|.$$

Амплитуды волн v_i и их фазы Φ_i являются медленно меняющимися функциями координаты x . Поведение этих функций описывается укороченными уравнениями вида

$$\dot{v}_1 = -\frac{\eta}{2} \beta_1 v_1 v_3 \sin \psi - \delta_1 v_1; \quad \dot{v}_2 = -\frac{\eta}{2} \beta_2 v_1 v_3 \sin \psi - \delta_2 v_2, \quad (3)$$

$$\dot{v}_3 = \frac{\eta}{2} \beta_3 v_1 v_2 \sin \psi - \delta_3 v_3; \quad \dot{\psi} = -\frac{\eta}{2} \left(\beta_1 \frac{v_2 v_3}{v_1} + \beta_2 \frac{v_1 v_3}{v_2} - \beta_3 \frac{v_1 v_2}{v_3} \right) \cos \psi + \Delta.$$

Здесь δ_i — коэффициент затухания, $\delta_i = \frac{L_i G_i \omega_i}{2\beta_i}$.

Смысл функции $\psi = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3$ заключается в том, что она характеризует фазовое рассогласование между балластной волной на частоте ω_2 и возникшей за счет нелинейности комбинационной гармоникой на частоте $(\omega_3 - \omega_1)$. Система (3) полностью описывает волновой процесс в распределенной системе, но она является очень сложной и ее аналитическое решение не может быть получено в общем виде.

Для анализа волновых процессов будут использованы методы качественного анализа дифференциальных уравнений, в частности фазовая плоскость.

§ 2. Качественный анализ на фазовой плоскости в случае отсутствия затухания

Система (3) существенно упрощается, когда нет затухания. Комбинация первых трех уравнений дает три первых интеграла системы, из которых два являются линейно независимыми, а именно

$$\frac{v_1^2}{\beta_1} - \frac{v_2^2}{\beta_2} = \frac{v_{10}^2}{\beta_1}, \quad (4)$$

$$\frac{v_1^2}{\beta_1} + \frac{v_3^2}{\beta_3} = \frac{v_{10}^2}{\beta_1} + \frac{v_{30}^2}{\beta_3}, \quad (5)$$

где v_{10} и v_{30} соответственно амплитуды напряжений сигнала и накачки на входе системы. Амплитуду напряжения балластной волны на входе полагаем равной нулю. Заметим, что первые интегралы системы укороченных уравнений представляют дифференциальные соотношения Менли — Роу

$$\frac{1}{\beta_1} \frac{d(v_1^2)}{dx} = \frac{1}{\beta_2} \frac{d(v_2^2)}{dx} = - \frac{1}{\beta_3} \frac{d(v_3^2)}{dx}.$$

Знак минус перед третьим членом характеризует переход энергии из волны накачки в волну сигнала и балластную волну.

Закон сохранения энергии в такой системе имеет обычный вид: $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \text{const}$.

Используя первые интегралы, исключаем из уравнений v_2 и v_3 , а затем, разделив оставшиеся уравнения одно на другое, получим уравнение, описывающее поведение интегральных кривых на фазовой плоскости $[v_1^2, \psi]$,

$$\frac{d\psi}{d(v_1^2)} = \Phi(v_1^2, \psi, \Delta). \quad (6)$$

Фазовая плоскость, описываемая уравнением (6), изображена на рис. 1, 2. Все кривые, изображающие возможные движения в системе, находятся в полосе

$$v_{10}^2 \leq v_1^2 \leq v_{10}^2 + \frac{\beta_1}{\beta_3} v_{30}^2.$$

Интегральные кривые, расположенные вне этой области, не могут быть физически реализованы, так как они соответствуют отрицатель-

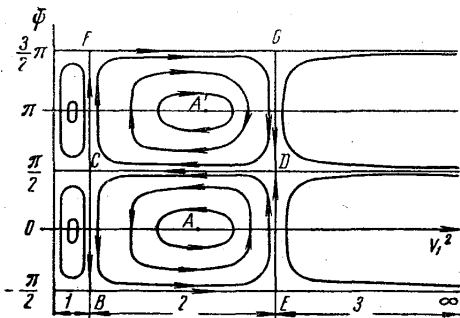


Рис. 1. Картина поведения интегральных кривых уравнения (6) для $\Delta = 0$

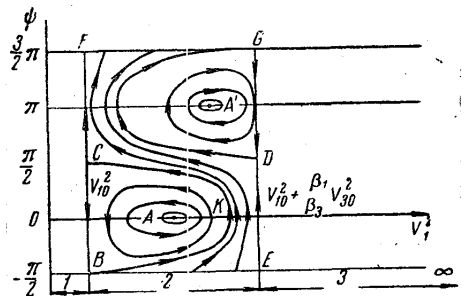


Рис. 2. Картина поведения интегральных кривых уравнения (6) для $\Delta \neq 0$

ному значению энергии либо балластной волны, либо волны накачки.

Рассматривая характер имеющихся особых точек, мы легко определим картину поведения интегральных кривых при различных соотношениях параметров $\Delta = 0$ и $\Delta \neq 0$. И в том и в другом случае в системе существуют две возможные комбинации волн, которые могут распространяться по системе без изменений. Для $\Delta = 0$ они отличаются друг от друга лишь сдвигом фаз на π и характеризуются одними и теми же значениями амплитуд на входе. При появлении рассогласова-

ния по фазовым скоростям они отличаются уже не только сдвигом фаз на π , но и значениями амплитуд на входе. Интересно отметить, что обе комбинации волн сохраняются при любом рассогласовании (для вырожденного усилителя при больших рассогласованиях одна комбинация становится физически нереальной).

Вокруг стационарных точек A_1 и A' расположены замкнутые кривые, описывающие процесс биений в системе.

Для $\Delta = 0$ (см. рис. 1) сепаратрисы $BCDE$, $CFGD$ соответствуют полным биениям в системе, для других интегральных кривых характерна меньшая глубина биений.

Тот же смысл имеют замкнутые кривые, окружающие стационарные точки при $\Delta \neq 0$ (рис. 2). Вместе с тем в этом случае появляются и качественно новые интегральные кривые. Условно их можно назвать кривыми с бегущей фазой. Действительно, как видно из рис. 1, если при $\Delta = 0$ для любой интегральной кривой фаза ψ меняется в пределах определенного интервала, то при $\Delta \neq 0$ (рис. 2) это реализуется лишь для некоторых интегральных кривых, причем чем больше $|\Delta|$, тем больше кривых с бегущей фазой. Очевидно, при подаче на вход двух волн возникает «комбинационная гармоника». Если фазовое рассогласование $\psi(x)$ между комбинационной гармоникой и третьей поданной на вход волной зависит от x по колебательному закону, то имеем эффективное взаимодействие всех волн. Можно говорить о взаимном фазовом захватывании всех волн. Для больших значений $|\Delta|$ такого взаимного фазового захватывания не реализуется — рассогласование $\psi(x)$ имеет растущую с расстоянием часть*.

Приведенное рассмотрение позволяет оценить максимальное усиление по мощности для волны сигнала и балластной волны.

В оптимальном режиме, когда на вход поданы лишь волны сигнала и накачки, усиление определяется соотношением

$$K = 1 + \frac{\beta_1}{\beta_3} \frac{v_{30}^2}{v_{10}^2}.$$

Когда амплитуда волны сигнала на входе становится соизмеримой с амплитудой волны накачки, усиление резко падает, что находится в согласии с экспериментом [4].

При появлении рассогласования по фазовым скоростям максимальное усиление падает. Для $|\Delta'| \ll 1$ оно уменьшается до значения

$$K = 1 + \frac{\beta_1}{\beta_3} \frac{v_{30}^2}{v_{10}^2} - \Delta'^2 \frac{v_{30}^2}{4v_{10}^2},$$

$$\Delta' = \frac{2\Delta}{\eta \sqrt{\beta_2^2 \beta_3} v_{30}}.$$

Фазовая плоскость не дает возможности оценить пространственные масштабы процессов. Неэлементарные же случаи, допускающие интегрирование, исчерпываются движениями по сепаратрисам, когда $\Delta = 0$ и эллипсам около стационарных точек как для $\Delta = 0$, так и $\Delta \neq 0$.

Движение по эллипсам, ближайшим замкнутым траекториям, охватывающим особые точки, является, очевидно, гармоническим. Уравне-

* Интересно отметить, что подача на вход сильной волны напряжения сигнала балластной волны не означает усиления с накачкой на более низкой частоте. Происходит нарастание суммарной гармоники — «волны накачки».

ние, его описывающее, для $\Delta = 0$ можно получить, линеаризируя укороченные уравнения около этих точек. Оно имеет вид

$$\ddot{v}_i + \Gamma^2 v_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$\Gamma^2 = \gamma_1^2 \beta_1 \beta_2 v_{30}^2 \quad (7)$$

определяет волновое число пространственных биений. Для $\Delta = 0$ проще воспользоваться сопоставлением с вырожденным случаем нелинейного взаимодействия двух волн. Это справедливо при небольших отклонениях от стационарных точек, в которых амплитуды трех волн соизме-

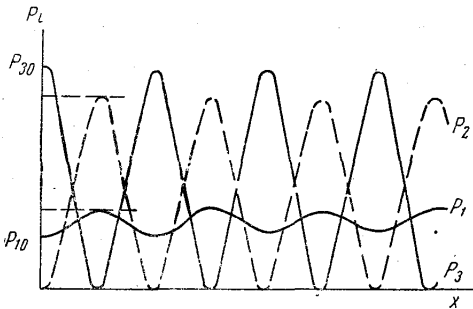


Рис. 3. Процесс пространственных биений в системе. Изображающая точка на фазовой плоскости движется по сепаратрисе $BCDE$ ($\Delta=0$)

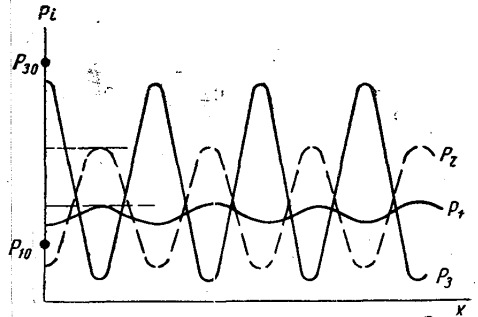


Рис. 4. Процесс пространственных биений в системе происходит около значений амплитуд, характерных для стационарного состояния A

римы, и амплитуда балластной волны меньше амплитуды волны сигнала на величину, много меньшую значения амплитуд в этих точках, т. е. $v_1 \approx v_2$. При таких условиях вырожденная и невырожденная система описываются одними и теми же математическими соотношениями. Для кривых вокруг стационарной точки A' ($\psi = \pi$) волновое число пространственных биений определяется соотношением

$$\Gamma^2 = \frac{1}{3} (3\gamma_1^2 \beta_1 \beta_2 v_{30}^2 + \Delta^2) + \frac{2}{3} \Delta \sqrt{3\gamma_1^2 \beta_1 \beta_2 v_{30}^2 + \Delta^2}. \quad (8)$$

Из сравнения (7) и (8) следует, что с появлением рассогласования период пространственных биений уменьшается. Пространственные масштабы процессов на сепаратрисе ($\Delta = 0$) можно найти с помощью эллиптических интегралов; это сделано в работе [3]. Приведем лишь формулу длины волны пространственного распределения мощности, которая будет использована в дальнейшем

$$\lambda_p = \frac{4K_k}{\alpha_0}, \quad \alpha_0 = \frac{\gamma_1}{2} v_{30} \sqrt{\beta_1 \beta_2}.$$

K — полный эллиптический интеграл 1-го рода; k — модуль эллиптического интеграла, определяется следующим образом:

$$k^2 = \frac{1}{1 + \frac{\beta_3 v_{10}^2}{\beta_1 v_{30}^2}}.$$

При выполнении условия $v_{10}^2 \ll v_{30}^2$ можно сравнить пространственные периоды биений для движения по сепаратрисе и около центральных особых точек. Если движение осуществляется по сепаратрисе, например $k^2 = 0,9$, то

$$\lambda_p = \frac{19,4}{v_{30} \sqrt{\beta_1 \beta_2}}$$

При движении около центральных особых точек

$$\lambda_p = \frac{2\pi}{v_{30} \sqrt{\beta_1 \beta_2}},$$

т. е. период на сепаратрисе больше. Естественно ожидать, что при переходе от траектории к траектории по направлению от центра к сепаратрисе период монотонно растет, достигая максимального значения на самой сепаратрисе.

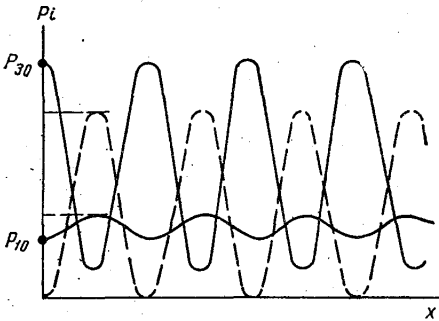


Рис. 5. Процесс пространственных биений в системе. Изображающая точка на фазовой плоскости движется по сепаратрисе ВКС ($\Delta \neq 0$)

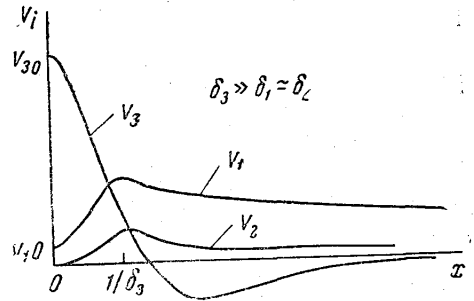


Рис. 6. Амплитуды волн сигнала, балансной и накачки, как функций расстояний от входа

ратрисе период монотонно растет, достигая максимального значения на самой сепаратрисе.

По-видимому, такую же зависимость периода биений от амплитуды можно ожидать и при рассогласовании по фазовым скоростям, но показать это не удалось, поскольку при $\Delta \neq 0$ невозможно задать сепаратрису аналитически. Все сказанное выше поясняют рис. 3, 4, 5.

§ 3. Учет затухания в системе

Учет потерь в системе приводит к появлению в укороченных уравнениях членов вида $\delta_i v_i$. При различных значениях затуханий $\delta_1 \neq \delta_2 \neq \delta_3$ и при произвольных значениях коэффициентов β_i система (3) может быть решена только при помощи численного интегрирования. Аналитическим основанием этого является отсутствие первых интегралов типа (4), (5).

Первые интегралы существуют лишь в частном случае, когда $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta$, и имеют вид

$$\frac{v_1^2}{\beta_1} - \frac{v_2^2}{\beta_2} = \frac{v_{10}^2}{\beta_1} e^{-2\delta x},$$

$$\frac{v_1^2}{\beta_1} + \frac{v_3^2}{\beta_3} = \left(\frac{v_{10}^2}{\beta_1} + \frac{v_{30}^2}{\beta_3} \right) e^{-2\delta x}.$$

Но даже в этом случае аналитические результаты удается получить, лишь когда нет рассогласования по фазовым скоростям ($\Delta = 0$). Вводя переменные

$$v_1 = v_{30} V_1 e^{-\delta x}, \quad v_2 = v_{30} V_2 e^{-\delta x}, \quad v_3 = v_{30} V_3 e^{-\delta x}$$

и $Z = \frac{\eta v_{30} \beta_3}{\delta_3} (1 - e^{-\delta x})$, можно свести систему (3) к следующей:

$$V_1' = -\frac{\beta_1}{\beta_3} V_2 V_3 \sin \psi; \quad V_2' = -\frac{\beta_2}{\beta_3} V_1 V_3 \sin \psi; \quad (9)$$

$$V_3' = V_1 V_2 \sin \psi; \quad \psi' = -\left(\frac{\beta_1}{\beta_3} \frac{V_2 V_3}{V_1} + \frac{\beta_2}{\beta_3} \frac{V_1 V_3}{V_2} - \frac{V_1 V_2}{V_3} \right) \cos \psi + \frac{2\delta}{\eta v_{30} \beta_3} e^{\delta x} \Delta.$$

(Дифференцирование проведено по приведенному расстоянию Z .) Зависимость коэффициента при Δ от x не позволяет использовать для решения метод качественного интегрирования на фазовой плоскости. При $\Delta = 0$ система (9) является безразмерной формой системы (3), если положить в ней все $\delta_i = 0$. Решение ее подробно проанализировано ранее.

Смысл приведенного расстояния Z выяснен в работе [5]. Роль параметра нелинейности играет член $\frac{\eta}{2} \beta_3 v_{30}$.

Для разных соотношений параметра нелинейности из затухания имеют место физически различные процессы.

Если $\frac{\eta}{2} \beta_3 v_{30} \gg \delta$, то изображающая точка на фазовой плоскости описывает несколько вращений по траектории, стремясь к определенной точке на ней, даваемой выражением $Z_0 = \frac{\eta}{2} \beta_3 \frac{v_{30}}{\delta}$.

Если $\delta \gg \frac{\eta}{2} \beta_3 v_{30}$, изображающая точка описывает небольшую дугу на траектории, характеризуемую тем же интервалом Z_0 . При этом пространственный период биений увеличивается: второй или даже первый «период» может растянуться до бесконечности.

Кроме случая равных значений $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta$ можно проанализировать случай, когда $\delta_3 \gg \delta_1 \simeq \delta_2 \simeq \frac{\eta}{2} \beta_3 v_{30}$. Опуская громоздкий математический анализ, ограничимся качественным описанием волновых процессов.

В случае сильного затухания волны накачки, обратной реакцией на нее волны сигнала и балластной волны на участке, прилегающем ко входу, можно пренебречь. Длина участка имеет порядок $\frac{1}{\delta_3}$. На этом участке волна накачки сильно затухает, волна сигнала усиливается и вместе с балластной волной достигает своего максимума. Величины максимумов зависят от соотношения $\frac{\beta_1 v_{30}}{\delta_3}$ и $\frac{\beta_2 v_{30}}{\delta_3}$, а также от собственных коэффициентов затухания волны сигнала и балластной волны. Чем больше δ_1 и δ_2 и чем меньше β_1 и β_2 , тем меньше соответственно максимальные амплитуды волны сигнала и балластной волны.

На расстояниях от входа, выходящих за пределы первого участка ($x \gg \frac{1}{\delta_3}$), волна сигнала и балластная волна в первом приближении распространяются не взаимодействуя, и уменьшаются по амплитуде в соответствии с собственными коэффициентами затухания. Амплитуда волны накачки, поддерживаемая этими волнами, равна $v_3 = \frac{\eta}{2} \beta_3 \frac{v_1 v_2}{\delta_3}$. Сказанное поясняет рис. 6, на котором изображены амплитуды волн сигнала, накачки и балластной волны как функции расстояний от входа.

Выводы

В статье проведен теоретический анализ нелинейных процессов в параметрическом усилителе на бегущей волне.

Рассмотрено взаимодействие трех волн, причем балластная волна имеет разностную частоту. Учет рассогласования по фазовым скоростям приводит к тому, что взаимодействие между волнами уменьшается и при достаточно больших $|\Delta|$ вообще исчезает, волны распространяются со своими парциальными фазовыми скоростями, не взаимодействуя. При любых рассогласованиях в парциальных фазовых скоростях волн сохраняются обе возможные комбинации волн сигнала, балластной и накачки, которые распространяются без изменения. С ростом рассогласования фазовых скоростей падает максимальное усиление и уменьшается период пространственных биений.

Учет затухания в системе приводит к качественно новой картине волновых процессов. При примерно равных для всех трех частот коэффициентах затухания в системе имеют место «затухающие биения». Период последних определяется соотношением параметра нелинейности и коэффициента затухания.

При больших коэффициентах затухания всех трех волн $\delta \gg \frac{\eta}{2} \beta_3 v_{30}$ движение носит лимитационный характер. Если же затухание на частоте волны накачки велико, а коэффициент затухания волны сигнала и балластной волны невелик — $\delta_3 \gg \delta_1 \simeq \delta_2 \simeq \frac{\eta}{2} \beta_3 v_{30}$, то на участке длиной порядка $\frac{1}{\delta_3}$ от входа волны сигнала и балластная волна усиливаются и достигают максимума. Величина усиления зависит от соотношения $\frac{\eta \beta_1 v_{30}}{2\delta_3}$ и $\frac{\eta \beta_2 v_{30}}{2\delta_3}$, а также от их собственных коэффициентов затухания.

На расстояниях от входа, превосходящих $\frac{1}{\delta_3}$, в первом приближении волна сигнала и балластная волна не взаимодействуют и затухают в соответствии со своими коэффициентами затухания. Сильно затухающая волна накачки «поддерживается» этими двумя волнами. Амплитуда волны накачки равна $v_3 = \frac{\eta}{2} \frac{\beta_3}{\delta_3} v_1 v_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tien P. K., Suhl H. PIRE, 46, 4, 700, 1958.
2. Cullen A. L., PIRE, 107B, 32, 101, 1960.
3. Jurkus, Robson. PIRE, 107B, 32, 119, 1960.
4. Jurkus, Robson. PIRE, 49, 5, 1961.
5. Хохлов Р. В. «Радиотехника и электроника», VI, № 7, 116, 1961.

Поступила в редакцию
20. 2 1962 г.

Кафедра
теории колебаний